Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тихоокеанский государственный университет»

М. А. КИСЛЯКОВА

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ПЛАНИМЕТРИЯ

*Утверждено издательско-библиотечным советом университета
в качестве учебно-методического пособия*

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2022

УДК 514.112(075.8)
ББК В151.0
К445

Р е ц е н з е н т ы:
доц. ФГБОУ ВО «ПГУ им. Шолом-Алейхема»
канд. физ.-мат. наук, *Н. Ф. Эйрих;*
ведущий научный сотрудник ХО ИПМ ДВО РАН
канд. физ.-мат. наук *М. Д. Монина*

Н а у ч н ы й р е д а к т о р
канд. физ.-мат. наук, доц. *В. В. Мендель*

Кислякова, М. А.

К 445 Элементарная геометрия. Планиметрия : учебно-методическое пособие / М.А. Кислякова; научый редактор В.В. Мендель; Министерство науки и высшего образования Российской федерации, Тихоокеанский государственный университет. – Хабаровск: Издательство ТОГУ, 2021. – 250 с.

ISBN 978-5-7389-3492-6

Содержит систематическое изложение теоретического и практического курса элементарной геометрии. В пособии представлены основные разделы планиметрии: треугольники, четырехугольники и окружности. Рассмотрены основные методы решения планиметрических задач. Приведены дополнительные главы планиметрии, включающие в себя задачи «на принадлежность» и задачи на наименьшее и наибольшее значение.

Предназначено для учащихся общеобразовательных школ, студентов педагогических профилей, магистрантов по направлению «Математическое образование», слушателей курсов повышения квалификации, всех, интересующихся проблемами математического образования и методикой обучения математики.

УДК 514.112(075.8)
ББК В151.0

ISBN **978-5-7389-3492-6**

ВВЕДЕНИЕ

Моим бабушкам
посвящается

Из всех предметов математического цикла, именно геометрия обладает самым большим педагогическим потенциалом для развития личности учащегося.

Своеобразие геометрии, выделяющее её среди других разделов математики, да и всех наук вообще, заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой. Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют эти два элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод.

Как показывают результаты экзаменов, тестирование студентов-первокурсников и опросы учителей, учебный предмет «Геометрия» является одним из самых сложных учебных предметов в школе. Преградой на пути к реализации педагогического потенциала геометрии в развитии интеллектуального потенциала учащихся, служат такие причины, как: недостаточное количество времени на формирование геометрических понятий и умений, низкая мотивация учащихся к изучению геометрии, познавательные барьеры в усвоении геометрических понятий и умений и др.

Геометрия обладает большими возможностями в развитии интеллектуального потенциала учащихся. Изучая пространственные формы окружающего мира, выявляя наиболее общие закономерности, происходит одновременное развитие пространственных представлений и логического мышления. Только в геометрии можно проследить всю логическую стройность математики, взаимосвязь аксиоматического метода и практических задач. Геометрия – уникальный раздел математики, потому как в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением, как следствие, у учащихся развивается логическое мышление, пространственное воображение и практическое понимание математики.

Целями изучения геометрии в школе являются:

– усвоение учащимися системы геометрических фактов, дальнейшее изучение геометрических свойств материального мира;

– повышение логической культуры учащихся;

– выработка у учащихся пространственного воображения и умение применять свои знания в практике.

Однако на пути к этому стоят сложно решаемые психолого-педагогические трудности. Геометрия вызывает наибольшие трудности у школьников, которые имеют и предметный, и психологический характер, связанные со спецификой геометрического материала.

Результаты экзаменов наглядно демонстрируют трудности у школьников, выраженные в типичных ошибках, таких как:

– невнимательное чтение условия задачи (например, угол ABC читают как ACB);

– ошибки в применение формул, а именно в незнании соотношений между величинами геометрических фигур;

– неумение доказывать, непонимание взаимосвязи элементов геометрических конструкций, очень часто встречались ошибки в теоретических фактах.

Много встречается разного рода логических ошибок, примером которых является следующее рассуждение «предположим, что точки лежат в одной плоскости», «пусть $\triangle ABC$ будет прямоугольным».

Особо следует отметить большое количество разного рода ошибок, допущенных учащимися при построении чертежа.

Наиболее сложной задачей в профильном уровне ЕГЭ является планиметрическая задача, поскольку каждый год она выполняется значительно хуже заданий высокого уровня, что также свидетельствует о недостаточной подготовленности учащихся. Типичные ошибки связаны в первую очередь с неверным понимание логики построения доказательств. Допущены ошибки в отношении площадей подобных фигур, не считали нужным доказывать геометрические факты конструкции, используемые в решении.

Анализ научно-методической литературы показал, что низкий процент выполнения заданий по геометрии вызван существенными проблемами в преподавании геометрии, среди которых, как отмечают специалисты, формальный характер уроков, уклон в вычислительные задачи, перекос в сторону алгоритмизации геометрических задач и т.д. [61, с. 12]

Тестирование первокурсников физико-математических факультета показало несформированность категориального аппарата геометрии, обозначив тем самым проблему слабой математической подготовки в области геометрии. Такое положение затрудняет дальнейшее обучение студентов-будущих учителей разным разделам геометрии и методики ее эффективного обучения.

При изучении основ элементарной геометрии основной акцент делается на рассмотрении основных подходов к решению планиметрических задач. Цель учебного курса – научить студентов смотреть на элементарную геометрию как на систему, а не как набор разных понятий и теорем. Задача курса – научить студентов решать задачи по элементарной геометрии.

На лекциях демонстрируется связь основных геометрических понятий, их свойств и построение логической стройности элементарной геометрии. Как показывает опыт педагогической деятельности, даже те студенты, которые хорошо решают геометрические задачи, испытывают трудности в выводе формул и доказательстве ключевых теорем, что свидетельствует о недостаточной теоретической подготовке учащихся.

На практических занятиях преимущество отдается решению более сложных задач, демонстрирующих широкое применение обобщенных подходов к решению геометрических задач, таким как алгебраический метод, метод дополнительных построений, метод «визуализации окружности», векторно-координатный метод решения стереометрических задач и т.д.

Интенсивный курс элементарной геометрии позволяет сформировать у студентов не только опыт в решении геометрических задач, но и развить геометрическую интуицию, которая необходима будущему учителю геометрии.

Цель настоящего пособия обобщить и систематизировать основные понятия, теоремы и ключевые задачи курса элементарной геометрии. Пособие предназначено для студентов педагогических специальностей, магистрантов, слушателей повышения квалификации.

Пособие состоит из трех частей. В первой части рассматриваются начальные геометрические сведения, основные понятия и теоремы, связанные с треугольниками и их элементами, четырехугольниками и окружностями.

Во второй части рассматриваются некоторые методы решения планиметрических задач, такие как алгебраические и геометрические методы, что позволяет акцентировать внимание студентов на основных идеях решения сложных планиметрических задач.

В третьей части приведены примеры двух видов планиметрических задач, вызывающих наибольшие затруднения у студентов, задачи на «принадлежность», задачи на наибольшее и наименьшее значение.

Представлено 15 вариантов индивидуальных заданий по 20 задач в каждом.

Выражаю благодарность М.А. Невзоровой за предоставленные варианты индивидуальных заданий, Л.Я. Щербаковой за идеи и ценные замечания.

ЧАСТЬ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

РАЗДЕЛ 1. НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Элементарная геометрия – часть геометрии, входящая в элементарную математику. Границы Э.г. не являются строго очерченными. Э.г. есть исторически и, соответственно, логически первая глава геометрии (поскольку из неё развились другие геометрические направления); в своих основах она сложилась в Древней Греции, и изложение её основ дают уже «Начала» Евклида. Элементарная геометрия исходит из простейших фигур – точка, отрезок, прямая, угол, плоскость – и основного понятия о равенстве отрезков и углов или вообще о совмещении фигур при наложении, чем определяется их равенство. При таком подходе, предметом элементарной геометрии являются: фигуры, определяемые конечным числом простейших фигур; фигуры, определённые тем или иным свойством, формулируемым в исходных понятиях; фигуры, определённые построением [31].

Существует и другой подход к определению элементарной геометрии. Согласно Эрлангенской программе, евклидова геометрия рассматривает те свойства фигур, которые не меняются при движениях; равные фигуры определяются, как фигуры, которые можно перевести одну в другую движением. С этих позиций, элементарная геометрия – это геометрия, определяемая группой перемещений (изометрий) и группой подобия.

Планиметрия (от лат. *planum* – «плоскость», др.-греч. μετρεω – «измеряю») – раздел евклидовой геометрии, изучающий двумерные (одноплоскостные) фигуры, то есть фигуры, которые можно расположить в пределах одной плоскости: треугольники, окружности и многоугольники.

В элементарной геометрии рассматриваются преимущественно так называемые метрические понятия и свойства фигур, т.е. такие понятия и свойства, которые могут быть связаны с рассмотрением равенства углов и отношением отрезков. Типичным примером метрических понятий могут служить понятия: «перпендикулярность прямых», «окружность». Свойство четырехугольника быть квадратом есть метрическое свойство. Теорема Пифагора – метрическая теорема [2, с. 14].

История развития планиметрии

XVII в. до н.э. – первое сочинение, содержащее простейшие геометрические сведения (Древний Египет).

ок. 625 гг. до н.э. – III в. до н.э. – становление геометрии как математической науки. Греческие ученые: Фалес, Пифагор, Демокрит, Евклид и др.

В знаменитом сочинении Евклида «Начала» были систематизированы основные известные геометрические сведения. Впервые был представлен аксиоматический подход к построению геометрии.

III в. до н.э. – древнегреческие ученые Архимед, Аполлоний и др.

XVII в. н.э. – этап связан с накоплением знаний по алгебре. Выдающийся французский математик и философ Р. Декарт предложил новый подход к решению геометрических задач. Он ввел метод координат, связав геометрию и алгебру, что позволило решать многие геометрические задачи алгебраическими методами.

Конец XVIII в. – русский математик Н.И. Лобачевский предположил, что можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. К аналогичным выводам пришел венгерский математик Я. Бойяи. Также в рукописях немецкого математика К.Ф. Гаусса высказывались идеи, близкие к идеям Лобачевского.

Современной наукой установлено, что евклидова геометрия лишь приближенно, хотя и с весьма большой точностью, описывает окружающее нас пространство, а в космических масштабах она имеет заметное отличие от геометрии реального пространства.

XIX в. – создана новая геометрия Б. Римана, обобщающая и геометрию Евклида, и геометрию Лобачевского.

XX в. – Д. Гильберт опубликовал тракт «Основания геометрии», разрешающий проблемы непротиворечивости, полноты и независимости систем аксиом, определяющие ту или иную геометрию.

1.1. Аксиоматика планиметрии

Основным методом изучения геометрических фигур в настоящем курсе является аксиоматический метод. Суть которого состоит в том, что, используя основные объекты и основные отношения, определяются новые геометрические понятия. Свойства основных понятий выражаются в предложениях, которые называются аксиомами. Аксиомы – это те основные предложения геометрии, которые **принимаются** без доказательства в качестве исходных. Все остальные предложения геометрии выводятся из аксиом с помощью доказательств [4, с. 5].

В своем развитии аксиоматический метод прошел три этапа. Первый этап связан с возникновением первой аксиоматически построенной научной теории – геометрии Евклида, второй – с возникновением неевклидовых геометрий и выяснением того, что геометрия может быть построена на разных системах аксиом, и третий – современный этап – ознаменован постановкой Д. Гильбертом задачи чисто формального аксиоматического построения всей математики и доказательством К. Гёделем принципиальной невозможности решения этой задачи.

В Энциклопедии элементарной математики евклидово пространство определяется как совокупность объектов трех видов, называемых ***точками***, ***прямыми*** и ***плоскостями***, и преобразованиями, переводящими совокупность всех точек в себя, называемые ***движениями (наложениями)***. Между этими объектами определены отношения: ***точка принадлежит прямой*** (***прямая проходит через точку), точка лежит между двумя другими точками*** [31]. Указанные объекты и отношения удовлетворяют следующим аксиомам[1]. Приведем некоторые из них.

1. Аксиомы принадлежности.

1.1. Через две различные точки проходит единственная прямая.

1.2. На каждой прямой имеются, по крайней мере, две точки, ей принадлежащие.

1.3. Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

---

[1] Ниже указаны только аксиомы планиметрии.

2. Аксиомы порядка.

2.1. Из любых трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

2.2. Для любых двух точек прямой существует такая третья точка на этой прямой, что вторая лежит между первой и третьей.

2.3. Если прямая лежит на плоскости, определяемой тремя точками A, B, C, не проходит ни через одну из этих точек и пересекает отрезок AB, то она пересекает отрезок AC или отрезок BC.

3. Аксиомы движения (наложения).

3.1. Всякое движение является взаимно однозначным отображением пространства на себя.

3.2. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, причем C лежит между A и B, то всякое движение f переводит их в точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, принадлежащие одной прямой, причем $f(C)$ лежит между $f(A)$ и $f(B)$.

3.3. Композиция двух движений является движением.

3.4. Для всяких двух реперов, взятых в определенном порядке, существует одно и только одно движение, переводящее первый репер во второй.

4. Аксиомы непрерывности.

4.1. *(Аксиома Архимеда)* Пусть A_0, A_1, B – три точки, принадлежащие одной прямой, причем точка A_1 лежит между A_0 и B. Пусть, далее, f – движение, переводящее точку A_0 в точку A_1 и луч A_0B в луч A_1B. Положим $f(A_1)=A_2$, $f(A_2)=A_3, \ldots$. Тогда существует такое натуральное число n, что точка B находится на отрезке $A_{n-1}A_n$.

4.2. *(Аксиома Кантора)* Пусть A_1, A_2, … и B_1, B_2, … такие две последовательности точек, расположенных на одной прямой, что для любого n точки A_n и B_n различны между собой и находятся на отрезке $A_{n-1}B_{n-1}$. Тогда на этой прямой существует такая точка C, которая принадлежит всем отрезкам A_nB_n.

5. Аксиома параллельности.

5.1. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Об определениях геометрических понятий. В элементарной геометрии встречаются понятия, содержание и смысл которых раскрывается в других науках или разделах математики, например, понятия «существует», «совокупность», «число», «доказательство». В рамках геометрии эти понятия не определяются, и их смысл и содержание считаются известными. Наряду с этим курс элементарной геометрии содержит также определения большого числа различных понятий. Геометрические понятия, которые принимаются без определения, называют основными или неопределяемыми в данной системе изложения [2, с. 9].

Предложение, устанавливающее связь между первичными понятиями элементарной геометрии и принимаемое без доказательства, называется ***аксиомой*** элементарной геометрии.

После того как первичные понятия выделены, следует определить все другие геометрические понятия. Определение, как и аксиома, тоже предложение, принимаемое без доказательства, определение тоже устанавливает связь между понятиями. Но определение вводит новое понятие, между тем как аксиома говорит о связи только между понятиями, которые уже ранее имелись [2, с. 10].

При формулировке определений необходимо проявить осторожность, чтобы не определять неизвестное понятие через такие понятия, которые ранее не были определены и которые не содержатся среди первичных понятий элементарной геометрии.

В геометрии встречаются понятия, которым даны не определения, а описания. Например, в книге Евклида «Начала» даются описание основным понятиям следующим образом: «Точка есть то, что не имеет частей», «Прямая линия есть такая, которая одинаково расположена относительно своих точек» [2, с. 11]. Проведенный в течении последних 150 лет анализ показал всю сложность определения геометрических понятий, таких, например, как «линия» и «многоугольник»[2].

О теоремах. Помимо определений и аксиом в элементарной геометрии формулируются и другие предложения относительно геометрических понятий.

Каждое утверждение относительно геометрических понятий, справедливость которого устанавливается посредством некоторого

---

[2] Вопрос об аксиоматике элементарной геометрии подробно рассматривается в курсе «Основания геометрии», поэтому в настоящей работе мы его опустим.

рассуждения, называется ***теоремой*** [2, с. 12]. Название «теорема» происходит от греческого слова το θεώρημα – представление, зрелище.

Рассуждение, с помощью которого убеждаются в справедливости теоремы, называется ***доказательством***. Сущность его заключается в том, что теорема выводится из аксиом, определений и ранее доказанных теорем, т.к. представляется как их логическое следствие.

Геометрические теоремы часто формулируются в двух основных формах: категорической и условной (силлогической форме).

Например, теорема «Средняя линия трапеция параллельна основаниям и равна их полусумме» задана в категорической форме. Силлогическая форма подразумевает задание в таком виде, в котором явно выделено условие и заключение. Например, «Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник параллелограмм». Подобные предложения записываются кратко так: $A \Rightarrow B$. A называется условием, B – заключением.

Рассмотрим теперь предложение $B \Rightarrow A$, в котором заключение превратилось в условие, а условие – в заключение. В нашем примере получим: «Если четырёхугольник есть параллелограмм, то его противоположные стороны равны». Это теорема является обратной к первой теореме [18, с. 39].

Не всякая теорема имеет обратную. Например, теорему о смежных углах можно сформулировать так «Если заданы смежные углы, то их сумма равна 180^0». Обратная ей теорема была бы такой: «Если сумма углов равна 180^0, то они смежные». А это, конечно же не верно. Например, в квадрате сумма противоположных углов, равна 180^0.

Но в любом случае теорема состоит из трех частей:

1) разъяснительная часть, где описывается множество M объектов, о которых идет речь в этой теореме;

2) условие теоремы, т.е. некоторый предикат $A(x)$, заданный на множестве M;

3) заключение теоремы – некоторый предикат $B(x)$, заданный на том же множестве M.

1.2. Основные понятия планиметрии

Геометрической фигурой называется всякое непустое множество точек. Геометрическая фигура может быть задана различными способами: как пересечение или соединение данных фигур, путем указания определяющего ее свойства, путем указания свойства, которым обладает ее точка. Весьма распространенным является способ задания фигуры путем указания такого свойства, которым должны обладать все точки этой фигуры и только они. Если фигура задана таким образом, то ее иногда называют геометрическим местом точек, обладающим этим свойством [2].

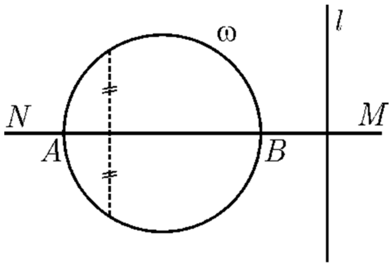


Рис. 1.2.1.

Так, например, один и тот же отрезок AB можно задать (рис. 1.2.1): 1) как пересечение лучей AM и BN; 2) как диаметр данной окружности ω, перпендикулярный к данной прямой l; 3) как совокупность середин всех хорд окружности ω, параллельных прямой l, и другими способами [2, с. 37].

В настоящем пункте введем определения основных геометрических понятий различными способами.

Будем говорить, что две прямые a и b пересекаются, если они имеют одну общую точку O (кратко будем записывать так $a \cap b = O$).

Опр. 1.2.1. Фигура, состоящая из двух точек A и B и всех точек, лежащих между ними, называется *отрезком* и обозначается AB или BA. Отрезок AB иногда называют расстоянием между точками A и B [2, с. 16].

Опр. 1.2.2. Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, на которые точка O делит остальные точки данной прямой, называется *лучом,* исходящим из точки O. Чтобы задать луч, достаточно, помимо точки O, указать еще одну какую-либо его точку P. Луч с началом в точке O, содержащий точку P, удобно обозначать символом OP.

Опр. 1.2.3. Две прямые a и b, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются, называются *параллельными прямыми,* обозначаются $a \parallel b$.

У г л ы

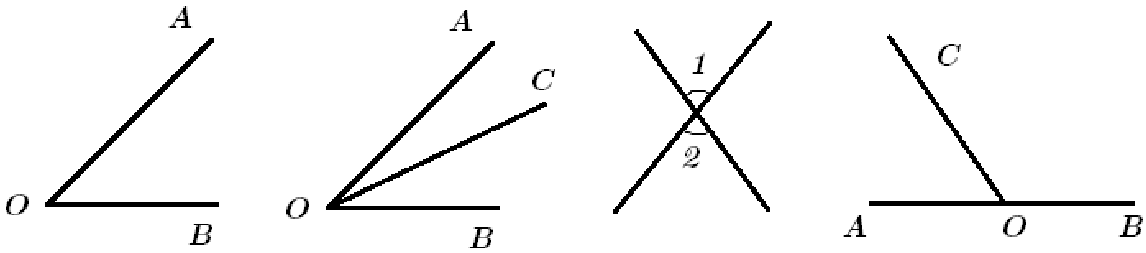
Опр. 1.2.4. Геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки O называется *углом.* Лучи называются сторонами угла, а их общее начало O – вершиной угла. Угол обозначается или одной буквой, указывающей его вершину, или тремя буквами, средняя из которых указывает вершину угла, а крайние – какие-нибудь точки на сторонах угла (рис. 1.2.2 *а*). Например, $\angle A,\ \angle BAO$ и т.д. Иногда углы обозначаются цифрами, например, $\angle 1, \angle 2$ и т.д.

Точки угла, не принадлежащие его сторонам, называются *внутренними.* Лучи, исходящие из вершины данного угла и проходящие через внутренние точки угла, называются *внутренними лучами* (рис. 1.2.2 *б*).

Опр. 1.2.5. Если стороны угла образуют одну прямую, то угол называется *развернутым углом.*

Опр. 1.2.6. Пары углов с общей вершиной, образуемые при пересечении двух прямых так, что стороны одного угла являются продолжением сторон другого называются *вертикальными углами* (рис. 1.2.2 *в*).

Опр. 1.2.7. Углы, у которых одна сторона общая, а другие стороны лежат на одной прямой называются *смежными углами* (рис. 1.2.2 *г*).



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 1.2.2

М н о г о у г о л ь н и к

Опр. 1.2.8. *Ломаной (ломаной линией)* $A_1A_2...A_n$ называется фигура, которая состоит из отрезков $[A_1A_2],[A_2A_3],...,[A_{n-1}A_n]$. Точки

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются вершинами ломанной, а отрезки $[A_1A_2], [A_2A_3], \ldots, [A_{n-1}A_n]$ – звеньями ломанной.

Опр. 1.2.9. Фигура Φ называется *плоской*, если она принадлежит некоторой плоскости. Будем говорить, что фигура Φ делит плоскость, которой она принадлежит на две области, если при этом точки плоскости, не принадлежащие Φ, можно разбить на два класса следующим образом: 1) каждый класс содержит точки; 2) любые две точки одного класса можно соединить ломанной, не имеющей с Φ общих точек; 3) отрезок, соединяющий две точки различных классов, пересекает Φ.

Аксиома. Всякая прямая, лежащая в некоторой плоскости, делит эту плоскость на две выпуклые области.

Соединение каждой из этих областей с указанной прямой называется *полуплоскостью.*

Теорема 1.2.1. *Теорема Жордана.* Всякая простая замкнутая ломаная на плоскости разбивает точки на плоскости на две области – внутреннюю и внешнюю. При этом всякие две точки из одной области могут быть соединены ломаной, целиком содержащийся в этой области. Если же две точки принадлежат разным областям, то любая ломаная, их соединяющая, пересекается с исходной ломаной[3].

Теорема Жордана позволяет ввести понятие многоугольника.

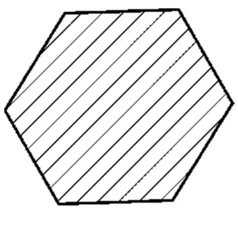


Рис. 1.2.3

Опр. 1.2.10. *Многоугольником* называется фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ее внутренней областью; в этом случае сама ломаная называется контуром многоугольника (рис. 1.2.3). Вершины ломаной называются вершинами многоугольника, стороны – сторонами многоугольника, а углы, образованные соседними сторонами, – углами многоугольника. Точки многоугольника, не лежащие на его сторонах, называются внутренними точками.

Опр. 1.2.11. Многоугольник F называется *выпуклым*, если он вместе с любыми двумя своими точками содержит и отрезок их соединяющий.

[3] Доказательство теоремы можно найти в [4].

Пример 1.2.1. На рис. 1.2.4 первая фигура является многоугольником, но не является выпуклым многоугольником. На второй части – это не многоугольники.

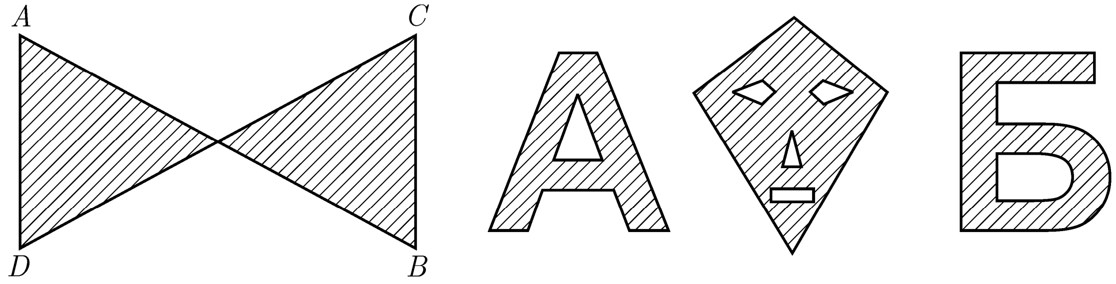


Рис. 1.2.4

Будем говорить, что многоугольник F разложен на многоугольники $F_1, F_2, ..., F_k$, если никакие два из многоугольников $F_1, F_2, ..., F_k$ не имеют внутренних точек и $F = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_k$ (рис. 1.2.5).

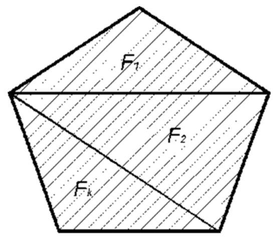


Рис. 1.2.5

На рис. 1.2.5 многоугольник F разложен на треугольники F_1, F_2, F_3.

Опр. 1.2.12. *Внутренним углом* многоугольника при вершине A следует считать тот из двух углов, образуемых сторонами, исходящими из этой вершины, для которого пересечение внутренней области с достаточно малой окрестностью точки A принадлежит внутренней области многоугольника.

Опр. 1.2.13. *Диагональю многоугольника* называется отрезок, соединяющий две несмежные вершины многоугольника. Ясно, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали. Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали.

Опр. 1.2.14. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется *параллелограммом.*

Опр. 1.2.15. Параллелограмм, у которого один из углов прямой, называется *прямоугольником.*

Опр. 1.2.16. *Треугольником* называется геометрическая фигура, состоящая из трех отрезков, попарно соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой.

Лемма 1.2.1. Внутренняя область треугольника есть пересечение внутренних областей трех углов треугольника.

Теорема 1.2.2. *Предложение Паша*: прямая, не проходящая через одну из вершин треугольника и пересекающая одну из его сторон, пересечет одну и только одну из двух других его сторон.

Доказательство

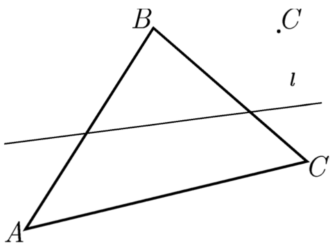


Рис. 1.2.6

1. Пусть задан $\triangle ABC$. Пусть прямая l пересекает сторону AB. Тогда точки A и B лежат в разных полуплоскостях. Если вершина C находится в одной полуплоскости с вершиной A (рис. 1.2.6), то вершина B будет находиться в другой полуплоскости. Отсюда AC не пересекается, BC пересекается.

2. Если же вершина C расположится в одной полуплоскости с вершиной B, то BC не пересечётся, а AC пересечётся. Вершина C на прямую лечь не может, т.к. по условию прямая не проходит через вершину.

Теорема доказана.

О к р у ж н о с т ь

Опр. 1.2.17. *Окружность* радиуса r с центром в точке O называется множество всех точек некоторой плоскости, которые находятся на данном расстоянии r от некоторой точки O той же плоскости. Эта точка называется *центром окружности*, а каждый отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой окружности, называется *радиусом окружности* [2, с. 18].

Опр. 1.2.18. *Кругом* радиуса r с центром в точке O называется множество всех таких точек некоторой плоскости α, для которых расстояние от лежащей в этой плоскости точки O не больше данного отрезка r. Точка O называется центром круга. Множество всех таких точек M плоскости α, для которых $OM < r$, будем называть *внутренностью круга* [2, с. 18].

Опр. 1.2.19. *Вектором* называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если записи AB, BA обозначают один и тот же обычный отрезок с концами A и B, то записи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ обозначают разные направленные отрезки и назваются *противоположными векторами*.

1.3. Измерение геометрических величин

В процессе абстракции всегда происходит огрубление действительности, отвлечение от ряда обстоятельств. Поэтому величины – это не сама реальность, а лишь ее отображение. Тем не менее, практика показывает, что величины верно отражают свойства окружающей действительности. В самой природе нет сил, скоростей, импульсов и т. д. Величины вводят в ходе познания для описания явлений природы.

В математике общее понятие величины является первичным, неопределяемым, однако существует несколько подходов к описанию этого понятия.

В одних случаях, величины просто отождествляются с числами.

В других, величина определяется как функция с заданными свойствами.

В-третьих, величина есть множество с некоторой совокупностью свойств.

Геометрические величины обладают разнообразными свойствами. Иногда мы можем отметить только наличие или отсутствие у данной фигуры того или иного свойства, относительно некоторых можно сказать, что некоторые фигуры могут иметь свойство «в большем или меньшем количестве». Такого, например, свойство отрезка иметь длину, свойство плоской фигуры иметь площадь [2, с. 132].

Геометрическая фигура обладает свойством величины, если ей можно сопоставить определяемую тем или иным способом числовую характеристику.

Нахождение численного значения данной величины называется измерением этой величины. Известно, что не каждое свойство объектов мы умеем измерять (например, воля, страх, вкус, лень и т.д.). Величины позволяют перейти от описательного к количественному изучению свойств объектов, то есть материализовать знания о природе.

В настоящем пункте мы сформулируем математическое содержание процессов измерения основных геометрических величин.

Равенство и сравнение фигур

Понятие *наложение* относится к основным понятиям геометрии. Смысл, который вкладывают в это слово, можно объяснить так. При наложении фигуры Φ на фигуру Φ_1 мы представляем наглядно как каждая точка фигуры Φ накладывается на некоторую точку фигуры Φ_1.

С помощью наложений введем понятие равных отрезков и установим для отрезков отношения «больше» и «меньше» без введения понятия длины отрезка, то есть без использования понятия числа [4].

Опр. 1.3.1. Фигура Φ называется *равной* фигуре Φ_1, если существует наложение, при котором фигура Φ переходит в Φ_1, т.е. каждая точка фигуры Φ переходит в некоторую точку фигуры Φ_1, и каждая точка фигуры Φ_1 имеет единственный прообраз, принадлежащий фигуре Φ. Запись $\Phi=\Phi_1$ означает, что фигура Φ равна фигуре Φ_1.

Аксиомы равенства фигур

1. Каждая фигура равна самой себе.

2. Если фигура Φ равна фигуре Φ_1, то Φ_1 равна Φ.

3. Если фигура $\Phi_1=\Phi_2$, а $\Phi_2=\Phi_3$, то $\Phi_1=\Phi_3$.

4. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка A_1B_1, то отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1.

5. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Равенство отрезков. Из аксиомы 4 следует, что при наложении отрезок отображается на отрезок, причем концы отображаются в концы отрезка. Поэтому фигура, равная отрезку, является отрезком.

Одной из основных операций, которую можно производить с отрезками, является операция откладывания данного отрезка на данном луче от его вершины. Получающийся при этом отрезок называется равным исходному отрезку.

Равенство отрезков AB и A_1B_1 записывается в виде $AB = A_1B_1$. Оно означает, что если один из этих отрезков, например, AB, отложить на луче A_1B_1 от точки A_1, то отрезок AB при этом совместится с отрезком A_1B_1.

Сравнение отрезков. Пусть AB и CD – отрезки.

Опр. 1.3.2. Если на отрезке CD существует точка M, такая что $AB = CM$, то говорят, что отрезок AB меньше отрезка CD (или отрезок CD больше отрезка AB). Обозначают так: $AB < CD$ ($CD > AB$).

Теорема 1.3.1. Для любых двух отрезков AB и CD всегда выполняется одно и только одно из соотношений: $AB < CD, AB > CD, AB = CD$.

Доказательство

1. На луче AB отложим отрезок AM, равный отрезку CD. Если точки M и B совпадают, то $AB = CD$, если они не совпадают, то либо $A - M - B$, либо $A - B - M$. В первом случае $AB > AM$, но $AM = CD$, поэтому $AB > CD$. Во втором случае $AB < AM$, но $AM = CD$, поэтому $AB < CD$.

2. Не трудно видеть, что никакие два из соотношений $AB < CD$, $AB > CD$, $AB = CD$ не могут быть выполнены одновременно.

Теорема доказана.

Опр. 1.3.3. Серединой отрезка AB называется такая точка C прямой AB, что $AC = CB$.

Равенство углов. Легко показать, что при наложении неразвернутый угол переходит в неразвернутый угол, а развернутый – в развёрнутый. Поэтому фигура, равная неразвернутому (развернутому) углу, является неразвернутым (развернутым) углом.

Одной из основных операций, которую можно производить с углами является операция откладывания данного угла в ту или другую сторону от данного луча. Получающийся при этом угол называется равным исходному углу.

Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Оно означает, что если один из этих углов, например $\angle AOB$, отложить от луча O_1A_1 в сторону, определяемую лучом O_1B_1, то $\angle AOB$ при этом совместится с углом $\angle A_1O_1B_1$.

***Сравнение углов*.** Пусть $\angle AOB$ и $\angle C_1O_1B_1$ – неразвернутые углы.

Опр. 1.3.4. Если существует внутренний луч O_1A_1 угла $\angle C_1O_1B_1$ такой, что $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, то говорят, что угол $\angle AOB$ меньше $\angle C_1O_1B_1$ или угол $\angle C_1O_1B_1$ больше $\angle AOB$ и пишут так: $\angle AOB < \angle C_1O_1B_1$, $\angle C_1O_1B_1 > \angle AOB$.

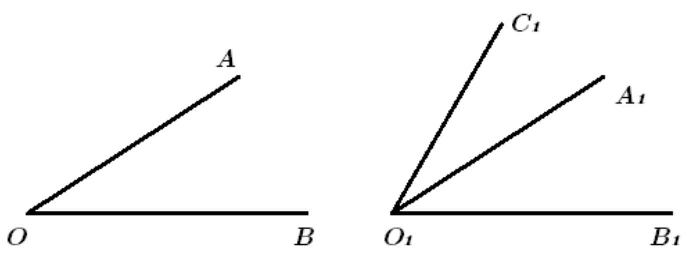


Рис. 1.3.1

Если один из углов развёрнутый, то будем считать, что неразвернутый угол меньше развернутого.

Теорема 1.3.2. Для любых двух углов $\angle AOB$ и $\angle C_1O_1B_1$ всегда выполняется одно и только из отношений: $\angle AOB = \angle C_1O_1B_1$, $\angle AOB < \angle C_1O_1B_1$, $\angle AOB > \angle C_1O_1B_1$.

Доказательство

Пусть $\angle AOB$, $\angle C_1O_1B_1$ – неразвернутые углы. От луча O_1B_1 в полуплоскость, содержащую луч O_1C_1 отложим угол $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$. Если лучи O_1C_1 и O_1A_1 совпадут, то $\angle AOB = \angle C_1O_1B_1$, а если не совпадут, то либо O_1A_1 – внутренний луч $\angle C_1O_1B_1$, либо O_1C_1 – внутренний луч $\angle A_1O_1B_1$.

В первом случае, $\angle A_1O_1B_1 < \angle C_1O_1B_1$, но $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$, следовательно, $\angle AOB < \angle C_1O_1B_1$.

Во втором случае, $\angle A_1O_1B_1 > \angle C_1O_1B_1$, но $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$, следовательно,– $\angle AOB > \angle C_1O_1B_1$.

Теорема доказана.

Измерение отрезков

Опр. 1.3.5. Пусть каждому отрезку соответствует определенное положительное число, такое что:

1. Равным отрезкам соответствует одно и тоже число.

2. Если $B \in AC$, и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AB соответствует число $a + b$.

3. Некоторому произвольно выбранному отрезку PQ соответствует число равное 1.

Число, соответствующее каждому отрезку, называется *длиной этого отрезка.* Отрезок PQ называется единичным отрезком или единицей измерения [4].

В литературе можно встретить такие обозначения длины отрезка: $\rho(AB)$, $d([AB])$.

Аксиома существования длины отрезков: при произвольном выбранном единичном отрезке, каждый отрезок имеет определённую длину.

Другими словами, аксиома утверждает, что измерение отрезков возможно, т.е. при произвольно выбранном единичном отрезке каждому отрезку соответствует определенное число так, что выполняются условия, указанные в опр. 1.3.5.

Процесс измерения отрезков осуществляется следующим образом:

1. Фиксируем отрезок PQ – единицу измерения.

2. На отрезке AB откладывают от одного конца отрезки, конгруэнтные единичному отрезку.

3. Длина отрезка, взятая с недостатком равна n, длина отрезка, взятая с избытком равна *(n+1)*. Тогда длина отрезка заключена между числами $n < d([AB]) < n+1$.

4. Затем строят последовательность $n,n_1 < d([AB]) < n,n_1 + \frac{1}{2}$ с точностью до $\frac{1}{2^k}$.

В результате возникает последовательность приближений:

– по недостатку $a_k = n, n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$;

– по избытку $A_k = a_k + \frac{1}{2^k}$.

Опр. 1.3.6. Общий предел последовательностей по недостатку и по избытку $d([AB]) = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} A_k$ называется *длиной отрезка AB*.

Длину отрезка также можно определить как положительное число, показывающее, сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в данном отрезке [45].

Теорема 1.3.3. *Свойства длины отрезка.*

1^0. $AB < CD$ тогда и только тогда, когда $\rho(AB) < \rho(CD)$.

2^0. Если отрезок PQ укладывается в отрезке AB n раз, то $\rho(AB) = n \cdot \rho(PQ)$.

Лемма 1.3.1. *Предложение Архимеда.* Если AB и CD – произвольные отрезки, то на луче AB существует конечное множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ следуют друг за другом, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$ и $A - B - A_n$.

Так как длина отрезка зависит от выбора единицы измерения, возникает вопрос: единственна ли длина отрезка. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1.3.4. Если выбран единичный отрезок PQ, то существует не более одного соответствия между отрезками и положительными числами, при котором удовлетворяются условия 1-3 измерения отрезков [4].

Доказательство

1. Предположим, что утверждение неверно, т.е. при выбранной системе измерения EF существует два числа, удовлетворяющих условиям 1–3 опр. 1.3.5. Тогда существует отрезок MN такой, что его длины $\rho(MN) = a$, $\rho'(MN) = b$, для определенности пусть $b > a$.

Возьмем $k \in \mathrm{N}$ такое, что $k > \dfrac{1}{b-a}$.

Рассмотрим отрезок AB, в котором отрезок MN укладывается k раз. По теореме 1.3.3 $\rho(AB) = k \cdot \rho(MN) = ka$, $\rho'(AB) = k \cdot \rho'(MN)$ $= kb$.

Так как $\rho'(AB) = kb > 1$, $\rho'(EF) = 1$, то $AB > EF$.

2. Пользуясь предложением Архимеда, на луче AB отложим последовательно отрезки AA_1, A_1A_2, ..., $A_nA_{n-1} = EF$, так чтобы точка A_{n-1} принадлежала отрезку AB и $A - B - A_n$. По теореме 1.3.3 $\rho(AA_{n-1}) = \rho'(AA_{n-1}) = n-1$, $\rho(AA_n) = \rho'(AA_n) = n$.

Из полученных равенств следует, что точки A_{n-1} и B не совпадают, поэтому $A_{n-1} - B - A_n$, т.е. $AA_{n-1} < AB < AA_n$.

3. По теореме 1.3.3 имеем $\rho(AA_{n-1}) < \rho(AB) < \rho(AA_n)$ и $\rho'(AA_{n-1}) < \rho'(AB) < \rho'(AA_n)$.

С учетом полученных равенств, получаем: $n-1 < \rho(AB) < n$, $n-1 < \rho'(AB) < n$ или $n-1 < ka < n$, $n-1 < kb < n$.

Таким образом, $k(b-a) < 1$. Мы пришли в противоречие с неравенством $k > \dfrac{1}{b-a}$.

Итак, наше предположение о том, что существуют по крайней мере два числа, удовлетворяющие условиям 1–3 опр. 1.3.5, неверно.

Теорема доказана.

Опр. 1.3.7. Под *расстоянием* между точками A и B понимают длину отрезка AB.

Опр. 1.3.8. *Отношением* $\frac{AB}{CD}$ двух отрезков AB и CD называется число, показывающее, сколько раз отрезок CD и его части укладываются в отрезке AB. Если отрезок CD принять за единичный, то отношение $\frac{AB}{CD}$ будет равно длине отрезка AB. Говорят, что отрезки AB, CD пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1, если равны их отношения, т.е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = k$. Число k называется коэффициентом пропорциональности.

Опр. 1.3.9. *Золотое сечение* – это такое деление целого на неравные части, при котором большая часть относится к целому, как меньшая к большей.

Если отрезок разделен на две части так, что меньшая имеет длину x, в большая – длину y, то в случае золотого сечения $\frac{y}{x+y} = \frac{x}{y}$.

Опр. 1.3.10. Сумма длин сторон многоугольника называется его периметром. Периметр принято обозначать буквой P.

Измерение углов

Опр. 1.3.11. Пусть неразвернутому углу соответствует определённое положительное число, такое что:

1. Равным углам соответствует одно и тоже число.
2. Если l – внутренний луч угла hk и углам hl и lk соответствуют числа α и β, то углу hk соответствует число $\alpha+\beta$.
3. Некоторому углу p_0q_0 соответствует число, равное 1.

Тогда число, указанным образом соответствующее каждому углу, называется *мерой этого угла*. Угол p_0q_0 называется единицей измерения углов.

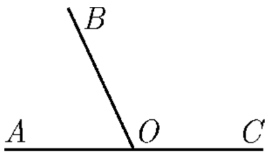
Опр. 1.3.12. Угол, равный своему смежному, называется *прямым*.

Замечание. Пусть $\angle AOB$ – прямой. Рассмотрим внутренние лучи $OM_1, OM_2, ..., OM_{89}$, которые делят угол на 90 частей. Установим, измерение углов, приняв $\angle AOM_1$ за единицу измерения. Тогда каждый угол hk будет иметь меру α, которую будем называть градусной мерой угла. Градусная мера каждого прямого угла равна 90^0, развернутого – 180^0.

В дальнейшем будем говорить, что угол – *прямой*, если он равен 90^0; *острый*, если он меньше 90^0; *тупой*, если он больше 90^0, но меньше 180^0.

Теорема 1.3.5. *Свойство смежных углов.* Смежные углы в сумме составляют 180^0.

Доказательство



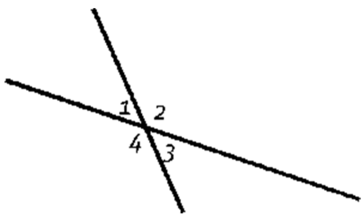
1. Пусть $\angle AOB$ и $\angle BOC$ – смежные.

2. Так как лучи OA и OC образуют развернутый угол, то можем сложить градусные меры углов $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180^0$.

Теорема доказана.

Теорема 1.3.6. *Свойство вертикальных углов.* Вертикальные углы равны.

Доказательство



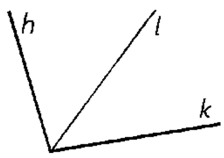
1. Пусть $\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные.

2. Угол $\angle 2$ и $\angle 1$ – смежные, тогда: $\angle 1 + \angle 2 = 180^0 \rightarrow \angle 1 = 180^0 - \angle 2$.

3. Угол $\angle 2$ и $\angle 3$ – смежные, тогда: $\angle 2 + \angle 3 = 180^0 \rightarrow \angle 3 = 180^0 - \angle 2$.

4. Таким образом, получаем, что градусные меры углов 1 и 3 равны, следовательно, равны и сами углы.

Теорема доказана.



Опр. 1.3.13. *Биссектрисой* неразвернутого угла hk называется такой внутренний луч l этого угла, что $\angle hl = \angle lk$.

Опр. 1.3.14. Две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными*, если они образуют четыре прямых угла.

Теорема 1.3.7. Через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.

Площадь многоугольника

Рассмотрим один из подходов к определению площади фигуры на примере площади многоугольника.

Пусть дан многоугольник $F = A_1A_2...A_n$ и две точки M_1 и M_2, принадлежащие контуру многоугольника (рис. 1.3.2), например, $M_1 \in A_1A_2$, $M_2 \in A_mA_{m+1}$. Рассмотрим простую ломаную $L = M_1N_1N_2...N_kM_2$ с концами M_1 и M_2, все точки которой (кроме M_1 и M_2) являются внутренними точками многоугольника.

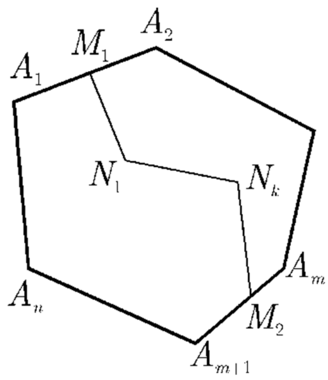


Рис. 1.3.2

Ломаная L разлагает многоугольник F на два многоугольника $F_1 = M_1A_2A_3...A_mM_2N_kN_{k-1}..N_1$ и $F_2 = M_1N_1...N_kM_2A_{m+1}A_{m+2}...A_nA_1$.

Введем на плоскости измерение отрезков, задав некоторый единичный отрезок EF.

Пусть каждому многоугольнику соответствует определённое действительное положительное число так, что:

1. Равным многоугольникам соответствует одно и тоже число.

2. Если простая ломанная L разлагает многоугольник F на два многоугольника F_1 и F_2, и многоугольникам F, F_1 и F_2, соответствуют числа a, b и c, то $a = b + c$.

3. Квадрату F_0, построенному на единичном отрезке EF как на стороне, соответствует число, равное единице [4, с. 92].

Опр. 1.3.15. Число, указанным образом соответствующее каждому простому многоугольнику F, называется его *площадью* и обозначается $S(F)$. Квадрат F_0 называется единичным квадратом.

Теорема 1.3.8. Если выбран единичный отрезок EF, то существует одно и только одно соответствие между множеством многоугольников и множеством действительных положительных чисел, для которого выполняются условия 1–3 измерения площадей.

Определение площади можно сформулировать так: «Площадь – численная характеристика, приписываемая плоским фигурам определенного класса и обладающая следующими свойствами: площадь неотрицательна, площадь аддитивна, площадь сохраняется при перемещениях, площадь единичного квадрата равна 1» [31].

Теорема 1.3.9. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

1. Пусть задан квадрат $ABCD$ и пусть стороны AB и AD квадрата $ABCD$ точками $P_1, P_2, ..., P_{n-1}$ и $Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}$ разделены на n равных частей (рис. 1.3.3).

2. Проведем через точки $P_1, P_2, ..., P_{n-1}$ прямые, перпендикулярные к прямой AB, тогда квадрат разлагается на n прямоугольников (это надо доказать). Далее проведем через точки $Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}$ прямые, перпендикулярные к прямой AD. Тогда каждый из этих прямоугольников разлагается на n квадратов. В результате квадрат разлагается на n^2 равных друг другу квадратов. Если площадь каждого из этих квадратов равна m, а площадь квадрата равна S, то согласно второму условию в определении: $S = n^2 \cdot m$.

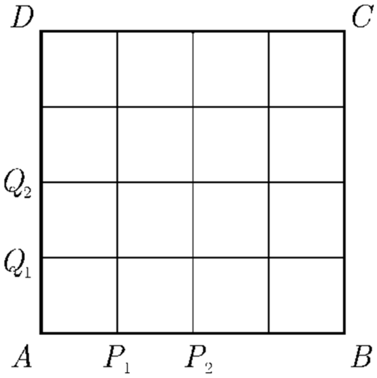


Рис. 1.3.3

3. Отсюда, в частности, следует, что если сторона квадрата $ABCD$ равна n $(n \in \mathrm{N}, n > 1)$, то квадраты, на которые разлагается этот квадрат, построены на единичном отрезке, поэтому $m = 1$ и, следовательно, $S = n^2$.

Теорема доказана.

Теорема 1.3.10. Площадь прямоугольника равна произведению длин смежных сторон.

Доказательство

1. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b и площадью S (рис. 1.3.4 *а*). Докажем, что $S = ab$.

2. Достроим прямоугольник до квадрата со стороной $a + b$, как показано на рис. 1.3.4 *б*. Площадь этого квадрата равна $(a+b)^2$.

3. С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника, равного ему прямоугольника и двух квадратов. Тогда, $(a+b)^2 = S + S + a^2 + b^2$, или $a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2$.

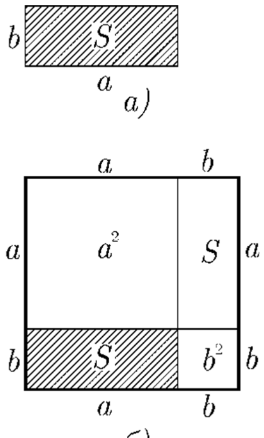


Рис. 1.3.4

Отсюда получаем: $S = ab$.

1.4. Преобразование плоскости[4]

Плоскость и каждую лежащую в ней фигуру будем рассматривать как множество точек. Преобразование плоскости определим, как специальный вид отображения точечных множеств [2].

Предварительные замечания. Пусть заданы два множества A и B.

Опр. 1.4.1. Если указано правило, по которому каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие определенный элемент $b \in B$, то говорят, что задано отображение f множество A в множество B. Элемент b называется образом элемента a при отображении f, а элемент a – прообразом элемента b.

Опр. 1.4.2. Если при отображении f множества A на множество B каждый элемент $b \in B$ является образом только одного элемента $a \in A$, то отображение f называется взаимно однозначным.

Опр. 1.4.3. Любое взаимно однозначное отображение f множества A на себя называется преобразованием этого множества.

Говорят, что преобразование плоскости сохраняет расстояние, если расстояние между двумя точками A и B плоскости равно расстоянию между их образами A_1 и B_1, т.е. $AB = A_1B_1$.

Опр. 1.4.4. Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками, называется *движением плоскости.*

Приведем определения основных видов движения.

Опр. 1.4.5. Точки M и M_1 называются *симметричными относительно данной точки* O, если точка O является серединой отрезка MM_1. Точка O считается симметричной сама себе. Преобразование плоскости, которое отображает каждую точку M на симметричную ей точку относительно данной точки O, называется *центральной симметрией* с центром O и обозначается $Z_0 : Z_0(M) = M_1$.

Фигура F и ее образ F_1 при центральной симметрии Z_0 называются симметричными фигурами относительно точки. Другими словами, фигура F называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки

---

[4] Преобразование плоскости вводится на основе понятия отображения, рассматриваемое в курсе математического анализа. Мы не будем давать строгое определение преобразованию плоскости и подробно раскрывать эту тему в настоящем пособии, введем лишь необходимые определения и утверждения.

O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется центром симметрии фигуры.

Пример 1.4.1. Центром симметрии окружности является центр окружности. Центром симметрии параллелограмма – точка пересечения его диагоналей.

Опр. 1.4.6. Точки M и M_1 называются *симметричными относительно заданной прямой* l, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку MM_1. Каждая точка прямой l симметрична сама себе. Преобразование плоскости, при котором каждая точка отображается на симметричную ей точку относительно данной прямой l, называется *осевой симметрией* с осью l и обозначается $S_l : S_l(M) = M_1$.

Фигура называется симметричной относительно прямой l, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой l также принадлежит этой фигуре. Прямая l называется осью симметрии фигуры. Говорят, также, что фигура обладает осевой симметрией.

Пример 1.4.2. У неразвернутого угла одна ось симметрии – прямая, на которой расположена биссектриса угла. Прямоугольник и ромб имеют по две оси симметрии, а квадрат – четыре оси симметрии. У окружности их бесконечно много – любая прямая, проходящая через ее центр, является осью симметрии.

Опр. 1.4.7. Переносом $T_{\vec{r}}$ плоскости на заданный вектор $\vec{r}$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M_1, что $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}$.

Опр. 1.4.8. *Поворотом* плоскости около данной точки O на заданный ориентированный угол величины α называется преобразование плоскости, которое точку O отображает на себя, а всякую другую точку M отображает на такую точку M_1, что $OM_1 = OM$ и ориентированный угол MOM_1 имеет величину α. Точка O называется *центром поворота*, а величина α – углом поворота. Число α считается положительным, если угол MOM_1 ориентирован против движения часовой стрелки, и отрицательным – в противном случае. Поворот с центром O на угол α обозначают R_O^{α}.

Опр. 1.4.9. Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ плоскости называется преобразование плоскости, которое каждую точку X отображает на такую точку X_1, что $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$.

Гомотетия с центром O коэффициентом k обозначается $H_O^k : H_O^k(X) = X_1$.

Опр. 1.4.10. Преобразование плоскости называется преобразованием *подобия*, если для любых двух точек A и B и их образов A_1 и B_1 при этом преобразовании выполняется равенство $A_1B_1 = k \cdot AB$, где k – постоянное (положительное) число, называемое коэффициентом подобия.

Теорема 1.4.1. *О задании движения плоскости.* Пусть заданы три неколлинеарные точки A, B, C и три точки A_1, B_1, C_1 такие, что $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1A_1 = CA$. Тогда существует и только одно движение плоскости, которое отображает точку A на точку A_1, точку B на точку B_1 и точку C на точку C_1 [38, с. 157].

Говорят, что $\triangle ABC$ ориентирован положительно, если обход по контуру треугольника от вершины A к вершине B и затем к вершине C совершается против движения часовой стрелки. Если же этот обход совершается по движению часовой стрелки, то говорят, что $\triangle ABC$ ориентирован отрицательно. Ориентация треугольника зависит только от порядка записи его вершин: если $\triangle ABC$ ориентирован положительно, то $\triangle BAC$ ориентирован отрицательно.

Классификацию движений плоскости можно иллюстрировать такой схемой на рис. 1.4.1 [38, с. 188].

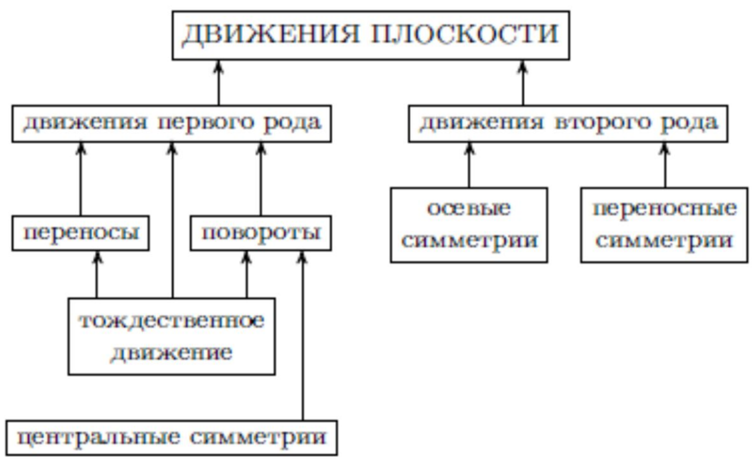


Рис. 1.4.1

Задания для практических занятий

Познакомьтесь с теоретическим материалом и примерами задач с решениями. Рекомендуемая литература: [1, 2, 4, 13, 26, 41, 47].

Теоретические задания в мини-группах

Задание 1.1. Подготовить доклад об истории развития планиметрии.

Задание 1.2. Сделать сравнительную характеристику аксиоматик.

Задание 1.3. Доказать свойства наложения.

Задание 1.4. Найти и выписать различные определения понятия величины. Сформулировать и доказать свойства длины отрезка, градусной меры величины угла, площади фигуры.

Задание 1.5. Представить анализ различных подходов к измерению геометрических величин в разных странах.

Практические задания

Задание 1.6. Доказать следующие математические утверждения

1.6.1. На любом отрезке существует хотя бы одна точка.

1.6.2. Доказать, что отрезок, луч, полуплоскость содержат бесконечное множество точек.

1.6.3. Если при пересечении двух прямых один из образовавшихся углов прямой, то остальные три угла тоже прямые.

1.6.4. Если один из смежных углов острый, то второй – тупой.

1.6.5. Две прямые, перпендикулярные третьей не пересекаются.

1.6.6. Если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

Задание 1.7. Ответить на вопросы, обосновав свой ответ

1.7.1. Могут ли семь прямых попарно пересекаться в: а) семи точках, б) в восьми точках?

1.7.2. В плоскости даны четыре точки, не лежащие по три на одной прямой. Где располагается точка, для которой сумма расстояний от четырех данных точек наименьшая?

1.7.3. Как доказать, что два многоугольника равны?

1.7.4. Может ли прямая, не проходящая через вершины простой замкнутой ломаной, пересекать ее стороны в нечетном числе точек?

1.7.5. На сколько градусов поворачивается за минуту минутная стрелка? Часовая стрелка?

1.7.6. Какой угол образует минутная и часовая стрелка в 3 часа 5 минут?

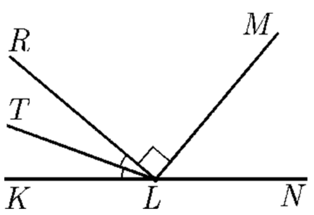
1.7.7. Сколько раз в течении суток часовая и минутная стрелка совпадают? Образуют развернутый угол? Образуют прямой угол?

1.7.8. В деревне у прямой дороги стоят четыре избы A, B, C и D на расстоянии 50 метров друг от друга. В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до всех четырех изб была бы наименьшей?

1.7.9. На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка, сумма которых равна 28 см; конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго – серединой третьего. Можно ли найти длины этих отрезков?

1.7.10. Можно ли нарисовать открытый конверт, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя более одного раза никакой линии? А закрытый конверт?

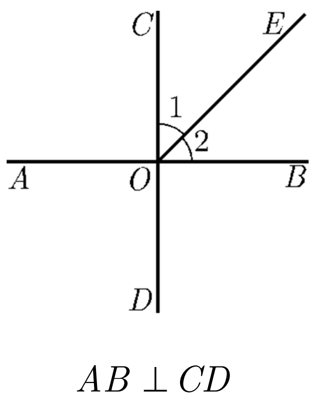
Задание 8. Решить задачи «на готовых чертежах»



$\angle KLR = 40^0$

$\angle TLN - ?$

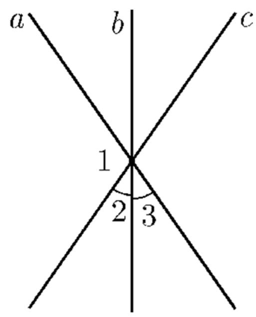
Рис. 1.8.1



$AB \perp CD$

$\angle AOE - ?$

Рис. 1.8.2



$\angle 1 - \angle 2 = 75^0$

$\angle 1, \angle 2, \angle 3 - ?$

Рис. 1.8.3

1.8.2. Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 1.8.4). Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

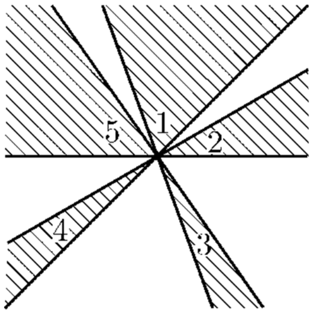


Рис. 1.8.4

1.8.3. Какая часть площади фигур, изображенных на рис. 1.8.5, закрашена?

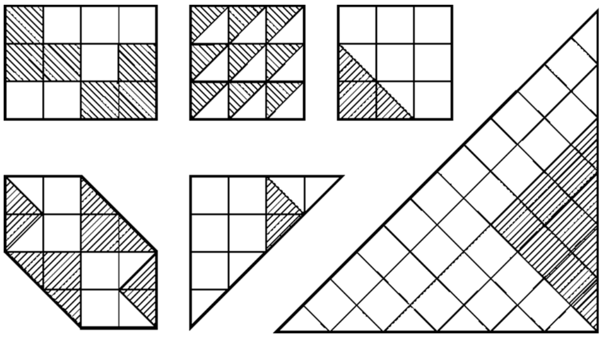


Рис. 1.8.5

1.8.4. Через точку внутри квадрата проведены прямые по сторонам и диагоналям клеток (рис. 1.8.6). Докажите, что сумма площадей закрашенных частей равна сумме площадей незакрашенных частей.

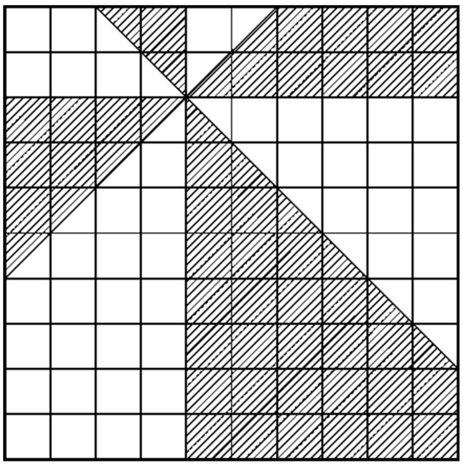


Рис. 1.8.6

Задание 9. Задачи на разрезание и складывание фигур

1.9.1. Как разрезать прямоугольник, длина которого 16 см, а ширина 9 см, на две равные части, из которых можно составить квадрат?

1.9.2. Можно ли разрезать треугольник так, чтобы получилось три четырехугольника?

1.9.3. Сколько существует способов разрезания квадрата со стороной в четыре клетки: а) на две равные части линиями, идущими по сторонам маленьких квадратов: б) на четыре равные части?

1.9.4. Разрежьте каждую из фигур, изображенных на рис. 1.8.7 на четыре равные части.

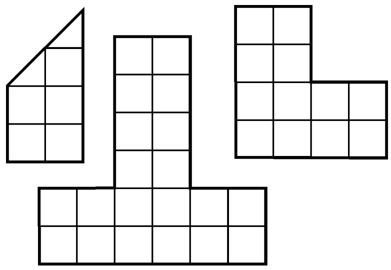


Рис. 1.8.7

Задание 10. Выполните задания повышенного уровня сложности

1.10.1. Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов, на три многоугольника, равных по площади и периметру.

1.10.2. У краснодеревщика имеется кусок шахматной доски 7x7 клеток из драгоценного красного дерева. Он хочет, не теряя материала и проводя разрезы только по краям клеток, распилить доску на 6 частей так, чтобы из них сделать три новых квадрата, все разных размера. Как это сделать?

1.10.3. Можно ли провести в выпуклом шестиугольнике несколько диагоналей так, чтобы каждая из них пересекала во внутренних точках ровно три другие?

РАЗДЕЛ 2. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Предварительные замечания. *Треугольником* называется геометрическая фигура, состоящая из трех отрезков, попарно соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой.

Опр. 2.1.1. Треугольник называется *равносторонним*, если все его стороны равны.

Опр. 2.1.2. Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона – основанием.

Опр. 2.1.3. Треугольник называется *остроугольным*, если все его углы острые.

Опр. 2.1.4. Треугольник называется *прямоугольным*, если один из его углов прямой.

Опр. 2.1.5. Треугольник называется *тупоугольным*, если один из его углов тупой.

Опр. 2.1.6. *Внешним углом треугольника* называется угол, смежный с углом треугольника.

Опр. 2.1.7. *Медианой треугольника* называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной высоты.

Опр. 2.1.8. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

Опр. 2.1.9. *Высотой треугольника* называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

Каждый треугольник имеет три медианы, три биссектрисы, три высоты.

Опр. 2.1.10. *Симедианой* называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы внутреннего угла при вершине треугольника.

Опр. 2.1.11. *Антибиссектриса* угла треугольника – геометрическое место точек внутри угла, расстояния которых до двух сторон угла обратно пропорциональны квадратам этих сторон (луч с началом в вершине угла, делящий угол на два угла).

2.1. Признаки равенства треугольников

По общему определению равенства фигур треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ называются *равными*, если существует наложение $f: \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$, при котором каждая сторона треугольника $\triangle ABC$ отображается на какую-нибудь сторону треугольника $\triangle A'B'C'$, так что каждая вершина первого треугольника переходит в какую-нибудь вершину второго [4, с. 27][5].

Будем говорить, что два треугольника *равны*, если стороны одного треугольника соответственно равны сторонам другого и углы, заключенные между соответственно равными сторонами, равны [45].

Теорема 2.1.1. *Первый признак равенства треугольников.* Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

1. Рассмотрим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, углы A и A_1 равны (рис. 2.1.1).

Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2. Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC$ можно наложить на $\triangle A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC – со стороной A_1C_1. В частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1.

3. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны.

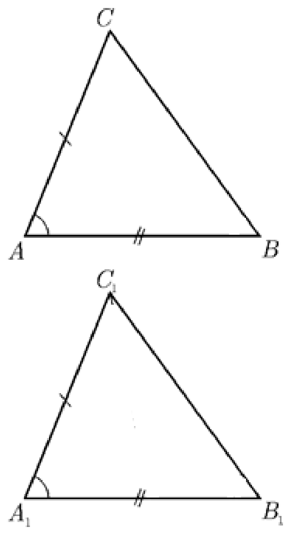


Рис. 2.1.1

Теорема доказана.

[5] Более грамотно было бы называть фигуры, совпадающие при совмещении, конгруэнтными и использовать для записи конгруэнтности не знак равенства «=», а специальный знак «$\cong$». Однако будем придерживаться терминологии школьных учебников и использовать знак «=».

Теорема 2.1.2. *Второй признак равенства треугольников.* Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

1. Рассмотрим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2. Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB – с равной ей стороной A_1B_1, и вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой AB.

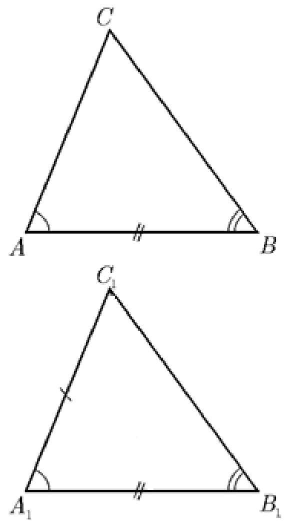


Рис. 2.1.2

3. Так как $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1, а сторона BC – на луч B_1C_1. Поэтому вершина C – общая точка сторон AC и BC – окажется лежащей как на луче A_1C_1, так и на луче B_1C_1, и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей – вершиной C_1. Значит, совместятся стороны с общей точкой этих лучей – вершиной C_1. Значит, совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

4. Итак, треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны.

Теорема доказана.

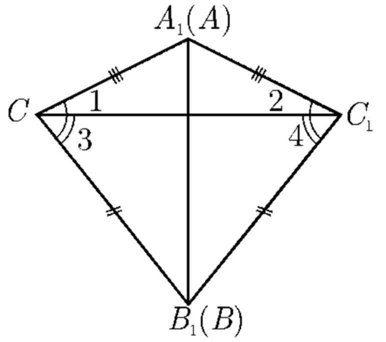
Теорема 2.1.3. *Третий признак равенства треугольников.* Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны [3].

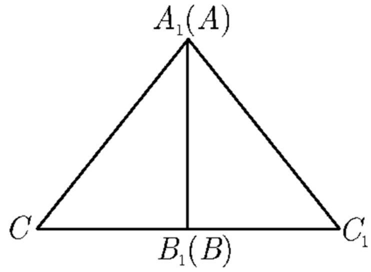
Доказательство

1. Рассмотрим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2. Приложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B совместилась с вершиной B_1, а вершина C и C_1 оказались по разные стороны от прямой A_1B_1.

Возможны три случая:





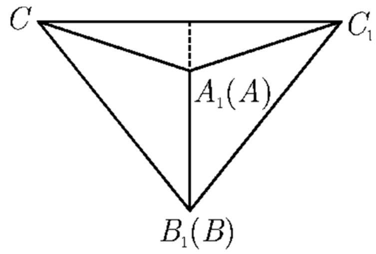


Рис. 2.1.3 *с*)

Рис. 2.1.3 *б*)

Рис. 2.1.3 *а*)

– луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 2.1.3 *а*);

– луч C_1C совпадает с одной из сторон этого угла (рис. 2.1.3 *б*);

– луч C_1C проходит вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 2.1.3 *с*).

3. *Рассмотрим первый случай*[6]. Так как по условию теоремы стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 равны, то треугольники A_1C_1C и B_1C_1C – равнобедренные. По теореме 2.2.1 о свойстве углов равнобедренного треугольника $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$. Итак, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.

4. Следовательно, треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников.

Теорема доказана.

Лемма 2.1.1. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним[7].

Теорема 2.1.4. *Четвертый признак равенства треугольников.* Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника и сторона первого треугольника, противолежащая одному из этих углов, равна соответствующей стороне второго треугольника, то такие треугольники равны [4, с. 33].

Доказательство

1. Рассмотрим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 2.1.4). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

---

[6] Остальные случаи рекомендуем читателю рассмотреть самостоятельно.

[7] Задача 2.6.2.

Для этого достаточно доказать, что $AB=A_1B_1$.

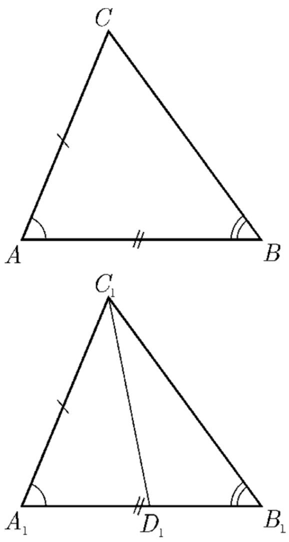


Рис. 2.1.4

2. Доказательство этого равенства проведем методом от противного, т.е. допустим, что эти отрезки не равны. Пусть, например, $AB < A_1B_1$.

Тогда на отрезке A_1B_1. существует такая точка D_1, что $AB=A_1D_1$.

3. По первому признаку равенства треугольников, следует, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1D_1$, поэтому $\angle B = \angle A_1D_1C_1$. Но, по условию теоремы $\angle B = \angle A_1B_1C_1$, следовательно, $\angle A_1D_1C_1 = \angle A_1B_1C_1$. Мы пришли к выводу, что в $\triangle B_1C_1D_1$ внешний угол при вершине D_1 равен углу B_1.

4. Это противоречит лемме 2.1.1 о внешнем угле треугольника.

5. Итак, $AB = A_1B_1$ и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку.

Теорема доказана.

Теорема 2.1.5. *Пятый признак равенства треугольников.* Если две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, при этом сторона, противолежащая углу, не меньше второй из данных сторон, то такие треугольники равны.

Теорема 2.1.6. *Шестой признак равенства треугольников.* Два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведенные из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведенным из концов этой стороны, другого треугольника.

Доказательство

1. Рассмотрим остроугольные треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $AH=A_1H_1$, $BK=B_1K_1$, где AH, A_1H_1, BK, B_1K_1 – высоты треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 2.1.5).

Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2. Рассмотрим прямоугольные $\triangle ABK$ и $\triangle A_1B_1K_1$. Они равны по пятому признаку равенства треугольников. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$.

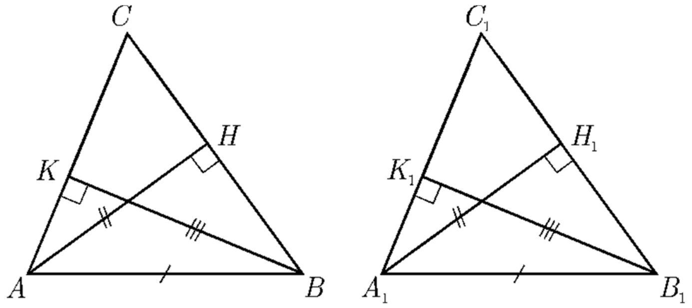


Рис. 2.1.5

Аналогично, из равенства, прямоугольных $\triangle ABH$ и $\triangle A_1B_1H_1$ следует, что $\angle B = \angle B_1$.

3. Итак, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, поэтому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку равенства треугольников.

Теорема доказана.

Теорема 2.1.7. *Седьмой признак равенства треугольников.* Если две стороны и медиана, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соотвественно равны двум сторонам и медиане, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 2.1.8. *Восьмой признак равенства треугольников.* Если две стороны и биссектриса, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соотвественно равны двум сторонам и биссектрисе, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 2.1.9. *Девятый признак равенства треугольников.* Если сторона, прилежащий к ней угол и высота, проведенная к этой стороне, одного треугольника соотвественно равны стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Следствие 2.1.1. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов лежат равные стороны.

2.2. Равнобедренный треугольник

Теорема 2.2.1. *Признаки и свойства равнобедренного треугольника.* Треугольник равнобедренный тогда и только тогда, когда: 1) углы при основании равны; 2) биссектриса, высота и медиана, проведенные к основанию, совпадают [4, с. 37].

Доказательство

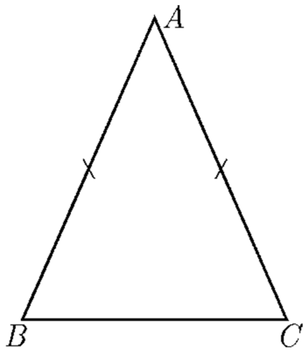


Рис. 2.2.1

1. Пусть $\triangle ABC$ – равнобедренный, с основанием BC. Докажем, что $\angle B = \angle C$.

Рассмотрим $\triangle BAC$ и $\triangle CAB$ (рис. 2.2.1). По условию $BA=CA$, $AC=AB$, по аксиоме равенства фигур[8] следует, что $\angle BAC = \angle CAB$. Следовательно, по первому признаку равенства треугольников $\triangle BAC = \triangle CAB$. Отсюда и следует, что $\angle B = \angle C$.

2. Докажем теперь обратное утверждение. Допустим, что в треугольнике $\angle B = \angle C$ и докажем, что $AB=AC$.

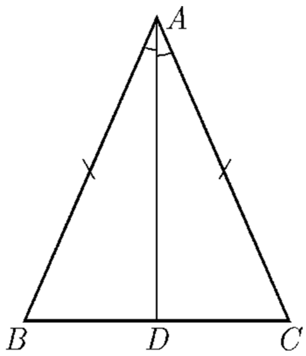


Рис. 2.2.2

Рассмотрим $\triangle BAC$ и $\triangle CAB$. По условию $\angle B = \angle C$, $\angle C = \angle B$, а по аксиоме равенства фигур следует, что $BC=CB$. Следовательно, по второму признаку равенства треугольников $\triangle BAC = \triangle CAB$. Отсюда и следует, что $AB=AC$.

2. Пусть $\triangle ABC$ – равнобедренный, с основанием BC (рис. 2.2.2). Докажем, что $\angle B = \angle C$. AD, AM, AH – соответственно биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию.

3. Докажем, что отрезки AD, AM, AH совпадают.

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$: $\angle BAD = \angle DAC$, $AB = BC$, AD – общая. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ACD$ по первому признаку. Отсюда следует, что $BD = DC$, $\angle BDA = \angle ADC = 90^0$. Следовательно, по определению AD – медиана, AD – высота.

4. Докажем обратное, если в треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведенные к основанию, совпадают, то треугольник равнобедренный.

---

[8] Каждая фигура равна сама себе.

Пусть AD и AH совпадают (рис. 2.2.3). Тогда $\triangle ABD = \triangle ACD$ по второму признаку равенства треугольников. Поэтому $AB=AC$.

Пусть AM и AH совпадают. Тогда $\triangle ABM = \triangle ACM$ по первому признаку равенства треугольников.

Поэтому $AB=AC$.

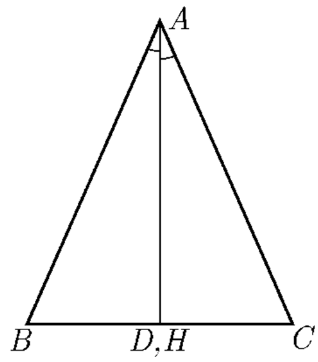


Рис. 2.2.3

5. Пусть AD и AM совпадают (рис. 2.2.4). На продолжении луча MA возьмем точку E такую, что $AM=ME$ и соединим ее отрезком с B. Тогда $\triangle AMC = \triangle EMB$ по первому признаку равенства треугольников.

6. Поэтому $AB=AC$. Поэтому $AC=BE$ и $\angle MAC = \angle MEB$. Но $\angle MAC = \angle MAB$, следовательно, $\angle MAB = \angle MEB$.

7. Отсюда следует, что треугольник ABE – равнобедренный, т.е. $AB=BE$. Так как $BE=AC$, то $AB=AC$.

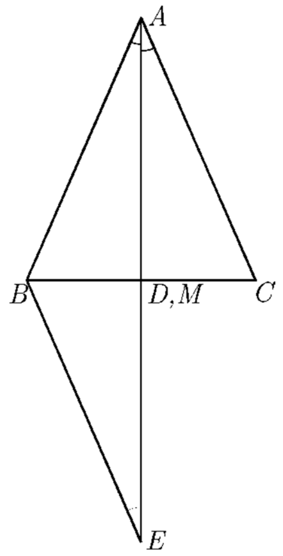


Рис. 2.2.4

Теорема доказана.

Теорема 2.2.2. У равнобедренного треугольника медианы, проведенные к боковым сторонам равны; биссектрисы, проведенные к боковым сторонам равны; высоты, проведенные к боковым сторонам равны.

Доказательство

1. Пусть $\triangle ABC$ – равнобедренный и $AB = BC$ и AA_1, CC_1 – медианы, проведенные к боковым сторонам.

2. Рассмотрим $\triangle AA_1C, \triangle AC_1C$: AC – общая, $\angle C_1AC = \angle A_1CA$ по свойству равнобедренного треугольника, $AC_1 = A_1C$ – как половины равных сторон. Таким образом $\triangle AA_1C = \triangle AC_1C$ по первому признаку.

Из равенства треугольников следует $AA_1 = CC_1$.

3. Случай биссектрис и медиан представляем читателю доказать самостоятельно.

2.3. Прямоугольные треугольники

Во многих задачах удобнее использовать признаки равенства прямоугольных треугольников.

На рис. 2.3.1 *а*) изображен прямоугольный треугольник, на котором отмечены гипотенуза, катеты и острый угол.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника на рис. 2.3.2 *б*).

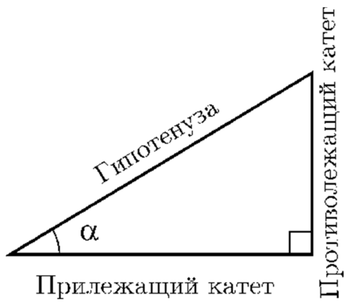


Рис. 2.3.1

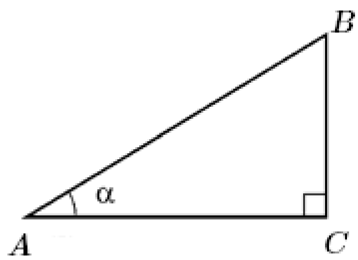


Рис. 2.3.2 *а*)

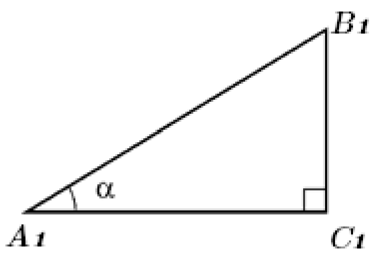


Рис. 2.3.2 *б*)

Теорема 2.3.1. *Признаки равенства прямоугольных треугольников.*

Признак 1: если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Признак 2: если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Признак 3: если гипотенуза и прилежащий к ней угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и прилежащему углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признак 4: если катет и противолежащий угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

Признак 5: если катет и гипотенуза одного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого треугольника, такие прямоугольные треугольники равны [4, с. 40].

Доказательство следует из признаков равенства треугольников[9].

Теорема 2.3.2. Катет прямоугольного треугольника, противолежащий углу в 30°, будет равняться половине гипотенузы.

Доказательство

1. Пусть задан прямоугольный $\triangle ADB: \angle D = 90^0, \angle A = 30^0, \angle B = 60^0$ (рис. 2.3.3).

2. Продлим катет BD за вершину прямого угла D и начертим отрезок DC, причем части равные $BD = DC$. Соедим точки A и C.

3. Построенные прямоугольные $\triangle ADB$ и $\triangle ADC$ равны по первому признаку. Следовательно, $\angle B = \angle C = 60^0$.

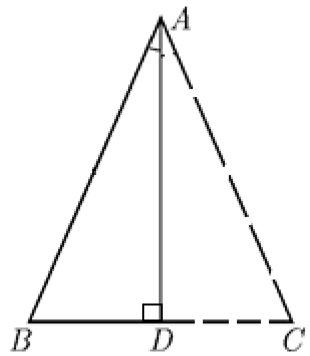


Рис. 2.3.3

4. Таким образом, $\triangle ABC$ – равносторонний. Сторона $AB = BC = 2BD$, а значит и катет BD будет равен половине гипотенузы AB.

Теорема доказана.

Теорема 2.3.3. *Теорема Пифагора.* Квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме длин квадратов катетов.

Доказательство

1. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$ так, как показано на рис. 2.3.4. Площадь этого квадрата равна $(a+b)^2$.

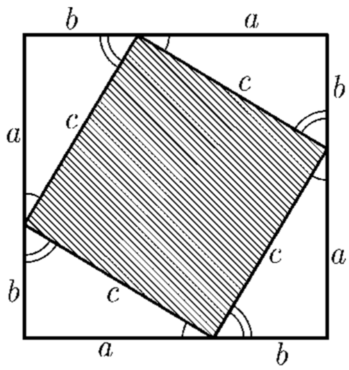


Рис. 2.3.4

3. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной с поэтому $S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2$.

[9] Рекомендуем читателю провести доказательство каждого признака самостоятельно.

4. Таким образом, $(a+b)^2 = 2ab + c^2$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

Теорема доказана.

Теорема 2.3.4. *Теорема, обратная теореме Пифагора.* Если квадрат длины одной стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Доказательство

1. Пусть в $\triangle ABC$ известно, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Докажем, что $\angle C$ – прямой.

2. Рассмотрим некоторый прямоугольный треугольник $\triangle A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, у которого $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$. По теореме Пифагора $A_1B_1^{\ 2} = A_1C_1^{\ 2} + B_1C_1^{\ 2}$, и значит, $A_1B_1^{\ 2} = AC^2 + BC^2$. Но $AC^2 + BC^2 = AB^2$ по условию.

3. Следовательно, $A_1B_1^{\ 2} = AB^2$, откуда $A_1B_1 = AB$.

Треугольники $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам, следовательно $\angle C = \angle C_1$, т.е. $\triangle ABC$ прямоугольный с прямым углом C.

Теорема доказана.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC : \angle A = \alpha, \angle B = \beta$ (рис. 2.3.5).

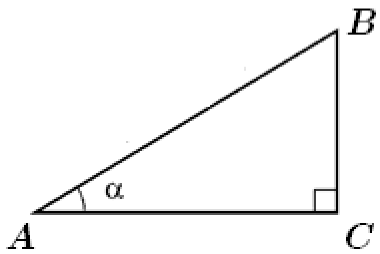


Рис. 2.3.5

Опр. 2.3.1. *Синусом острого угла* в прямоугольном треугольнике называют отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$, $\sin\beta = \dfrac{AC}{AB}$.

Опр. 2.3.2. *Косинусом острого угла* в прямоугольном треугольнике называют отношение прилежащего угла к гипотенузе: $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, $\cos\beta = \dfrac{BC}{AB}$.

Опр. 2.3.3. *Тангенсом острого угла* в прямоугольном треугольнике называют отношение противолежащего катета к прилежащему катету: $tg\alpha = \dfrac{BC}{AC}$, $tg\beta = \dfrac{AC}{BC}$.

Опр. 2.3.4. *Котангенсом острого угла* в прямоугольном треугольнике называют отношение прилежащего катета к противолежащему катету: $ctg\alpha = \dfrac{AC}{BC}$, $ctg\beta = \dfrac{BC}{AC}$.

Теорема 2.3.5. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.

Доказательство

1. Пусть CH – высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу AB (рис. 2.3.6).

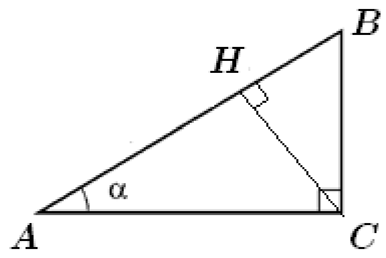


Рис. 2.3.6

Тогда в прямоугольных треугольниках

$\vartriangle ABC: \ \cos\angle A = \dfrac{AC}{AB}$;

$\vartriangle AHC: \ \cos\angle A = \dfrac{AH}{AC}$,

а так как косинус острого угла прямоугольного треугольника зависит только от градусной меры угла, то $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{AC}$, откуда $AC^2 = AH \cdot AB$.

Аналогично, доказывается, что $BC^2 = BH \cdot AB$.

2. Рассмотрим $\vartriangle ACH : \angle CAH + \angle ACH = 90^0$.

$\vartriangle ABC : \angle HCB + \angle ACH = 90^0$. Отсюда следует, что $\angle CAB = \angle HCB$.

3. Рассмотрим $\vartriangle ACH : tg\angle CAB = \dfrac{CH}{AH}$, и $\vartriangle CHB : tg\angle BCH = \dfrac{BH}{HC}$.

4. Так как $\angle CAB = \angle HCB$ и тангенс острого угла прямоугольного треугольника зависит только от градусной меры угла, то $\dfrac{CH}{AH} = \dfrac{BH}{HC}$, откуда $CH^2 = AH \cdot BH$.

Теорема доказана.

Теорема 2.3.6. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит гипотенузу в таком отношении, в каком находятся квадраты прилежащих катетов.

Указание: Пусть задан прямоугольный $\vartriangle ABC$ (рис. 2.3.6), CH – высота, тогда теорема гласит, что $\dfrac{BH}{HA} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$

Утверждение. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине[10].

[10] Доказательство приведено в теореме 2.6.6.

2.4. Подобие треугольников

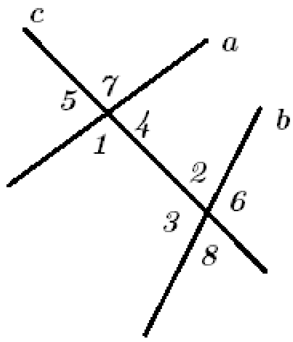


Рис. 2.4.1

Опр. 2.4.1. Если какие-нибудь две прямые a и b пересечены третьей прямой c, то образованные при этом углы имеют следующие названия (рис. 2.4.1):

1) соответственные углы: 3 и 5, 2 и 7, 1 и 8, 4 и 6;

2) внутренние накрест лежащие: 1 и 2, 4 и 3; внешние накрест лежащие: 7 и 8, 5 и 6;

3) внутренние односторонние: 1 и 3, 4 и 2; внешние односторонние: 5 и 8, 7 и 6.

Напомним, что под параллельными прямыми мы понимаем прямые, которые не пересекаются.

Теорема 2.4.1. ***Свойства и признаки параллельных прямых.***

1. Две прямые, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой.

2. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

3. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда при пересечении этих двух прямых третьей прямой выполняется хотя бы одно из условий:

а) внутренние накрест лежащие углы равны;

б) соответственные углы равны;

в) сумма односторонних углов равна 180^0.

Доказательство

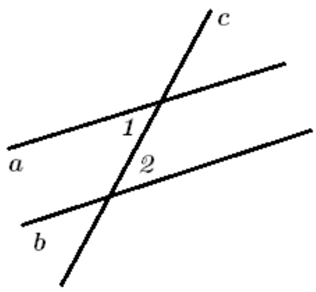


Рис. 2.4.2 *а*)

а) Докажем признак параллельности двух прямых: если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны[11].

1. Рассмотрим две прямые a и b. Пусть прямая c пересекает эти прямые в точках A и B. В

[11] Остальные пункты теоремы рекомендуем читателю доказать самостоятельно.

результате пересечения прямых образуются накрест лежащие углы $\angle 1$ и $\angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$ (рис. 2.4.2 *а*).

2. В случае, если $\angle 1 = \angle 2 = 90^0$, то $a \perp c, b \perp c$. По второму свойству, $a \parallel b$.

3. Рассмотрим случай, когда углы $\angle 1$ и $\angle 2$ не прямые. Пусть точка O – середина AB.

4. Из точки O проведем перпендикуляр OH к прямой *a*. На прямой B отложим отрезок BH_1, равный отрезку AH (рис. 2.4.2 *б*).

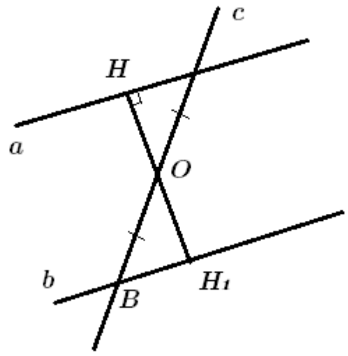


Рис. 2.4.2 *б*)

5. Проведем OH_1 и докажем, что $\triangle OHA = \triangle OH_1A$. Действительно, $AH = H_1B$ и $OA = OB$ – по построению, $\angle 1 = \angle 2$ – по условию. По первому признаку равенства треугольников $\triangle OHA = \triangle OH_1A$.

6. Следовательно, $\angle OHA = \angle OH_1A$. По второму свойству теоремы 2.4.1 $a \parallel b$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.2. *Теорема Фалеса.* Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла[12].

Теорема 2.4.3. *О пропорциональных отрезках.* Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от его сторон пропорциональные отрезки.

Доказательство

1. Рассмотрим $\angle BOD$. Пусть прямые $AC \parallel BD$ (рис. 2.4.3 *а*). Докажем, то $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD}$.

2. Предположим противное, что равенство не выполнено. Пусть, например, $\dfrac{OA}{OB} < \dfrac{OC}{OD}$, т.е. $OC > \dfrac{OA \cdot OD}{OB}$.

Отложим на луче OD отрезок $OE = \dfrac{OA \cdot OD}{OB}$ (рис. 2.4.3 *б*).

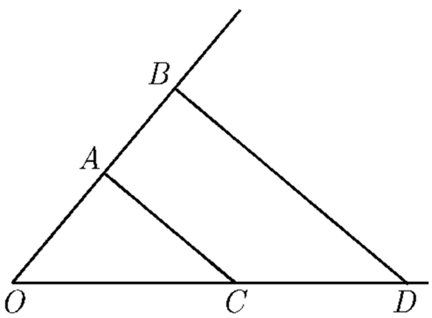


Рис. 2.4.3 *а*)

[12] Доказательство приведено в п.3.2.

3. Точка E лежит между O и C, т.к. $OE < OC$.

4. Возьмем натуральное n и разобьем отрезок OD на n равных отрезков. Пусть длина одного отрезка равна y, тогда $OD = ny$.

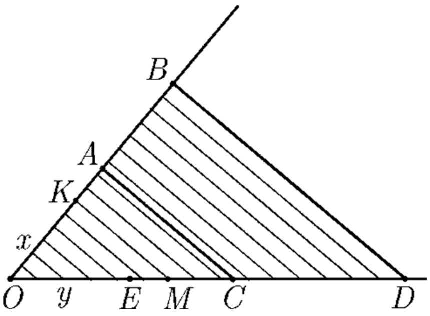


Рис. 2.4.3 *б)*

5. Обозначим x длину каждого из полученных отрезков, тогда $OB = nx$.

6. При достаточно большом n внутри отрезка EC найдутся точки разбиения отрезка OD. Пусть M – такая точка и $OM = my$. Соответствующая прямая пересекает OB в точке K, тогда $OK = mx$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{OM}{OD} = \frac{my}{ny} = \frac{m}{n} \\ \frac{OK}{OB} = \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n} \end{aligned}\right\} \to \frac{OM}{OD} = \frac{OK}{OB}.$$

7. Поскольку, $OE < OM$ и $OK < OA$, получаем: $\dfrac{OE}{OD} < \dfrac{OM}{OD} = \dfrac{OK}{OB} < \dfrac{OA}{OB}$, откуда $OE < \dfrac{OA \cdot OD}{OB}$. Получили противоречие с выбором точки E.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Опр.2.4.2. Два треугольника называются ***подобными***, если их углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны. Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется *коэффициентом подобия*. Обозначение:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$$

$$(\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1) \wedge \left(\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k \right).$$

Теорема 2.4.4. *Первый признак подобия треугольников.* Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого [45].

Доказательство

1. Пусть в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$. Тогда $\angle C = \angle C_1$.

Докажем, что $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

Отложим на AB отрезок $AB' = A_1B_1$, и проведем прямую $B'C' \parallel BC$ (рис. 2.4.4) Заметим, что $\triangle AB'C' = \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку равенства треугольников.

2. По теореме о пропорциональных отрезках имеет место равенство $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'}$, и, следовательно, имеем равенство $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

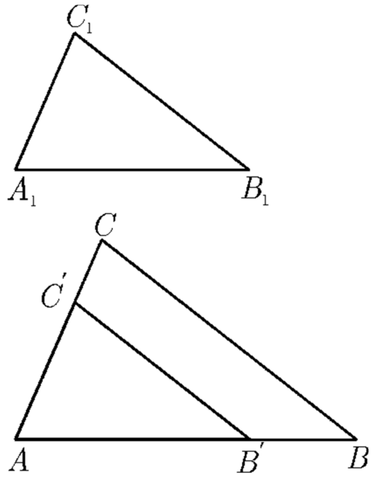


Рис. 2.4.4

Теорема доказана.

Теорема 2.4.5. *Второй признак подобия треугольников.* Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, и углы, лежащие между ними, равны [45].

Доказательство

1. Пусть в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ выполняются равенства $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ $\angle A = \angle A_1$. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

2. Отложим на AB отрезок $AB' = A_1B_1$, и проведем прямую $B'C' \parallel BC$. Заметим, что $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ по первому признаку подобия треугольников, и имеет место равенство $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'}$. Из этого равенства и равенства $AB' = A_1B_1$ следует равенство $AC' = A_1C_1$. Значит $\triangle AB'C' = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.6. *Третий признак подобия треугольников.* Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

Доказательство

1. Пусть в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ стороны пропорциональны $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$.

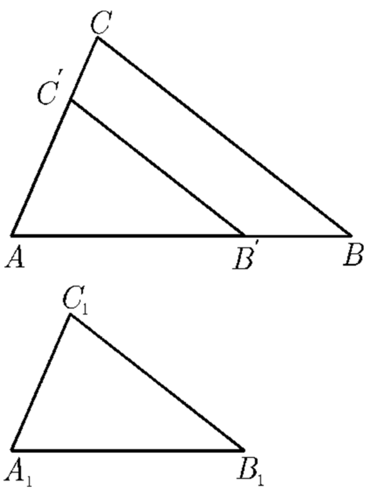


Рис. 2.4.5

Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

2. Отложим на AB отрезок $AB' = A_1B_1$, и проведем прямую $B'C' \parallel BC$ (рис. 2.4.5). Заметим, что $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ по первому признаку подобия треугольников, и имеет место равенство $\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{BC}{B'C'}$. Из равенства $A_1B_1 = AB'$ следуют равенства $\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{AC}{AC'}, \dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

3. Значит, имеем равенства $A_1C_1 = AC', B_1C_1 = B'C'$. Таким образом, $\triangle AB'C' = \triangle A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников.

4. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.7. *Признаки подобия прямоугольных треугольников.* Два прямоугольных треугольника подобны:

1) если они содержат по равному острому углу;

2) если катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого треугольника;

3) если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника.

Доказательство

Два первых признака сразу следуют соответственно из первого и второго признаков подобия треугольников, поскольку прямые углы равны. Третий признак следует из второго признака и теоремы Пифагора.

Теорема 2.4.8. Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Доказательство

1. Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия k.

2. Тогда $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k,$ откуда $AB = k \cdot A_1B_1,$ $BC = k \cdot B_1C_1,$ $AC = k \cdot A_1C_1.$ Обозначим P – периметр $\triangle ABC$, а P_1 – периметр подобного ему $\triangle A_1B_1C_1$. Имеем: $P = AB + BC + AC = k \cdot A_1B_1 + k \cdot B_1C_1 + k \cdot A_1C_1 = k \cdot P_1,$

т.е. $\dfrac{P}{P_1} = k.$ *Теорема доказана.*

Теорема 2.4.9. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных треугольника.

Доказательство

1. Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$ с прямым углом $\angle C$. Пусть CE – высота, проведенная к гипотенузе (рис. 2.4.6).

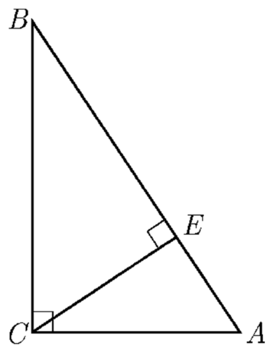


Рис. 2.4.6

2. Рассмотрим прямоугольные $\triangle ACB$ и $\triangle CEB$: $\angle C = \angle E = 90^0$, $\angle B$ – общий. Следовательно, $\triangle ACB \sim \triangle CEB$.

3. Рассмотрим прямоугольные $\triangle ACB$ и $\triangle CEA$: $\angle C = \angle E = 90^0$, $\angle A$ – общий. Следовательно, $\triangle ACB \sim \triangle CEA$.

4. Из того, что $\triangle ACB \sim \triangle CEB$ и $\triangle ACB \sim \triangle CEA$ следует, что $\triangle CEB \sim \triangle CEA$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.10. В любом треугольнике отрезок, соединяющий основания двух высот треугольника, отсекает треугольник подобный данному с коэффициентом подобия $|\cos A|$.

Доказательство

1. Рассмотрим $\triangle AC_1C$ и $\triangle AB_1B$: $\angle A$ – общий, $\angle AC_1C = \angle AB_1B = 90^0$ (рис. 2.4.7).

2. Следовательно, $\triangle AC_1C \sim \triangle AB_1B$ по первому признаку подобия треугольников. Из подобия следует $\dfrac{AC_1}{AB_1} = \dfrac{AC}{AB}$.

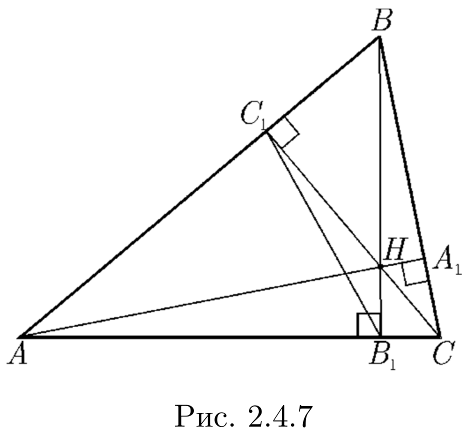


Рис. 2.4.7

При этом $AC_1 = AC \cdot \cos\angle A$.

3. Рассмотрим $\triangle AC_1B_1$ и $\triangle ABC$:

$\angle A$ – общий, $\dfrac{AC_1}{AB_1} = \dfrac{AC}{AB}$.

4. Следовательно, $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle ABC$ по второму признаку подобия треугольников.

5. Найдем коэффициент подобия. Рассмотрим отношение:

$\dfrac{AC_1}{AB_1} = \dfrac{AC}{AB} \leftrightarrow \dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{AB_1}{AB}$. Найдем отношение $\dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{AC \cdot \cos\angle A}{AC} = \cos\angle A$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.11. *Признаки подобия равнобедренных треугольников.* Справедливы следующие утверждения.

1⁰. Если угол между боковыми сторонами одного равнобедренного треугольника равен углу между боковыми сторонами другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники подобны.

2⁰. Если угол между основанием и боковой стороной одного равнобедренного треугольника равен углу между основанием и боковой стороной другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники подобны.

3⁰. Если основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника пропорциональны основанию и боковой стороной другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство легко следует из признаков подобия произвольных треугольников.

Теорема 2.4.12. Правильные треугольники подобны.

Подобие равносторонних треугольников следует из того, что у них все углы равны.

2.5. Соотношения в треугольнике

Теорема 2.5.1. *Неравенство треугольника.* Сумма двух любых сторон треугольника больше третьей стороны.

Доказательство

1. Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$. На продолжении стороны AC $\triangle ABC$ за вершину C отложим отрезок CD, равный стороне BC (рис. 2.5.1). В равнобедренном $\triangle CBD$: $\angle CBD = \angle CDB$.

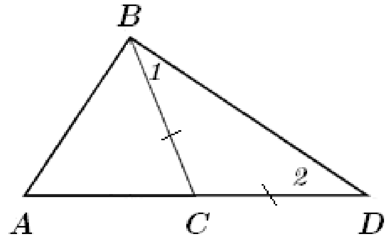


Рис. 2.5.1

2. Так как точка C лежит на отрезке AD, то $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$, поэтому $\angle ABD > \angle CBD$. Таким образом, в $\triangle ABD$ против большего угла лежит большая сторона, т.е. $AD > AB$.

3. Следовательно, $AD = AC + CD = AC + CB$, поэтому $AB < AC + CB$.

Теорема доказана.

Пример 2.5.1. Докажите, что высота неравнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, меньше половины гипотенузы.

Решение Пусть CH – высота прямоугольного $\triangle ABC$ с гипотенузой AB. Проведем медиану CM (рис. 2.5.2). Тогда CH – катет прямоугольного $\triangle CHM$ с гипотенузой CM, поэтому $CH < CM$, а так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла,

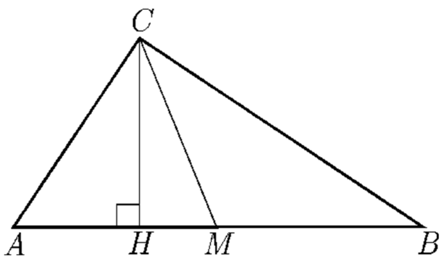


Рис. 2.5.2

равна половине гипотенузы, то $CH < \frac{1}{2}AB$.

Теорема 2.5.2. *О сумме углов в треугольнике.* Сумма углов треугольника равна 180^0 [3, с. 62].

Доказательство

1. Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$ и докажем, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$.

Проведем через точку B прямую MN, параллельную AC. Будем считать, что точки M и N выбраны так, что $M - B - N$ и точки A и M

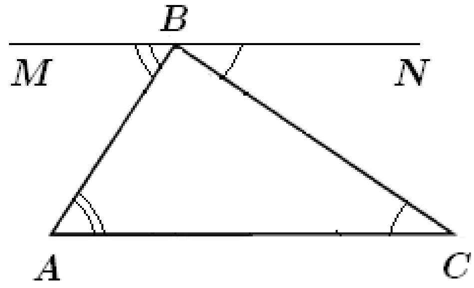


Рис. 2.5.3

лежат по одну сторону от BC (рис. 2.5.3). Тогда, очевидно, точки A и N лежат по разные стороны от BC.

2. Так как лучи BM и BA принадлежат одной полуплоскости с границей BC и луч BM не является внутренним лучом $\angle ABC$, то BA – внутренний луч $\angle MBC$.

Отсюда следует, что $\angle MBC = \angle MBA + \angle ABC$.

3. Углы $\angle MBC$ и $\angle CBN$ – смежные, поэтому $\angle MBC + \angle CBN = 180^0$. Подставив $\angle MBC = \angle MBA + \angle ABC$ получаем: $\angle MBA + \angle ABC + \angle CBN = 180^0$.

4. Так как точки A и N лежат по разные стороны от BC, то углы $\angle CBN$ и $\angle ACB$ – накрест лежащие при пересечении параллельных прямых MN и AC секущей BC, следовательно, $\angle CBN = \angle ACB$.

5. Аналогично рассуждая, получаем, что $\angle MBA = \angle BAC$.

6. Отсюда, учитывая равенство $\angle MBA + \angle ABC + \angle CBN = 180^0$, получаем, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$.

Теорема доказана.

Теорема 2.5.3. *Теорема Менелая.* Пусть прямая пересекает произвольный $\triangle ABC$, причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB, A_1 – точка ее пересечения со стороной BC, и B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC. Доказать, что тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказательство

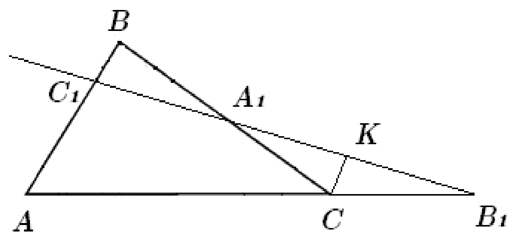


Рис. 2.5.4

1. Пусть задан $\triangle ABC$ и прямая C_1B_1. Проведем через точку C прямую параллельно AB. Пусть точка K – точка ее пересечения с прямой B_1C_1 (рис. 2.5.4).

2. Треугольники $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle CKB_1$ по первому признаку ($\angle C_1AB_1 = \angle KCB_1$, $\angle AC_1B_1 = \angle CKB_1$ как внешние односторонние при

параллельных прямых AC_1 и CK и секущих AB_1 и C_1B_1). Значит, $\frac{AC_1}{CK}=\frac{B_1A}{B_1C}$. Отсюда, $CK=\frac{AC_1\cdot B_1C}{B_1A}$.

3. Треугольники $\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CKA_1$ по первому признаку. Следовательно, $\frac{C_1B}{CK}=\frac{BA_1}{A_1C}$. Отсюда, $CK=\frac{C_1B\cdot A_1C}{BA_1}$.

4. Приравняем $\frac{AC_1\cdot B_1C}{B_1A}=\frac{C_1B\cdot A_1C}{BA_1} \Leftrightarrow \frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Теорема доказана.

Имеет место также и обратная теорема, применение которой мы рассмотрим в разделе 7.

Теорема 2.5.4.[13] *Обратная теорема Менелая.* Пусть дан произвольный $\triangle ABC$. Предположим, что C_1 лежит на стороне AB, точка A_1 – точка лежит на стороне BC, а точка B_1 лежит на продолжении стороны AC, причем про эти точки известно, что $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$. Доказать, что тогда эти точки лежат на одной прямой.

Теорема 2.5.5. *Теорема Чевы.* Предположим, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB $\triangle ABC$, причем отрезки AA_1, BB_1, CC_1 (чевианы) пересекаются в одной точке. Доказать, что тогда $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ (*).

Доказательство

1. Идея доказательства заключается в том, чтобы отношения отрезков из равенства (*) заменить отношениями отрезков, лежащих на одной прямой.

Обозначим через точку O – точку пересечения трех заданных отрезков.

2. Через точку B проведем прямую, параллельную чевиане CC_1. прямая AA_1 пересекает построенную прямую в точке M, а прямая, проходящая через точку C и параллельная AA_1 – в точке T. Через

---

[13] Доказательство можно найти в [4].

точки A и C проведем прямые, параллельные чевиане BB_1. Они пересекут прямую BM в точках N и R соответственно (рис. 2.5.5).

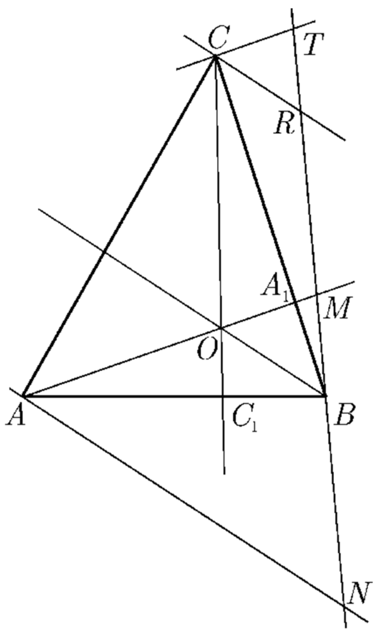


Рис. 2.5.5

3. По теореме 2.4.3 о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BM}{TM}, \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BR}{BN}, \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AO}{OM} = \frac{BN}{BM}.$$

Тогда справедливы равенства:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BM \cdot BR \cdot BN}{TM \cdot BN \cdot BM} = \frac{BR}{TM}.$$

4. В параллелограммах $OCTM$ и $OCRB$ отрезки TM, CO и BR равны как противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $\dfrac{BR}{TM} = 1$ и верно равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.5.6. *Теорема Стюарта.* Точка D расположена на стороне AB $\triangle ABC$. Докажите, что справедливо равенство $AC^2 \cdot DB + BC^2 \cdot AD - CD^2 \cdot AB = AB \cdot AD \cdot BD$.

Доказательство

1. Проведем $CH \perp AB$ и введем обозначения a, b, c для длин сторон треугольника, d – чевиана, m и n – отрезков BD и AD (рис. 2.5.6).

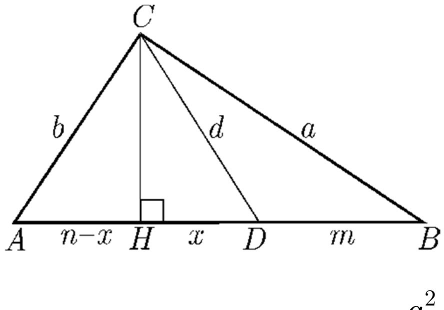


Рис. 2.5.6

Требуется доказать, что $a^2n + b^2m - d^2c = mnc$.

2. Если $DH = x$, то проекции наклонных a, b, d соответственно равны $m+x, n-x, x$. Имеем:

$$a^2 - d^2 = (m+x)^2 - x^2 = m^2 + 2mx;$$

$$b^2 - d^2 = (n-x)^2 - x^2 = n^2 - 2nx.$$

3. Умножим первое равенство на n, а второе – на m.

$$\begin{cases} a^2n - d^2n = nm^2 + 2mnx; \\ b^2m - d^2m = mn^2 + 2mnx. \end{cases}$$

Теперь почленно сложим новые равенства: $a^2n + b^2m - d^2(m+n) = mn(m+n)$, После $m+n=c$ замены получим $a^2n + b^2m - d^2c = mnc$.

Теорема доказана.

Теорема 2.5.7. *Теорема косинусов.* Пусть a, b, c – стороны треугольника; α – угол, противолежащий стороне a. Тогда справедливо равенство $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.

Доказательство

1. Пусть задан $\triangle ABC$. Проведем высоту h из вершины C на сторону $c = AB$ (рис. 2.5.7).

2. Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle CDB$.

Имеем: $\cos\alpha = \dfrac{AD}{b} \to AD = b \cdot \cos\alpha$.

По теореме Пифагора имеем:

$h^2 = b^2 - AD^2$, или

$h^2 = a^2 - (c - AD)^2$.

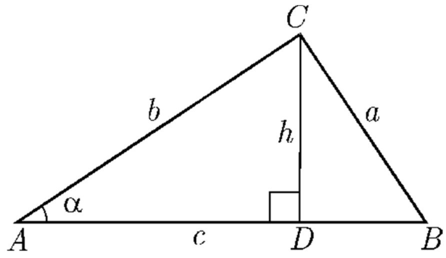


Рис. 2.5.7

3. Приравняем равенства:

$a^2 - (c - AD)^2 = b^2 - AD^2$.

4. После раскрытия скобок и преобразования получим: $a^2 = b^2 - AD^2 + c^2 - 2c \cdot AD + AD^2$ или $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD$.

Учитывая, что $AD = b \cdot \cos\alpha$, получим: $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot b \cdot \cos\alpha$.

Теорема доказана.

Теорема 2.5.8. *Теорема синусов*[14]. Пусть a, b, c – стороны треугольника; α – угол, противолежащий стороне a. Тогда справедливо равенство $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

[14] Теорема будет доказана в пункте 4.4.

2.6. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Опр. 2.6.1. *Средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Теорема 2.6.1. Прямая, содержащая среднюю линию треугольника, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Доказательство

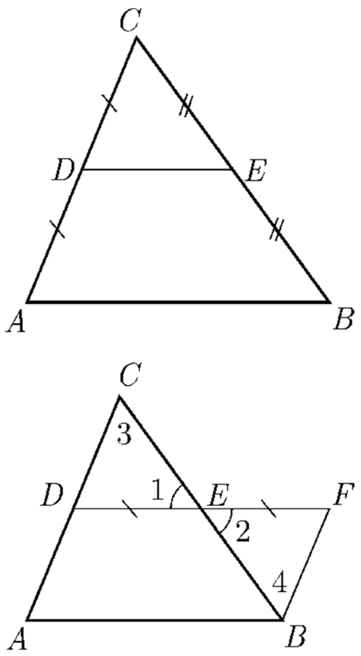


Рис. 2.6.1

1. Пусть DE – средняя линия $\vartriangle ABC$ (рис. 2.6.1). Докажем, что $DE \parallel AB$ и равна ее половине. Для этого сделаем дополнительное построение: отложим на продолжении прямой DE отрезок $EF = DE$ и соединим отрезком точки B и F.

2. Рассмотрим $\vartriangle ECD$ и $\vartriangle EBF$, они равны по первому признаку равенства треугольников ($CE = BE$ по условию, $DE = EF$ по построению, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные). Следовательно, $BF = CD$, и значит, $BF = AD$.

3. Заметим, что $\angle 3 = \angle 4$, и, значит, $AC \parallel BF$.

4. Таким образом, по теореме 3.2.2. четырехугольник $ABFD$ – параллелограмм.

Итак, сторона AB параллельна и равна стороне DF. Средняя линия DE равна половине DF и, следовательно, половине AB.

Теорема доказана.

Теорема 2.6.2. *Основное свойство биссектрисы.* Биссектриса треугольника делит его стороны на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Доказательство

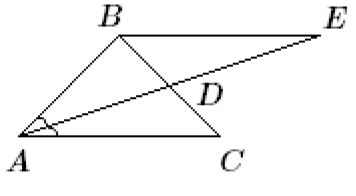


Рис. 2.6.2

1. Пусть $\vartriangle ABC$ – произвольный треугольник и AD – его биссектриса. Докажем, что $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

2. Проведем через B прямую параллельно AC и продолжим биссектрису AD до пересечения с этой прямой в точке E.

3. Рассмотрим $\triangle ADC$ и $\triangle BDE$:

– $\angle BAD = \angle DAC$, т.к. AD – биссектриса;

– $\angle BED = \angle DAC$ как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BE и секущей AE. Таким образом, $\triangle ADC \sim \triangle BDE$.

Следовательно, $\dfrac{BE}{AC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Теорема доказана.

Лемма 2.6.1. Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.

Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

Доказательство

1. Возьмем произвольную точку M на биссектрисе $\angle BAC$, проведем перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC, и докажем, что $MK = ML$ (рис. 2.6.3).

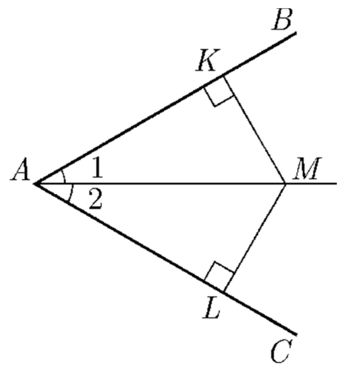


Рис. 2.6.3

Рассмотрим прямоугольные $\triangle AMK$ и $\triangle AML$. Они равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $MK = ML$.

2. Пусть точка M лежит внутри $\angle BAC$ и равноудалена от его сторон AB и AC. Докажем, что луч AM – биссектриса $\angle BAC$.

3. Проведем перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC. Рассмотрим прямоугольные $\triangle AMK$ и $\triangle AML$. Они равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, AM – биссектриса по определению.

Теорема доказана.

Теорема 2.6.3. Если в треугольнике известны стороны a, b, c, то для длины биссектрисы угла A справедливы следующие формулы:

$$a)\ \ l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p\left(p-a\right)bc}; \qquad b)\ \ l_a = bc - \frac{a^2bc}{\left(b+c\right)}.$$

Теорема 2.6.4. *Основное свойство медианы.* Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении *2:1* начиная с вершины.

Доказательство

Способ № 1. С использованием подобия треугольников.

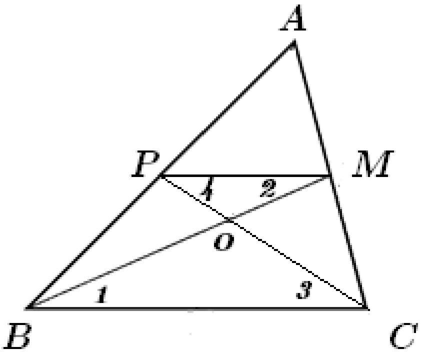


Рис. 2.6.4

1. Пусть в $\triangle ABC$ проведены медианы BM и CP, причем O – точка их пересечения (рис. 2.6.4).

PM – средняя линия $\triangle ABC$, поэтому $PM \parallel BC$ и $\dfrac{PM}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

2. Из параллельности прямых PM и BC следует равенство накрест лежащих углов: $\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4$.

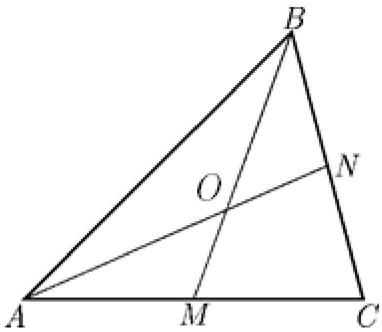
Рассмотрим $\triangle POM$ и $\triangle BOC$, они подобны по первому признаку подобия треугольников. Получим, $\dfrac{PO}{OC} = \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{PM}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

3. Для доказательства того, что три медианы пересекаются в одной точке, предположим противное, что существует две точки: $BM \cap CP = O,\ BM \cap CP = O'$.

Но тогда существуют две точки, в которых отрезок BM делится в отношении $2:1$, что противоречит единственности точки, делящей отрезок в данном отношении.

Способ № 2. С применением теоремы Менелая.

1. Пусть в $\triangle ABC$ проведены медианы BM и AN, причем O – точка их пересечения (рис. 2.6.5). Достаточно доказать, что $\dfrac{BO}{MO} = 2$.



2. Применим теорему Менелая к $\triangle MBC$ и секущей AN:

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BO}{OM} \cdot \frac{MA}{AC} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{BO}{OM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{BO}{OM} = 2.$$

Рис. 2.6.5

3. Применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что все три медианы делятся точкой O в отношении $2:1$, а, следовательно, проходят через точку O.

Теорема доказана.

Теорема 2.6.5. *Формула для вычисления медианы.* Если в треугольнике известны стороны a, b, c, то для длины медианы, проведенной из угла A, справедлива следующая формула $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$.

Доказательство

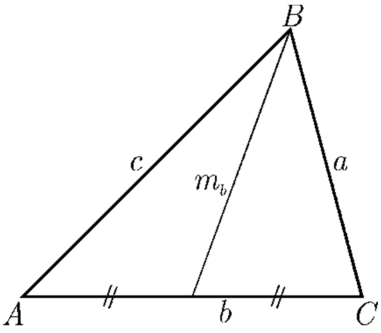


Рис. 2.6.6

1. Рассмотрим $\triangle ABC$, в которой проведена медиана BM (рис. 2.6.6). Воспользуемся теоремой косинусов для угла C: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

Откуда $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

2. Рассмотрим $\triangle MBC$. Воспользуемся теоремой косинусов для угла C: $m_b^2 = a^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - 2a \cdot \dfrac{b}{2} \cdot \cos C$.

Подставим вместо косинуса угла C его значение, полученное в п.1., имеем:

$$m_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos C = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

Таким образом, $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.6.6. Медиана прямоугольного треугольника, поведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника, а длина ее равна половине гипотенузы.

Доказательство

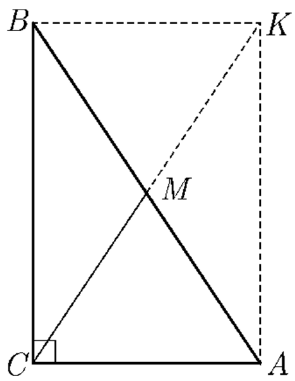


Рис. 2.6.7

1. Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$ с медианой CM. Продлим CM за точку M и отметим на луче CM току K так, чтобы $CM{=}MK$ (рис. 2.6.7).

2. Треугольники BKM и ACM равны по углу и двум сторонам. Треугольники BMC и AMK равны по двум сторонам.

3. Рассмотрим $\triangle BCA = \triangle CKA$ по двум катетам, следовательно $BA = CK$.

Т.к. точка M – середина AB,
Значит, она будет серединой CK.

Таким образом, $CM = BM = MA$.

Теорема доказана.

Опр. 2.6.2. *Серединным перпендикуляром* к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

Лемма 2.6.2. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Обратно: каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему

Доказательство

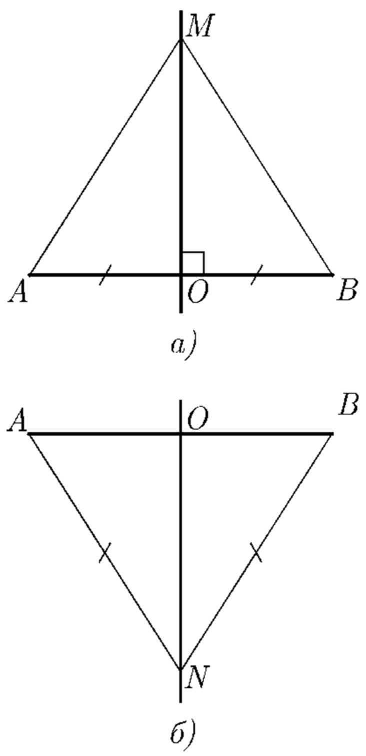


Рис. 2.6.8

1. Пусть прямая m – серединный перпендикуляр к отрезку AB, точка O – середина этого отрезка (рис. 2.6.8 *а*).

2. Рассмотрим произвольную точку M прямой m и докажем, что $AM = BM$. Если точка M совпадает с точкой O, то это равенство верно, т.к. O – середина AB. Пусть M и O – различные точки.

3. Рассмотрим $\vartriangle OAM$ и $\vartriangle OMB$: $\angle AOM = \angle MOB = 90^0$, $OA = OB$ и OM – общий катет, поэтому $\vartriangle OAM = \vartriangle OBM \to AM = BM$.

4. Рассмотрим произвольную точку N, равноудаленную от концов отрезка AB и докажем, что N лежит на прямой m (рис. 2.6.8. *б*). Если N – точка прямой AB, то она совпадает с серединой O отрезка AB и поэтому лежит на m. Если же точка N не лежит на прямой AB, то $\vartriangle ANB$ – равнобедренный, т.к. $AN = BN$. Отрезок NO – медиана этого треугольника, а значит, по теореме 2.2.2, и высота.

Таким образом, $NO \perp AB$, поэтому прямые ON и m совпадают, т.е. N – точка прямой m.

Лемма доказана.

Теорема 2.6.3. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство

1. Рассмотрим серединные перпендикуляры m и n к сторонам AB и AC $\triangle ABC$. Эти прямые пересекаются в некоторой точке O (рис. 2.6.9.). Если предположить противное, т.е. что $m \parallel n$, то прямая BA, будучи перпендикулярной к прямой m, была бы перпендикулярна и параллельной ей прямой n, а тогда через точку B проходили бы две прямые BA и BC, перпендикулярные к прямой n, что невозможно.

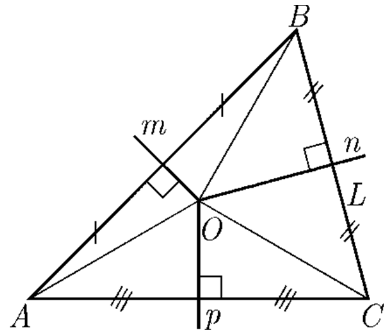


Рис. 2.6.9

2. По доказанной теореме $OB = OA$ и $OB = OC$. Поэтому и $OA = OC$, т.е. точка O – равноудалена от концов отрезка AC и, значит, лежит на серединном перпендикуляре p
к этому отрезку.

3. Следовательно, все три серединных перпендикуляра m, n и p к сторонам $\triangle ABC$ пересекаются в точке O.

Теорема доказана.

Теорема 2.6.4. *Основное свойство высоты.* Если AD, BE, CF – высоты $\triangle ABC$, O – точка пересечения этих высот или их продолжений, то справедливо равенство $AO \cdot OD = CO \cdot OF = BO \cdot OE$.

Доказательство

1. Пусть задан $\triangle ABC$ и проведены высоты AD, BE, CF (рис. 2.6.10).

2. Рассмотрим пары подобных прямоугольных треугольников:

$$\triangle AOF \sim \triangle COD \to \frac{AO}{CO} = \frac{OF}{OD};$$

$$\triangle BOF \sim \triangle COE \to \frac{BO}{CO} = \frac{OF}{OE}.$$

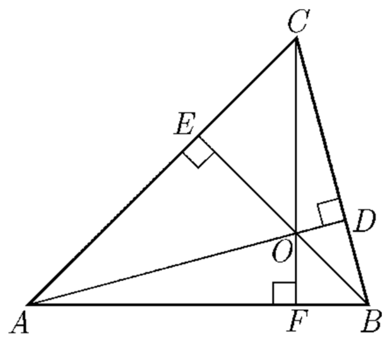


Рис. 2.6.10

3. Таким образом $AO \cdot OD = CO \cdot OF$ и $CO \cdot OF = BO \cdot OE$, откуда $AO \cdot OD = CO \cdot OF = BO \cdot OE$.

Теорема доказана.

Теорема 2.6.5. Высоты треугольника к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство

1. Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$ и докажем, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (рис. 2.6.11).

2. Проведем через каждую вершину $\triangle ABC$ прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник $\triangle A_2B_2C_2$. Точки A, B и C являются серединами сторон этого треугольника.

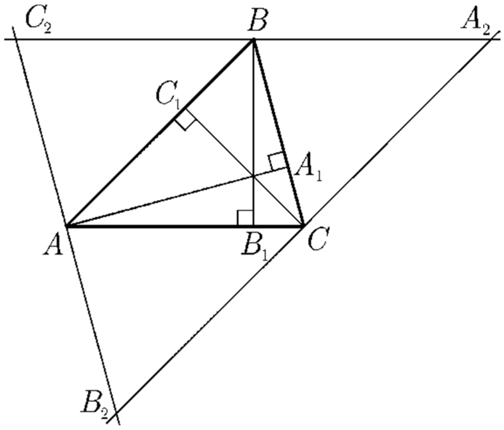


Рис. 2.6.11

2. Действительно, по теореме 3.2.1 $AB = A_2C$ и $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$. Аналогично $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$.

3. Кроме того, как следует из построения, $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$. Таким образом, прямые AA_1, BB_1, CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам $\triangle A_2B_2C_2$. Следовательно, они пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

Теорема 2.6.6. Если в треугольнике известны стороны a, b, c, то для длины высоты, проведенной из угла B, справедлива следующая формула $h_b^2 = \dfrac{4b^2c^2 - \left(c^2 + b^2 - a^2\right)^2}{4b^2}$.

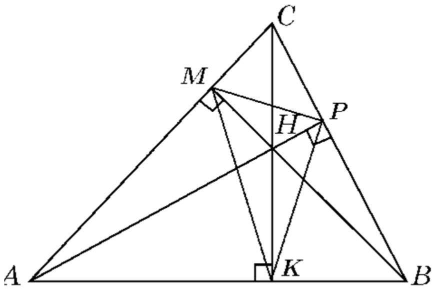


Рис. 2.6.12

Опр. 2.6.3. *Ортотреугольник (ортоцентрический треугольник) треугольника* $\triangle ABC$ – треугольник, вершины которого являются основаниями высот $\triangle ABC$.

На рис. 2.6.12 в $\triangle ABC$ проведены высоты AP, BM и CK. $\triangle MPK$ – ортотреугольник.

Теорема 2.6.7. Ортотреугольник отсекает треугольник, подобный данному.

Доказательство

1. Пусть в остроугольном $\triangle ABC$ проведены высоты AA_1, BB_1 (рис. 2.6.13).

2. Рассмотрим прямоугольные $\triangle AA_1C$ и $\triangle BB_1C$ они имеют общий угол при вершине C.

Следовательно, $\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C$ по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$.

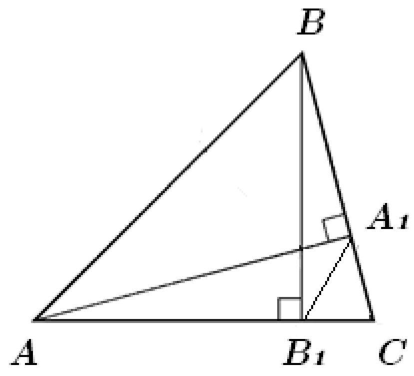


Рис. 2.6.13

3. Рассмотрим $\triangle A_1CB_1$ и $\triangle ACB$, они имеют общий угол C и пропорциональные стороны $\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$.

4. Следовательно, $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle ACB$ по второму признаку подобия треугольников.

Теорема доказана.

Пример 2.6.1. Докажите, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Доказательство

а) Если $AB = BC$, то $\triangle ABC$ – равнобедренный треугольник и точки *H, P, M* – совпадают.

б) Пусть $AB<BC$, тогда $\angle A > \angle C$, а значит $\angle ABH < \angle HBC$. Тогда имеем, что $\angle ABH < \frac{1}{2}\angle ABC$, т.е. $\angle ABH < \angle ABP$. Значит, точка H лежит на отрезке AP.

По свойству биссектрисы треугольника имеем $\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{BC}$.

Т.к. $AB < BC$, то $AP < PC$ и отсюда $AP < \frac{1}{2}AC$, т.е. $AP < AM$, значит точка M лежит на отрезке CP, т.е. P лежит между H и M.

Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров и точка пересечения высот (или их продолжений). Эти четыре точки называются ***замечательными точками треугольника***.

2.7. Площадь треугольника

Докажем основные формулы для вычисления площади треугольника.

Теорема 2.7.1. Площадь прямоугольного треугольника равна полупроизведению катетов.

Доказательство

1. Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$ с прямым углом C и катетами a и b. Возьмем на плоскости такую точку K, что $ABCK$ - прямоугольник (рис. 2.7.1). По доказанной теореме 1.3.10 $S_{ABCD} = ab$.

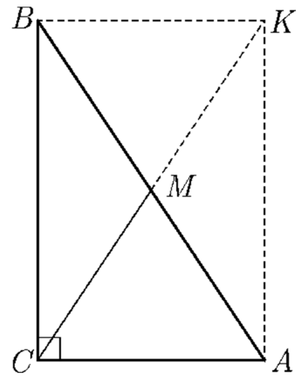


Рис. 2.7.1

2. Но этот прямоугольник сложен из двух треугольников: $\triangle ABC$ и равного ему $\triangle ABK$. Тем самым, площадь $\triangle ABC$ равна половине площади прямоугольника: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab$.

Теорема доказана.

Теорема 2.7.2. Площадь треугольника равна полупроизведению длины основания на длину высоту, проведенную к этому основанию.

Доказательство

1. Пусть дан произвольный $\triangle ABC$ и $AH = h_a$ – его высота, проведенная к стороне BC. Справедливы рассуждения:

$$S_{ABC} = S_{BAH} + S_{HAC} = \frac{1}{2}(BH \cdot AH + HC \cdot AH) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AH \cdot (BH + HC) = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.7.3. Если в треугольнике известны стороны a, b и угол α между ними, то площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

Доказательство

1. Пусть дан произвольный $\triangle ABC$ с основанием $AC = b$ и высотой BH, проведенной к стороне AC.

2. Рассмотрим $\triangle AHB : \angle AHB = 90^0, AB = a, \angle BAH = \alpha$. Тогда $BH = a \cdot \sin\alpha$.

3. Подставим это равенство в формулу $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$, получим $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin\alpha$.

Теорема доказана.

Теорема 2.7.4. *Формула Герона.* Если в треугольнике известны стороны a, b, c, то площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$.

Доказательство

1. Для того, чтобы доказать формулу Герона воспользуемся уже доказанными теоремой 2.7.3 и теоремой 2.5.7.

2. Пусть задан $\triangle ABC$, в котором известны стороны a, b, c. Запишем теорему косинусов и формулу для вычисления площади треугольника в немного измененном виде: $\begin{cases} 4S = 2ab\sin C, \\ a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C. \end{cases}$

3. Возводя эти равенства в квадрат и складывая, получим, что

$$16S^2 + \left(b^2 + a^2 - c^2\right)^2 = 4a^2b^2, \text{ откуда}$$

$$16S^2 = 4a^2b^2 - \left(b^2 + a^2 - c^2\right)^2 = \left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right) \cdot \left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right) =$$

$$= \left(c^2 - \left(a-b\right)^2\right) \cdot \left(\left(a+b\right)^2 - c^2\right) =$$

$$= \left(c+a-b\right) \cdot \left(c+b-a\right) \cdot \left(a+b-c\right) \cdot \left(a+b+c\right),$$

4. Откуда $S^2 = \frac{\left(c+a-b\right)}{2} \cdot \frac{\left(c+b-a\right)}{2} \cdot \frac{\left(a+b-c\right)}{2} \cdot \frac{\left(a+b+c\right)}{2}$.

5. Пусть $p = \frac{a+b+c}{2}$, тогда площадь треугольника запишется в виде: $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p \cdot \left(p-a\right) \cdot \left(p-b\right) \cdot \left(p-c\right)}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.7.5. Площади треугольников, имеющих одинаковые высоты, относятся как основания.

Доказательство

1. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Проведем в них высоты h и h_1 на стороны AC и A_1C_1 (рис. 2.7.2). Пусть эти высоты равны: $h = h_1$.

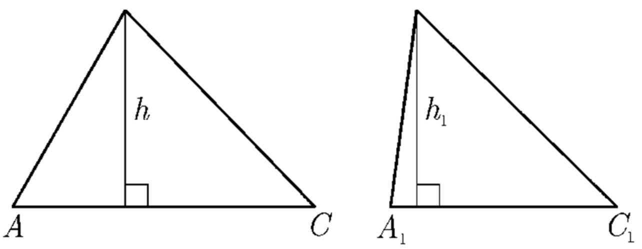


Рис. 2.7.2

2. Из теоремы 2.7.2

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot h$ и

$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\cdot A_1C_1\cdot h_1$.

3. Составим отношение $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot AC\cdot \cancel{h}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot A_1C_1\cdot \cancel{h_1}} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.7.6. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведение сторон, заключающих равные углы.

Доказательство

1. Пусть заданы два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, такие что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Сделаем дополнительное построение: наложим $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ так, чтобы вершина A_1 треугольника $\triangle A_1B_1C_1$ совпадала с вершиной A треугольника $\triangle ABC$, а луч A_1B_1 – с лучом AB (рис. 2.7.3).

2. Так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и отложены от полупрямой A_1B_1 в одну полуплоскость, то луч A_1C_1 совпадает с лучом AC. Значит, точка C_1 лежит на луче AC.

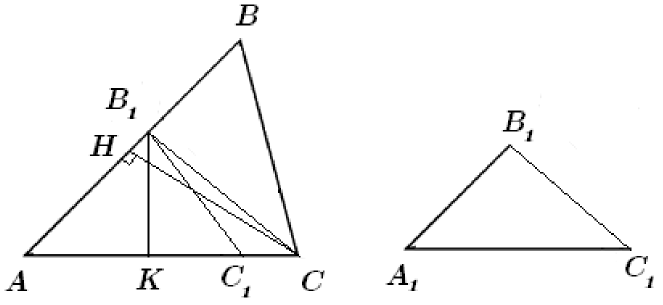


Рис. 2.7.3

3. Дополнительное построение: соединим вершину C $\triangle ABC$ с вершиной B_1 $\triangle A_1B_1C_1$.

4. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ACB_1$, пусть CH – высота $\triangle ABC$ и $\triangle ACB_1$. Значит, по теореме 2.7.5: $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB_1C}} = \dfrac{AB}{AB_1}$.

5. Рассмотрим $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle AB_1C$, B_1K – высота треугольников $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle AB_1C$. Значит, по теореме 2.7.5: $\dfrac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \dfrac{AC}{AC_1}$.

Отсюда: $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB_1C}} \cdot \dfrac{S_{\triangle AB_1C}}{S_{\triangle AB_1C_1}} = \dfrac{AB}{AB_1} \cdot \dfrac{AC}{AC_1}$.

6. По построению $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_1C_1$, а значит, $S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle AB_1C_1}$.

Следовательно, $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.7.7. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

1. Рассмотрим подобные $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия k.

2. Так как треугольники подобны, то $\angle A = \angle A_1$, $\sin\angle A = \sin\angle A_1$, и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$.

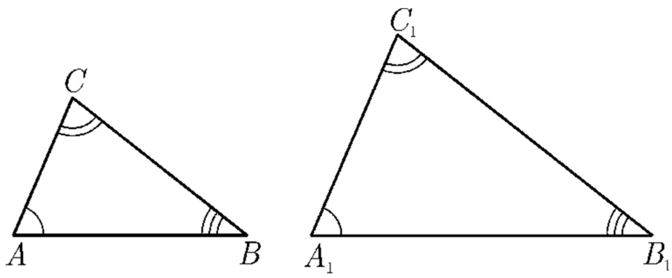


Рис. 2.7.4

2. Из теоремы 2.7.3

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle A \text{ и } S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin\angle A_1.$$

3. Составим отношение:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot AB \cdot AC \cdot \cancel{\sin\angle A}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cancel{\sin\angle A_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.7.8. Медиана треугольника делит его на два треугольника, равных по площади (равновеликих).

Доказательство

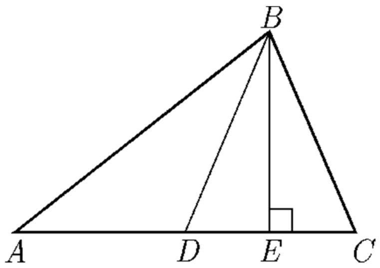


Рис. 2.7.5

1. Пусть дан $\triangle ABC$, в котором проведена медиана BD и высота BE.

2. Рассмотрим $\triangle ABD$, по теореме 2.7.4 его площадь равна $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE$.

3. Рассмотрим $\triangle DBC$, по теореме 2.7.4 его площадь равна $S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BE$.

4. Поскольку отрезок BD является медианой, то $AD = DC \Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DBC}$.

Теорема доказана.

Следствие. Все три медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников.

Теорема 2.7.9. Справедливы следующие формулы:

1. Площадь произвольного $\triangle ABC$ со стороной a и двумя прилежащими углами: $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\left(180^0 - (\alpha + \beta)\right)}$.

2. Площадь равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ по боковым сторонам a и основанию c: $S_{\triangle ABC} = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 - c^2}$.

3. Площадь равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ по боковым сторонам a и углу между ними: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin\alpha$.

4. Площадь равностороннего треугольника $\triangle ABC$ по стороне a: $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

5. Площадь равностороннего треугольника $\triangle ABC$ по высоте h: $S_{\triangle ABC} = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$.

Доказательство легко следует из теорем 2.7.2 и 2.7.3.

2.8. «Расчет треугольников»

В настоящем пункте представлены задачи с решениями, которые представляют интерес с точки зрения применения теоретического материала, представленного выше.

Пример 2.8.1. Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

Решение

1. Пусть AD – высота $\triangle ABC$, в котором $BC = 21$, $AB = 10$, $AC = 17$. Обозначим $BD = x$. Поскольку BC – наибольшая сторона треугольника, точка D лежит на отрезке BC, поэтому $CD = 21 - x$.

2. Выразив AD^2 по теореме Пифагора из прямоугольных треугольников $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$, получим уравнение $100 - x^2 = 289 - (21 - x)^2$, откуда находим, что $BD = x = 6$. Следовательно, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 64$ и $AD = 8$.

Ответ: $AD = 8$.

Пример 2.8.2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ на стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 2 : 1$, отрезки BD и MD делят угол ADC на три равные части, при этом отрезок AM, пересекаясь с BD в точке K, делится пополам. Найти длину диагонали AC, если $CD = 1$ и $\cos\angle C = \dfrac{1}{4}$.

Решение

1. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 2.8.1). В $\triangle AMD : DK$ – биссектриса и медиана (по условию), а значит, и высота, т.е. $\triangle AMD : DK \perp AM$.

2. $\triangle ABM : BK$ – высота и медиана, а значит $\triangle ABM$ – равнобедренный, $AB = BM$ и BK – биссектриса угла B.

3. В $\triangle BDC : DM$ – биссектриса

$\angle BDC \Rightarrow BD : DC = BM : MC = 2 : 1 \Rightarrow BD = 2.$

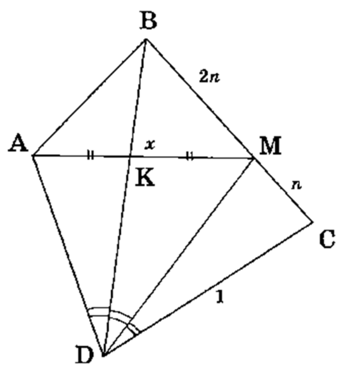


Рис. 2.8.1

Теперь по теореме косинусов:

$$BC^2 + 1^2 - 2 \cdot BC \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 2^2 \Rightarrow BC = 2; BM = AB = \frac{4}{3}.$$

4. По теореме синусов: $\dfrac{DC}{\sin\angle DBC} = \dfrac{BD}{\sin\angle C}$, где $\sin\angle C = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$,

$\sin\angle DBC = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$.

5. В $\triangle ABC : AC^2 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot 2 \cdot \cos B$, где

$\cos B = 1 - 2\sin^2\angle DBC = \dfrac{17}{32} \Rightarrow AC^2 = \dfrac{53}{18}$.

Ответ: $AC = \sqrt{\dfrac{53}{18}}$.

Пример 2.8.3. В $\triangle ABC$ биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны $\triangle ABC$ [64].

Решение

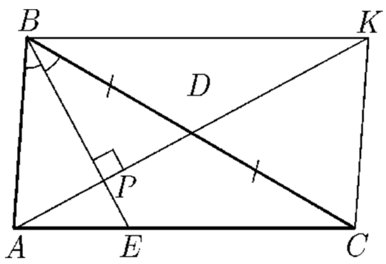


Рис. 2.8.2

1. Пусть точка P – точка пересечения отрезков BE и AD (рис. 2.8.2).

2. $\triangle ABD$ – равнобедренный, т.к. его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$AP = PD = 6$; $BC = 2BD = 2AB$.

3. По свойству биссектрисы $\triangle ABC$ имеем $\dfrac{CE}{AE} = \dfrac{BC}{AB} = 2$, откуда $AC = 3AE$.

4. Из подобия прямоугольных $\triangle APE$ и $\triangle KPB$ следует, что $\dfrac{PE}{BP} = \dfrac{AE}{BK} = \dfrac{1}{3}$.

5. Поэтому $PE = 3$, $BP = 9$. Следовательно,

$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 3\sqrt{13}$; $BC = 2AB = 6\sqrt{13}$;

$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 3\sqrt{5}$; $AC = 3AE = 9\sqrt{5}$.

Ответ: $AB = 3\sqrt{13}$; $BC = 6\sqrt{13}$; $AC = 9\sqrt{5}$.

Пример 2.8.4. Медиана BM и биссектриса AP $\triangle ABC$ пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади $\triangle ABK$ к площади $\triangle ABC$.

Решение

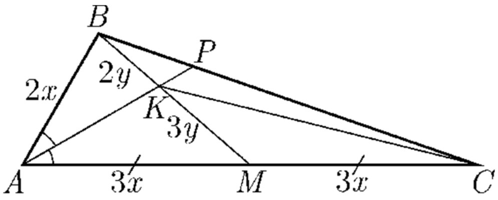


Рис. 2.8.3

1. Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 2.8.3).

Пусть $AM = MC = 3x$. Тогда $AB = 2x$. Так как AK – биссектриса $\triangle ABM$,

имеем $BK : KM = AB : AM = 2 : 3$,

а так как AP – биссектриса $\triangle ABC$,

имеем $BP : PC = AB : AC = 1 : 3$.

2. Обозначим площадь $\triangle BKP$ через S. Тогда справедливы следующие равенства: $S_{\triangle KCP} = 3S$, $S_{\triangle CMK} = 6S = S_{\triangle AMK}$, $S_{\triangle ABK} = 4S$.

Значит, $\dfrac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{4S}{20S} = \dfrac{1}{5}$.

Ответ: $1 : 5$.

Пример 2.8.5. В $\triangle ABC$ проведена биссектрисса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N, $AB = 6, BC = 5, AC = 9$. Докажите, что биссектрисса угла C делит отрезок MN пополам. Пусть P – точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$. Найдите отношение $AP : PN$ [64].

Решение

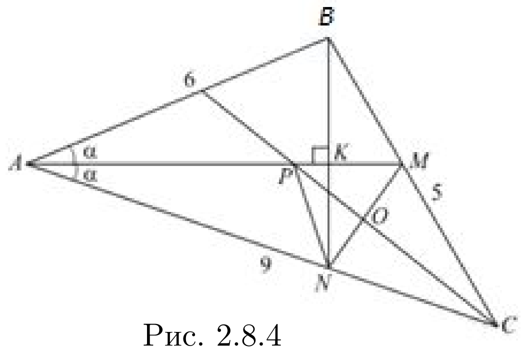


Рис. 2.8.4

1. Обозначим K – точку пересечения отрезков AM и BN (рис. 2.8.4). Треугольник ABN равнобедренный, т.к. AK является биссектриссой и высотой. Следовательно, AK является и медианой, т.е. K – середина BN. Получаем, что $AN = AB = 6$, откуда $NC = AC - AN = 3$. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором по теореме $BM : MC = AB : AC$.

Учитывая, что $BC = 5$, получаем, что $BM = 2$, $MC = 3$.

2. В $\triangle MNC$ стороны NC и MC равны, следовательно $\triangle MNC$ – равнобедренный. Значит биссектрисса угла C так же является медианой и высотой. Таким образом, получаем, что биссектрисса угла C делит отрезок MN пополам.

3. Рассмотрим $\triangle PMN$, отрезок PO перепендикулярен прямой MN и делит ее пополам, следовательно, $\triangle PMN$ – равнобедренный. Значит $PM = PN$ и $AP : PN = AP : PM$.

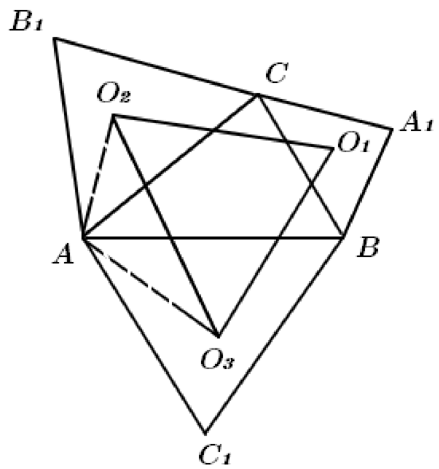
4. В $\triangle AMC$ отрезок CP – биссектрисса, поэтому $AP : PM = AC : MC = 3 : 1$.

Ответ: $AP : PM = 3 : 1$.

Пример 2.8.6. Найдите площадь внешнего треугольника Наполеона $\triangle ABC$, если стороны $\triangle ABC$ равны a, b, c.

Решение

Примечание. Если на каждой стороне произвольного треугольника построить по равностороннему треугольнику, то треугольник с вершинами в центрах равносторонних треугольников – тоже равносторонний. Такой треугольник называется треугольником Наполеона.



1. Пусть задан $\triangle ABC$, на каждой стороне которого построен равносторонний треугольник (рис. 2.8.5). Обозначим через O_1 – центр $\triangle BCA_1$, через O_2 – центр $\triangle ACB_1$, через O_3 – центр $\triangle ABC_1$. Пусть $\angle CAB = \alpha$.

2. Рассмотрим $\triangle O_2O_3A$:

$$AO_2 = \frac{b}{2\cos\angle O_2AC} = \frac{b}{2\cos 30^0} = \frac{b}{\sqrt{3}},$$

$$AO_3 = \frac{c}{2\cos\angle O_3AB} = \frac{c}{2\cos 30^0} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

По теореме косинусов имеем: $\left(O_2O_3\right)^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2}{3}bc\cdot\cos\left(\alpha + 60^0\right)$.

3. Рассмотрим $\triangle ABC : a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$ и $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

4. После несложных преобразований, получаем:

$$\left(O_2O_3\right)^2 = \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S\right).$$

5. Поскольку $\triangle O_1O_2O_3$ – правильный, то $S_{\triangle O_1O_2O_3} = \frac{\left(O_2O_3\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{24}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{1}{2}S = \frac{\sqrt{3}}{24}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Задания для практических занятий

Познакомьтесь с теоретическим материалом и примерами задач с решениями. Рекомендуемая литература: [1, 3, 8, 12, 15, 17, 19, 20, 23, 32, 49, 51, 56, 59].

Теоретические задания в мини-группах

Задание 2.1. Найти разные признаки равенства треугольников. Доказать теорему Штейнер-Лемуса.

Задание 2.2. Найти разные способы доказательств теорем об основных свойствах медиан, биссектрис и высот. Вывести формулы для нахождения элементов (медиан, биссектрис, высот) в треугольнике ABC.

Задание 2.3. Доказать свойства ортоцентрического треугольника.

Задание 2.4. Подготовить доклад о «золотом сечении» и «золотых треугольниках».

Задание 2.5. Доказать следствия из теорем Чевы, Менелая и Стюарта.

Практические задания

Задание 2.6. Доказать истинность математических утверждений

2.6.1. Треугольники с равными периметрами и двумя соответственно равными углами – равны.

2.6.2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

2.6.3. Высота $\triangle ABC$, проведенная из вершины A, не может быть больше стороны AB.

2.6.4. Если в треугольнике один угол равен 120^0, то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

2.6.5. Угол между высотой и биссектрисой, проведенными из одной вершины треугольника, равен полуразности двух других его углов.

2.6.6. Сумма высот треугольника меньше его периметра.

2.6.7. Любой перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой.

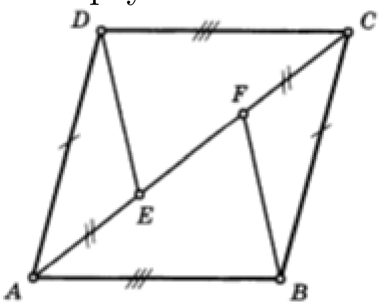
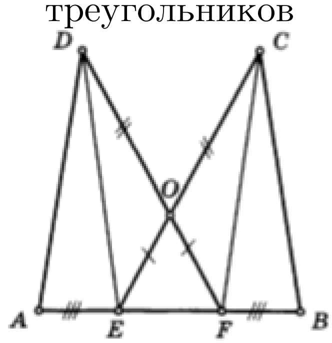
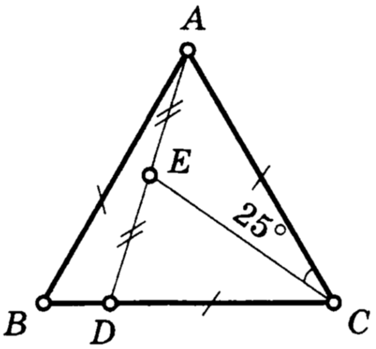
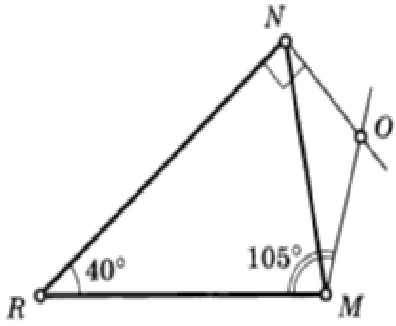
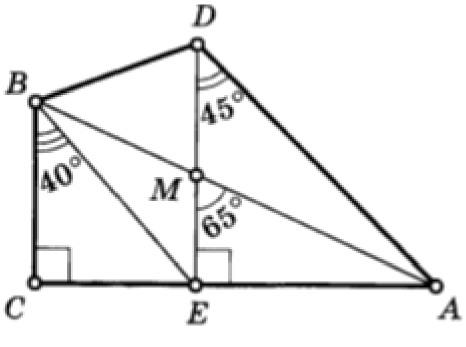
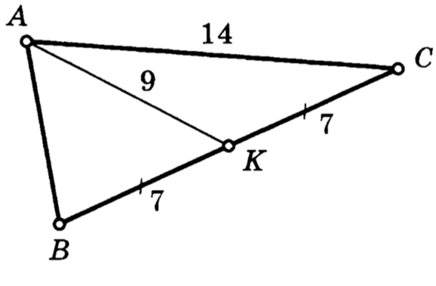
2.6.8. В $\triangle ABC$ медиана AM меньше полусуммы сторон AB и AC.

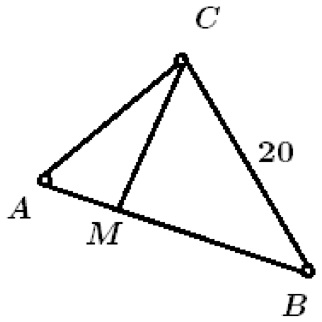
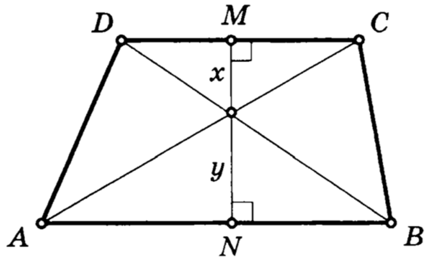
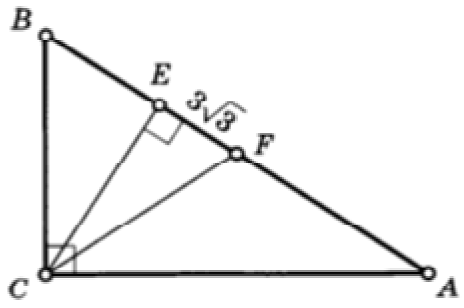
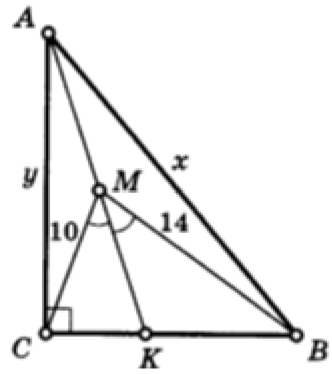
2.6.9. На стороне BC $\triangle ABC$ взята точка D, так что $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$. Докажите, что AD – биссектриса $\triangle ABC$.

2.6.10. В $\triangle ABC$ отрезок AD – биссектриса, AM – медиана, $AC = b$, $AB = c$. Докажите, что:

$$a)\ AD = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}};\ b)\ AM = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}.$$

Задание 7. Решить задачи «на готовых чертежах» [5]

<table>
<tr>
<td>Найти пары равных треугольников

</td>
<td>Найти пары равных треугольников

</td>
</tr>
<tr>
<td>Найти $\angle CBA$ – ?

</td>
<td>Найти $\angle MON$ – ?

</td>
</tr>
<tr>
<td>Найти $\angle BDE$ – ?

</td>
<td>Найти площадь треугольника

</td>
</tr>
</table>

Найти x, *если* $S_{\triangle AMC} : S_{\triangle MCB} = 1:3$ $AB = x, \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AM}{MB}$, 	Найти x, y $AB \parallel DC$, $AB = 18$ $DC = 12$, $x + y = 20$ 
CF – медиана, $AB = 12$ $\sin\angle A - ?$ 	Найти x, y, если BC=18 

Задание 8. Решить задачи «на вычисление»

2.8.1. Биссектрисы AA_1 и BB_1 $\triangle ABC$ пересекаются в точке O. Найдите $\angle ACO$ и $\angle BCO$, если $\angle AOB = 136^0$.

Ответ: 46.

2.8.2. Две стороны треугольника равны 6 и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону треугольника.

Ответ: $2\sqrt{5}$ см.

2.8.3. В равнобедренном треугольнике угол при вершине содержит 36^0, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти длины сторон треугольника.

Ответ: $2\sqrt{5}$; $5+\sqrt{5}$.

2.8.4. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12 см, а боковой стороны – 18 см. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Вычислить длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот.

Ответ: $\frac{28}{3}$ *см.*

2.8.5. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 16 :1, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 21.

Ответ: 357.

2.8.6. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, проведенные через вершину прямого угла равны соответственно 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

Указание. Воспользоваться теоремой о том, что угол между высотой и биссектрисой равен разности двух других углов. Выразить углы прямоугольного треугольника через этот угол. Ответ 72.

2.8.7. Медиана QY и биссектриса PX $\triangle PQR$ пересекаются в точке Z, длина стороны PR относится к длине стороны PQ как 24 :7. Найдите отношение площади $\triangle PQZ$ к площади четырехугольника $YZXR$.

Ответ: $217 : 540$.

2.8.8. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 6 : 7$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение площади $\triangle BKP$ к площади $\triangle ABK$.

Ответ: $\frac{3}{10}$.

2.8.9. Основание треугольника равно 15 см, а боковые стороны 13 и 14 см. Высота, проведенная к основанию, разделена в отношении $1 : 3$ (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Эта прямая делит исходный треугольник на две части – треугольник и трапецию. Найдите площадь полученной при этом трапеции.

Ответ: 78,75.

2.8.10. Точки P и Q расположены на стороне BC $\triangle ABC$ так, чтобы $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $AR : RC = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади $\triangle ABC$, где S и T – точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

Указание: провести прямые $QM \parallel BR$ и $TN \parallel BP$. Доказать, что $S_{\triangle ASB} = S_{\triangle AST}$. Ответ: $5 : 24$.

Задание 9. Решить задачи «в общем виде»

2.9.1. В прямоугольном $\triangle ABC$ $(\angle C = 90^0)$ проведена медиана BD. Какой из углов больше: ABD или CBD?

2.9.2. В прямоугольном $\triangle ABC$ $(\angle C = 90^0)$ проведена медиана BE. Какой из отрезков больше: AE или CE?

2.9.3. На сторонах AB, BC и AC $\triangle ABC$ взяты точки K, L и M соответственно, причем $KB = \dfrac{1}{3}AB$, $BL = \dfrac{3}{5}BC$, $AM = MC$. Отрезки KL и BM пересекаются в точке O. Найти отношение $BO:OM$.

2.9.4. Найти высоту равнобедренного треугольника, проведенную к боковой стороне, если основание равно a, а боковая сторона равна b.

2.9.5. Медиана BD и биссектриса AE треугольника ABC пересекаются в точке M, причем $AM : ME = 3 : 1$, $AE = b$, $BD = a$. Найти площадь $\triangle ABD$.

Указание: провести $DF \parallel AE$. Доказать, что $BM=MD$. Отсюда AM – высота $\triangle ABD$.

2.9.6. В равнобедренном $\triangle ABC$ с основанием AC проведена биссектриса AD. Прямая, проведенная через точку D перпендикулярно к AD, пересекает прямую AC в точке E. Точки M и K – основания перпендикуляров, проведенных из точек B и D к прямой AC. Найдите MK, если $AE = a$.

2.9.7. Сторона AB $\triangle ABC$ продолжена за точку A на отрезок AD, равный AC. На лучах BA и BC взяты точки K и M так, что площади $\triangle BDM$ и $\triangle BCK$ равны. Найдите угол BKM, если $\angle BAC = \alpha$.

Задание 10. Решить задачи повышенного уровня сложности

2.10.1. В остроугольном $\triangle ABC$ проведены высоты BD и CE. BF и CG – перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на прямую ED, Доказать, что $EF=DG$.

2.10.2. Прямая, походящая через середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках M и K. Докажите, что $S_{\triangle DCM} = S_{\triangle AKB}$.

2.10.3. Стороны $\triangle EFG$ соответственно равны медианам $\triangle ABC$. Докажите, что $\dfrac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{3}{4}$.

2.10.4. Через середину K медианы BM $\triangle ABC$ и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади $\triangle ABK$ к площади четырёхугольника $KPCM$.

2.10.5. В $\triangle ABC$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Точки B_2 и C_2 – середины BB_1, CC_1 соответственно. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_2C_2$.

2.10.6. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^0$. Найдите $\angle AKD$.

2.10.7*. Доказать, что если квадраты сторон треугольника составляют арифметическую прогрессию, то треугольник, сторонами которого служат медианы данного треугольника, подобен данному.

2.10.8*. Дан $\triangle ABC$, в котором $AB = BC$, $AB \neq AC$. На стороне AB выбрана точка E, а на продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $\angle BDC = \angle ECA$. Докажите, что площади треугольников $\triangle DEC$ и $\triangle ABC$ равны.

2.10.9*. Какие стороны может иметь $\triangle ABC$, если из отрезков, имеющих длины $\cos A, \cos B$ и $\cos C$, можно составить треугольник, равный данному?

2.10.10*. Верно ли, что из произвольного треугольника можно вырезать три равные фигуры, площадь каждой из которых больше четверти площади треугольника?

РАЗДЕЛ 3. МНОГОУГОЛЬНИКИ

3.1. Четырехугольники

Теорема 3.1.1. Сумма углов всякого выпуклого n-угольника равна $180^0 \cdot (n-2)$.

Доказательство

1. Докажем для $n=3$.

По доказанной теореме 2.5.2 сумма углов в треугольнике равна 180^0.

2. Пусть оно справедливо для $n \le k-1$.

3. Покажем, что тогда оно будет справедливо и при $n = k$. Для этого разобьем простой k-угольник диагональю на два простых многоугольника. Пусть числа их сторон будут соответственно k_1 и k_2 $\left(k_1 < k,\, k_2 < k,\, k_1 + k_2 = k + 2\right)$.

4. Тогда сумма углов исходного многоугольника равна:

$$180^0 \cdot (k_1 - 2) + 180^0 \cdot (k_2 - 2) = 180^0 \cdot (k_1 + k_2 - 4) = 180^0 \cdot (k_2 - 2).$$

5. Следствие: сумма углов четырёхугольника равна 360^0.

Теорема доказана.

Опр. 3.1.1. *Четырехугольник* – это фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие отрезки не должны пересекаться. *Диагонали четырехугольника* – это отрезки, соединяющие противоположные вершины четырехугольника.

Теорема 3.1.2. *Свойства четырехугольника.* Справедливы следующие утверждения.

1^0. Диагонали любого выпуклого четырёхугольника пересекаются.

2^0. Диагонали любого невыпуклого четырёхугольника не пересекаются.

3^0. Каждая диагональ выпуклого четырехугольника разделяет его на два треугольника.

4^0. Не существует четырехугольника, у которого все углы тупые или все углы острые.

Доказательство

Свойство 1^0. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажем, что его диагонали AC и BD пересекаются.

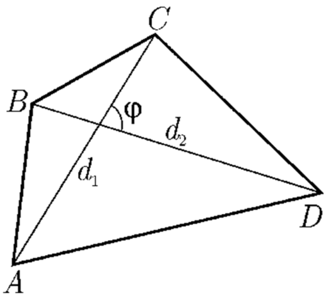


Рис. 3.1.1

1. Так как четырехугольник $ABCD$ выпуклый, то точка C лежит по ту же сторону от прямой AB, что и точка D, и по ту же сторону от прямой AD, что и точка B. Поэтому точка C лежит внутри $\angle BAD$.

2.Следовательно, луч AC проходит внутри этого угла и поэтому пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла, в частности, пересекает отрезок BD. Аналогично можно доказать, что луч BD пересекает отрезок AC. Отсюда следует, что точка пересечения луча AC и отрезка BD лежит на отрезке AC, т.е. отрезки AC и BD пересекаются.

Теорема доказана.

Теорема 3.1.3. Если диагонали произвольного выпуклого четырёхугольника равны d_1 и d_2 и образуют угол α, то площадь четырехугольника может быть найдена по формуле $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Доказательство

1. Рассмотрим произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором проведены диагонали AC и BD.

2. По свойству аддитивности площади фигуры, площадь четырехугольника состоит из суммы площадей треугольников:

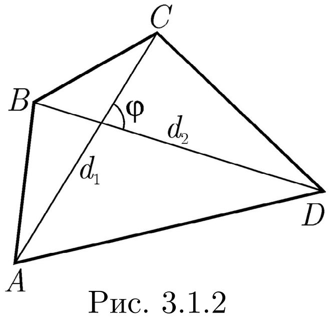


Рис. 3.1.2

$$S_{ABCD} = S_{\vartriangle AOB} + S_{\vartriangle BOC} + S_{\vartriangle COD} + S_{\vartriangle AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin(\pi - \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin(\pi - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi (AO \cdot OB + OB \cdot OC + CO \cdot OD + OA \cdot OD) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi (OB + OD)(AO + OC) = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi.$$

Теорема доказана.

3.2. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. На рис. 3.2.1. представлен параллелограмм.

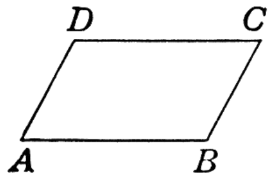


Рис. 3.2.1

Теорема 3.2.1. *Свойства параллелограмма.*

1^0. Сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна 180^0, а противоположные углы равны.

2^0. Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

3^0. Противолежащие стороны параллелограмма равны.

4^0. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство

1^0. Пусть задан параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $\angle A = \angle C$.

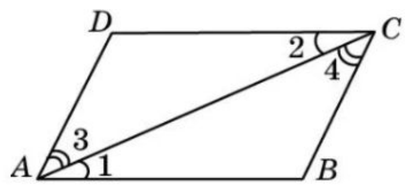


Рис. 3.2.2 *а*)

1. Диагональ AC разделяют параллелограмм на два $\triangle ACB$ и $\triangle ACD$ (рис. 3.2.2 *а*). Заметим, что $\angle 1 = \angle 2$ поскольку эти углы накрест лежащие, при рассмотрении параллельных прямых AB и CD пересеченные секущей AC.

2. Аналогично $\angle 3 = \angle 4$, если рассмотреть параллельные прямые AD и BC пересеченные секущей AC.

3. Тогда $\triangle ACB = \triangle ACD$ по второму признаку равенства треугольников. Поэтому $AB = CD$, $AD = BC$, $\angle B = \angle D$.

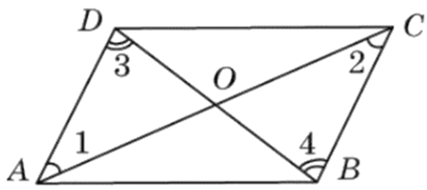


Рис. 3.2.2 *б*)

4. $\angle A = \angle 1 + \angle 3$, $\angle C = \angle 2 + \angle 4$. Учитывая, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, получим $\angle A = \angle C$.

4^0. Докажем, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

1. Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 3.2.2 *б*). $\angle 1 = \angle 2$ поскольку эти углы накрест лежащие, при рассмотрении параллельных прямых AD и BC пересечённые секущей AC.

$\angle 3 = \angle 4$, поскольку эти углы накрест лежащие, при рассмотрении параллельных прямых AD и BC пересечённые секущей BD. Следовательно, $AD = BC$ по свойству 3^0.

2. Тогда $\triangle AOD = \triangle OBC$ по второму признаку равенства треугольников, поэтому $DO = OB$, $AO = OC$.

Теорема 3.2.2. *Признаки параллелограмма.*

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

4. Если в четырехугольнике противолежащие углы попарно равны, то это параллелограмм.

Доказательство легко следует, рассмотрев $\triangle ABC$, равный $\triangle ACD$.

Теорема 3.2.3. *Площадь параллелограмма.*

1) Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, опущенной на эту сторону.

2) Площадь параллелограмма равна произведению смежных сторон на синус угла между ними.

3) Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство

Докажем п.1.

1. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. К стороне AD проведем высоты BK и CH. Докажем, что его площадь будет равна $S_{ABCD} = AD \cdot BK$.

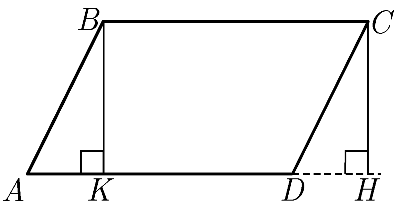


Рис. 3.2.3

2. Рассмотрим прямоугольник $BKCH$. Докажем, что его площадь будет рана площади параллелограмма.

3. Рассмотрим прямоугольные $\triangle DCH$ и $\triangle ABK$: $AB = CD, \angle A = \angle D$. Следовательно, $\triangle DCH = \triangle ABK$ и $S_{\triangle DCH} = S_{\triangle ABK}$.

4. По свойству аддитивности площадей:

$S_{ABCD} = S_{\triangle ABK} + S_{KBCD} = S_{\triangle DCH} + S_{KBCD} = S_{BKCH}$.

5. По теореме 1.3.10 $S_{BKCH} = BC \cdot BK$.

Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то получим: $S_{BKCH} = BC \cdot BK = S_{ABCD} = AD \cdot BK$.

Теорема 3.2.4. *Теорема Вариньона.* Четырёхугольник, вершины которого совпадают с серединами сторон произвольного четырёхугольника, является параллелограммом, стороны которого параллельны диагоналям исходного четырёхугольника.

Параллелограмм, образованный серединами сторон, называется ***вариньоновским*** *или* ***вариньоновым****.*

Доказательство

1. Пусть $ABCD$ – четырехугольник. Точки H, G, F, E – середины сторон AD, DC, CB, AB соответственно.

2. Рассмотрим $\triangle ADC : HG$ – средняя линия, следовательно, $HG \parallel AC$.

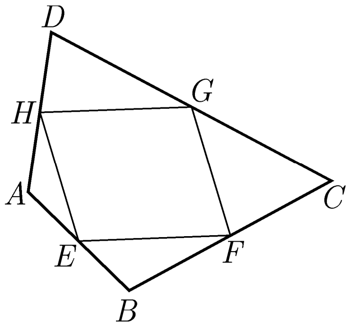


Рис. 3.2.4

Рассмотрим $\triangle ABC : EF$ – средняя линия, следовательно, $EF \parallel AC$. Отсюда, $HG \parallel AC \parallel EF$.

3. Рассмотрим $\triangle DCB : GF$ – средняя линия, следовательно, $GF \parallel DB$.

Рассмотрим $\triangle DAB : HE \parallel BD$ – средняя линия, следовательно, $EF \parallel DB$. Отсюда, $HE \parallel DB \parallel GF$.

4. По определению параллелограмма $HGFE$ - параллелограмм.

Теорема доказана.

Пример 3.2.1. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади исходного.

Доказательство

1. Пусть $ABCD$ – четырехугольник. Точки H, G, F, E – середины сторон AD, DC, CB, AB соответственно (рис. 3.2.4).

2. Так как HE – средняя линия $\triangle ADB$ и $HE \parallel DB$, то $\triangle AEH \sim \triangle ADB$ по первому признаку ($\angle A$ – общий, $\angle AHE = \angle ADB$ как соответственные при параллельных прямых HE и DB и секущей AD). По теореме 2.7.7 $S_{\triangle AEH} = \dfrac{1}{4} S_{\triangle ADB}$.

3. Рассуждая аналогично, получим, что $S_{\vartriangle CFG} = \frac{1}{4} S_{\vartriangle BCD}$, $S_{\vartriangle HDG} = \frac{1}{4} S_{\vartriangle ADC}$, $S_{\vartriangle BEF} = \frac{1}{4} S_{\vartriangle ABC}$.

4. Выразим площадь четырехугольника $HGFE$ следующим образом:

$$S_{HGFE} = S_{ABCD} - S_{\vartriangle AEH} - S_{\vartriangle CFG} - S_{\vartriangle HDG} - S_{\vartriangle BEF} =$$

$$= S_{ABCD} - \frac{1}{4}\left(\underbrace{S_{\vartriangle ADB} + S_{\vartriangle BCD}}_{S_{ABCD}}\right) - \frac{1}{4}\left(\underbrace{S_{\vartriangle ABC} + S_{\vartriangle ADC}}_{S_{ABCD}}\right) =$$

$$= S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Доказано.

Теорема 3.2.5. Диагонали параллелограмма разбивают его на четыре равновеликих треугольника.

Доказательство

1. Рассмотрим $\vartriangle ABD$ и $\vartriangle CBD$, они равны по трем сторонам. Равные фигуры имеет равные площади, следовательно, $S_{\vartriangle ABD} = S_{\vartriangle CBD}$.

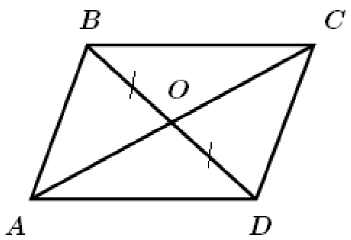


Рис. 3.2.5

2. В $\vartriangle ABD$ AO – медиана, следовательно по теореме 2.7.8, $S_{\vartriangle ABO} = S_{\vartriangle AOD} = \frac{1}{2} S_{\vartriangle ABD}$. Аналогично, $S_{\vartriangle BOC} = S_{\vartriangle OCD} = \frac{1}{2} S_{\vartriangle BCD}$.

3. Из приведенных рассуждений, следует, что $S_{\vartriangle ABO} = S_{\vartriangle AOD} = S_{\vartriangle BOC} = S_{\vartriangle OCD}$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2.6. *Теорема Фалеса.* Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла.

Доказательство

1. Пусть параллельные прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекают стороны $\angle AOB$, причем $A_1A_2 = A_2A_3$. Требуется доказать, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

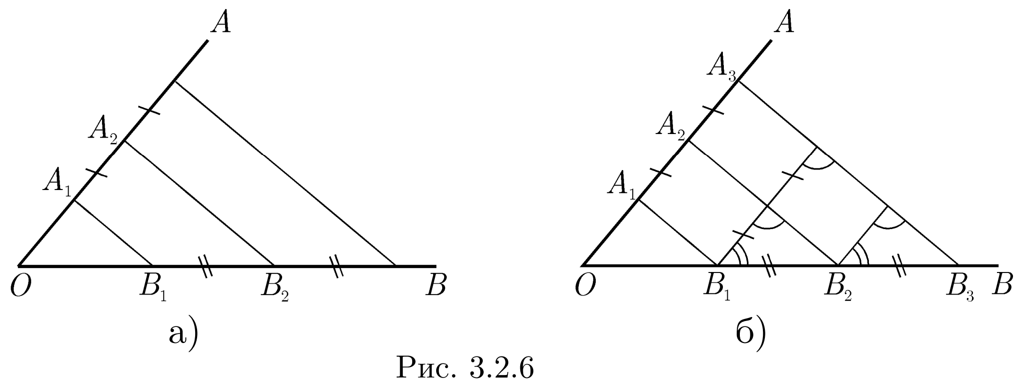


Рис. 3.2.6

2. Проведем B_1L и B_2M параллельно OA (B_1L пересекает A_2B_2 в точке K). Четырехугольники $A_1A_2KB_1$ и $A_2A_3MB_2$ – параллелограммы, поэтому $B_1K = A_1A_2$ и $B_2M = A_2A_3$. Значит, $B_1K = B_2M$.

3. Углы $\angle B_1KB_2 = \angle KLM = \angle B_2MB_3$ равны как соответственные при параллельных прямых. По той же причине $\angle KB_1B_2 = \angle MB_2B_3$. Таким образом, $\triangle B_1KB_2 = \triangle B_2MB_3$ по стороне и двум прилежащим к ней углам. Отсюда следует, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

Теорема доказана.

Прямоугольник

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется *прямоугольником.*

Теорема 3.2.7. Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

Доказательство

1. Докажем, что если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником. Пусть задан параллелограмм $ABCD$, в котором проведены диагонали AC и BD (рис. 3.2.7).

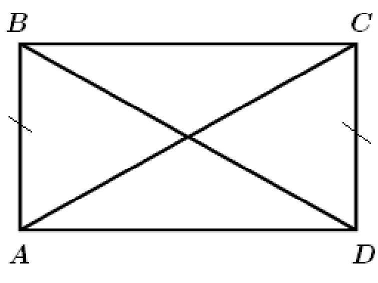


Рис. 3.2.7

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle DCA$: $AC = BD$, $AB = CD$, AD – общая, следовательно, $\triangle ABD = \triangle DCA$ по третьему признаку.

2. Из равенства треугольников следует: $\angle BAD = \angle CDA$.

3. Из свойств параллелограмма имеем: $\angle BAD + \angle CDA = 180^0$. Отсюда получаем $\angle BAD = \angle CDA = 90^0$.

Таким образом, по определению, параллелограмм $ABCD$ – прямоугольник.

Теорема доказана.

Пример 3.2.2. Докажите, что точки попарного пересечения биссектрис всех четырех углов параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

Доказательство

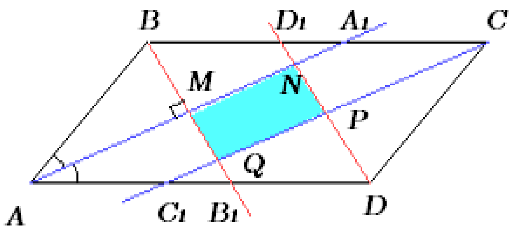


Рис. 3.2.8

1. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором проведены биссектрисы всех углов AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 (рис. 3.2.8).

2. Сумма углов параллелограмма, прилегающих к одной стороне, равна 180^0.

Следовательно, биссектрисы этих углов пересекаются под прямым углом.

Доказано.

Ромб

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом.*

Теорема 3.2.8. *Признаки и свойства ромба.*

1. Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны.

2. Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда диагонали делят его углы пополам.

3. Если в выпуклом четырехугольнике все стороны равны, то он – ромб.

Квадрат

Теорема 3.2.9. *Признаки и свойства квадрата.*

1. Параллелограмм является квадратом тогда и только тогда, когда все его стороны равны и, хотя бы один из его углов равен 90^0.

2. Четырехугольник является квадратом тогда и только тогда, когда диагонали равны, перпендикулярны и делятся пополам в точке пересечения.

3. Если в ромбе все углы прямые, то это квадрат.

4. Если в прямоугольнике все стороны равны, то это квадрат.

3.3. Трапеция

Опр. 3.3.1. *Трапецией* называется четырехугольник, у которого две противоположные стороны (основания) параллельны, а две другие (боковые стороны) нет. *Трапеция называется равнобокой*, если ее боковые стороны равны.

Дополнительные построения

Построение 1. Если через вершину меньшего основания трапеции провести прямую, параллельную ее боковой стороне, до пересечения со вторым основанием, трапеция разбивается на параллелограмм и треугольник (рис. 3.3.1).

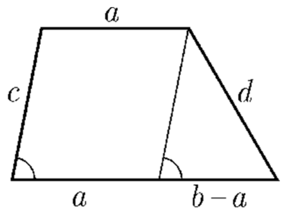


Рис. 3.3.1

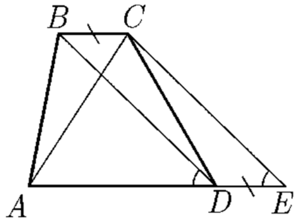


Рис. 3.3.2

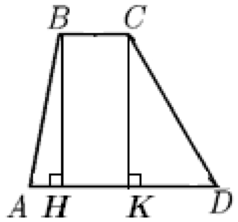


Рис. 3.3.3

Построение 2. Если из вершины C меньшего основания трапеции $ABCD$ провести прямую CE, параллельную диагонали BD, до пересечения с AD в точке E, получится треугольник ACE, две стороны которого равны диагоналям трапеции, а длина третьей стороны равна сумме длин оснований трапеции (рис. 3.3.2).

Построение 3. Из вершин меньшего основания опускают две высоты на нижнее основание. Трапеция разбивается на прямоугольник и два прямоугольных треугольника (рис. 3.3.3).

Построение 4. Продолжение сторон трапеции до пересечения. В результате получаем два подобных треугольника (рис. 3.3.4).

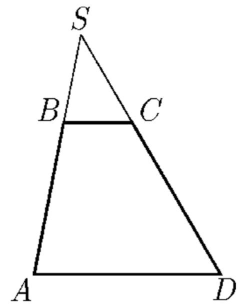


Рис. 3.3.4

Построение 5. Если задан отрезок, соединяющий середины оснований, то проводят из середины верхнего основания две прямые параллельные боковым сторонам. Получается треугольник, у которого две стороны равны боковым сторонам трапеции, а третья сторона есть разность большего и меньшего оснований (рис. 3.3.5).

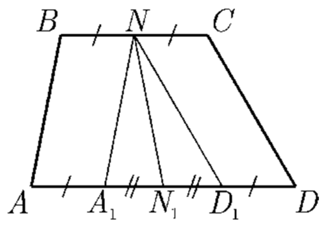


Рис. 3.3.5

Теорема 3.3.1. *О средней линии трапеции.* Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

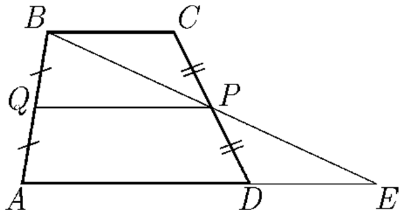


Рис. 3.3.6

1. Пусть задана трапеция $ABCD$. Сделаем дополнительное построение: проведем прямую BP до пересечения с продолжением прямой AD: $BP \cap AD = E$.

2. Рассмотрим $\triangle BCP$ и $\triangle EDP$: $CP = DP$, $\angle BPC = \angle EPD$ (как вертикальные), $\angle BCP = \angle EDP$ (как накрест лежащие углы при параллельных BC и AD и секущей CD). Следовательно, $\triangle BCP = \triangle EDP$.

3. Рассмотрим $\triangle ABE$: Q – середина AB (по условию), P – середина BE (по доказанному), значит, QP – средняя линия $\triangle ABE$ (по определению).

$$QP \parallel AE;\ QP = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

4. Заметим, что $AD \parallel BC$ (по определению трапеции), $QP \parallel AE$ (по доказанному), значит, $QP \parallel BC$.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.2. *Замечательное свойство трапеции.* Точка пересечения продолжения боковых сторон, точка пересечения диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой.

Доказательство

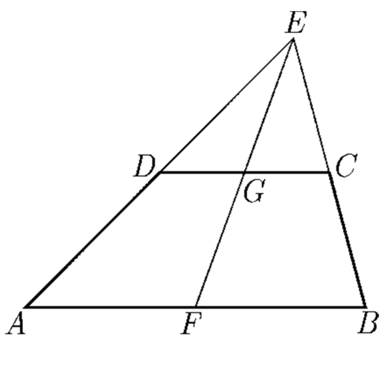


Рис. 3.3.7

1. Пусть боковые стороны AD и BC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E; F – середина AB. Докажем, что EF пересекает CD в точке G, являющейся серединой CD.

2. Заметим, что $\triangle EAF \sim \triangle EDG$ по первому признаку подобия с коэффициентом подобия $k = \dfrac{EG}{EF}$.

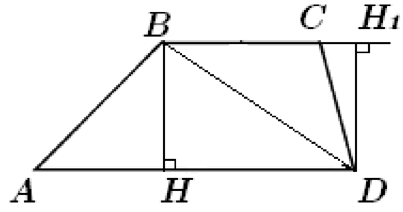
3. Заметим, что $\triangle EBF \sim \triangle ECG$ по первому признаку подобия с коэффициентом подобия $k = \dfrac{EG}{EF}$. Следовательно, $DG = AF \cdot k = FB \cdot k = GC$.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.4. *Площадь трапеции* вычисляется по формуле: $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b – длины оснований, а h – длина высоты трапеции.

Доказательство

1. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотами BH и DH_1 и площадью S. Докажем, что $S = \dfrac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$.



2. Диагональ BD разделяет трапецию на два $\vartriangle ABD$ и $\vartriangle BDC$, поэтому $S = S_{\vartriangle ABD} + S_{\vartriangle BDC}$.

$S_{\vartriangle ABD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot BH$, $S_{\vartriangle BDC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot DH_1$.

Рис. 3.3.8

$$S = S_{\vartriangle ABD} + S_{\vartriangle BDC} = S_{\vartriangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH + \frac{1}{2} BC \cdot DH_1 = \frac{1}{2} BH \cdot (AD + BC).$$

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Теорема доказана.

Задачи, описывающие свойства средней линии, диагоналей трапеции и отрезка, соединяющего середины оснований трапеции

Задача 1. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Доказать, что средняя линия трапеции равна отрезку, соединяющему середины ее оснований.

Доказательство

1. Пусть в трапеции $ABCD$ точки M и N – середины оснований AD и BC, $E = AC \cap BD$.

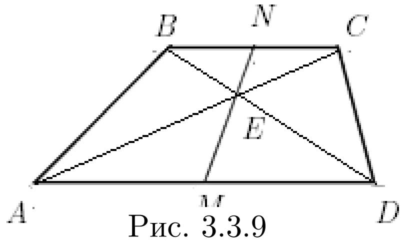


Рис. 3.3.9

2. По замечательному свойству трапеции точки M, N, E лежат на одной прямой.

3. Треугольники BEC и AED – прямоугольные по условию. Известно, что медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

4. Поэтому отрезок MN состоит из отрезков ME и NE, равных половинам MA и NB оснований трапеции, т.е. он равен ее средней линии.

Задача 2. Основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

Решение

1. Пусть M и N – середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, в которой $AD = a$, $BC = b$.

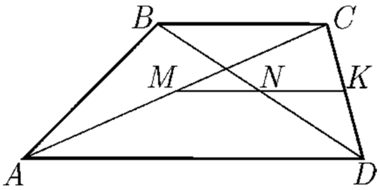


Рис. 3.3.10

2. Соединим точку M с серединой K боковой стороны CD. По теореме о средней линии треугольника $MK \parallel AD \parallel BC$. Аналогично, $NK \parallel BC$. Следовательно, точки M, N и K лежат на средней линии трапеции.

3. Таким образом,

$$MN = MK = KN = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{1}{2}(a - b).$$

Задача 3. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90^0. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полусумме.

Доказательство

1. Пусть M и N – середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, в которой $AD = a$, $BC = b$, $a > b$ и $\angle A + \angle D = 90^0$.

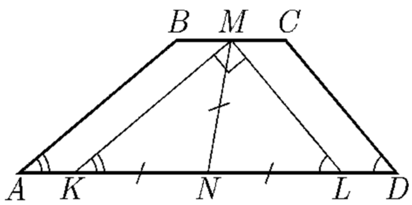


Рис. 3.3.11

2. Через точку M проведем прямые, параллельные AB и CD. Пусть K и L – точки их пересечения с основанием AD.

3. Тогда $\angle MKL + \angle MLK = \angle A + \angle D = 90^0$.

Поэтому $\triangle MKL$ – прямоугольный и $MN = \frac{1}{2}KL$ как медиана в прямоугольном треугольнике, проведенном из вершины прямого угла. Тогда $KL = AD - AK - LD = a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b = a - b.$ Следовательно, $MN = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}(a - b)$.

3.4. «Расчет четырехугольников»

Пример 3.4.1. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от ее середины. Из нее на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырехугольник, образованный основаниями перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60^0 [64].

Решение

а) Возьмем на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ точку O и проведем через нее перпендикуляры NL и KM к сторонам параллелограмма.

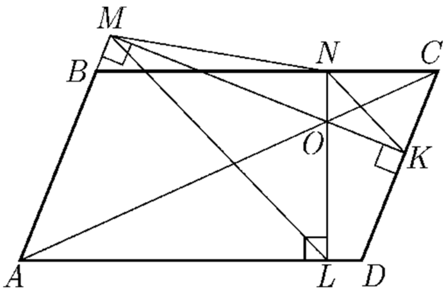


Рис. 3.4.1

1. Рассмотрим прямоугольные $\triangle CKO$ и $\triangle AMO$: $\angle COK = \angle AOM$ – как вертикальные, $\angle CKO = \angle AMO = 90^0$.
По первому признаку треугольники $\triangle CKO$ и $\triangle AMO$ подобны.

2. Рассмотрим прямоугольные $\triangle CNO$ и $\triangle ALO$: $\angle CON = \angle AOL$ – как вертикальные, $\angle CNO = \angle ALO = 90^0$. По первому признаку треугольники $\triangle CKO$ и $\triangle AMO$ подобны. Следовательно,

$$\frac{OK}{OM} = \frac{OC}{OA} = \frac{ON}{OL}.$$

3. Рассмотрим $\triangle ONK$ и $\triangle OLM$, они подобны по второму признаку. Отсюда, $\angle OML = \angle OKN$. Эти углы являются накрест лежащими при прямых NK *и* ML и секущей MK. По признаку параллельности двух прямых $NK \parallel ML$. Следовательно, $KLMN$ – параллелограмм или трапеция.

4. Если $KLMN$ – параллелограмм, то $ON=OL$ и $OC=OA$, то есть O – середина AC, что противоречит условию. Значит $KLMN$ – трапеция.

б) Обозначим площадь параллелограмма S, а его острый угол – α. Угол между диагоналями NL и KM трапеции $KLMN$ равен углу между перпендикулярными к диагоналям прямыми BC и CD, то есть этот угол равен α.

1. Поэтому площадь трапеции можно найти по формуле: $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 d_2 \sin\alpha$.

$$S_{NMLK} = \frac{1}{2} \cdot NL \cdot KM \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{AD} \cdot \frac{S}{AB} \cdot \sin\alpha =$$
$$= \frac{S \cdot AD \cdot AB \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot AD \cdot AB} = \frac{S \cdot \sin^2\alpha}{2}.$$

2. Подставляя $\alpha = 60^0$, $S = 16$, получаем, что площадь трапеции равна $S_{NMLK} = \frac{16\sin^2 60^0}{2} = \frac{16 \cdot 3}{8} = 6$.

Ответ: $S_{NMLK} = 6$.

Пример 3.4.2. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 и 13 см.

Решение

1. Пусть в трапеции $ABCK$ $BC \parallel AK$, BD и CD – биссектрисы тупых углов, DE – высота (рис. 3.4.2).

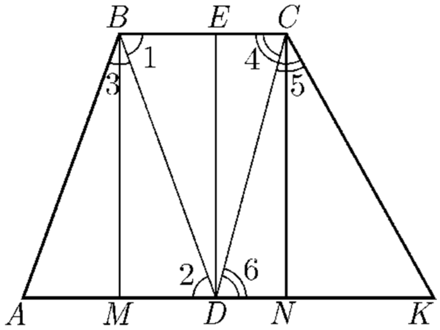


Рис. 3.4.2

2. Из условия:
$DE = 12, BD = 15, CD = 13.$

Из $\triangle BDE$ $(\angle BED = 90^0)$:

$BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = 9.$

Из $\triangle CDE$ $(\angle CED = 90^0)$:

$CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = 5.$

Тогда $BC = BE + CE = 14$.

3. $\angle 1 = \angle 3$ – по условию, $\angle 1 = \angle 2$ – внутренние накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей BD. Следовательно, $\angle 2 = \angle 3$, $AD = AB$.

Аналогично, $\angle 5 = \angle 6, CK = DK.$

4. Пусть BM и CN – высоты трапеции. Тогда, $BM = CN = DE = 12$, $MD = BE = 9, DN = EC = 5.$

5. Пусть $AB = x$, тогда $AM = (x - 9)$.

6. Из $\triangle AMB$ $\left(\angle AMB = 90^0\right)$:

$AB^2 = AM^2 + BM^2 \to x^2 = (x-9)^2 + 144$, $x = 12{,}5$.

Следовательно, $AD = AB = 12{,}5$.

7. Пусть $CK = y$, тогда $NK = (y-5)$. Из $\triangle CNK$ $\left(\angle CNK = 90^0\right)$:

$CK^2 = CN^2 + NK^2 \to y^2 = (y-5)^2 + 144$, $y = 16{,}9$.

8. Следовательно, $DK = CK = 16{,}9$.

Тогда $AK = AD + DK = 29{,}4$.

Ответ: $29{,}4; 12{,}5; 14; 16{,}9$.

Пример 3.4.3. Точки M и N расположены на стороне BC $\triangle ABC$, а точка K – на стороне AC, причём $BM : MN : NC = 1 : 1 : 2$ и $CK : AK = 1 : 4$. Известно, что $S_{\triangle ABC} = 1$. Найдите площадь четырёхугольника $AMNK$.

Решение

Рассмотрим $\triangle ABC$, у которого проведены чевианы AM и AN.

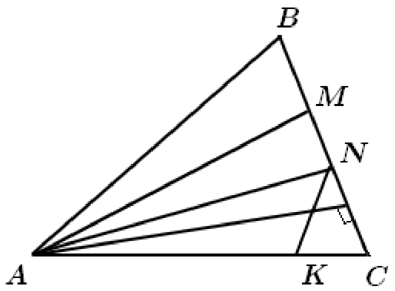


Рис. 3.4.3

1. У треугольников AMB и ABC общая высота, проведённая из вершины A, поэтому их площади относятся как основания, значит,

$$S_{\triangle AMB} = \frac{BM}{BC} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

2. Аналогично, $S_{\triangle ANC} = \dfrac{1}{2}$, $S_{\triangle CNK} = \dfrac{CK}{AC} \cdot S_{\triangle ANC} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10}$.

3. $S_{AMNK} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMB} - S_{\triangle CNK} = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{13}{20}$.

Ответ: $S_{AMNK} = \dfrac{13}{20}$.

Задания для практических занятий

Познакомьтесь с теоретическим материалом и примерами задач с решениями. Рекомендуемая литература: [1, 5, 8, 15, 17, 20, 34, 36, 38, 50,51, 57, 58,59, 60].

Теоретические задания в мини-группах

Задание 1. Доказать все свойства и признаки квадрата. Доказать признаки и свойства равнобочной трапеции.

Задание 2. Доказать различные формулы для вычисления площадей параллелограмма, ромба, трапеции.

Задание 3. Вывести метрические соотношения в четырехугольнике.

Задание 4. Доказать теорему косинусов для четырёхугольника.

Задание 5. Вывести соотношение Бретшнайдера и следствия из него.

Практические задания

Задание 6. Доказать истинность математических утверждений

3.6.1 Сумма внешних углов многоугольника равна 360^0.

3.6.2 Два четырехугольника равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: а) четыре стороны и угол одного четырёхугольника равны четырем сторонам и углу другого четырёхугольника; б) две стороны и три угла одного четырехугольника равны двум сторонам и трем углам другого треугольника.

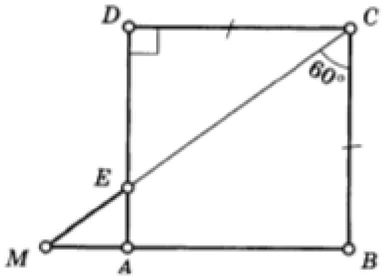
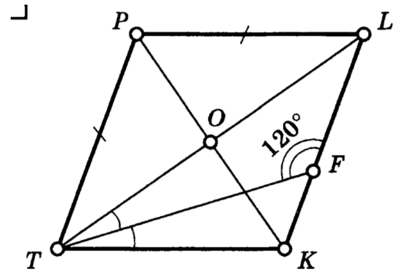
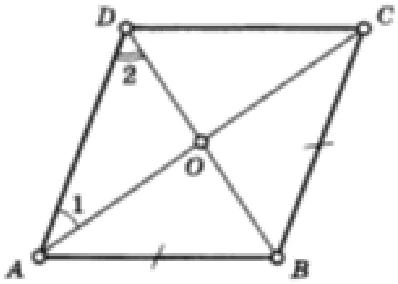
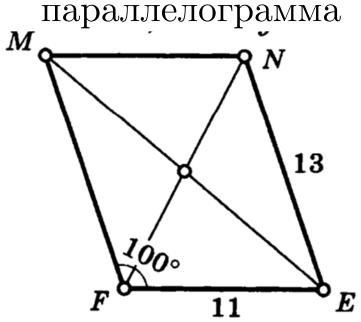
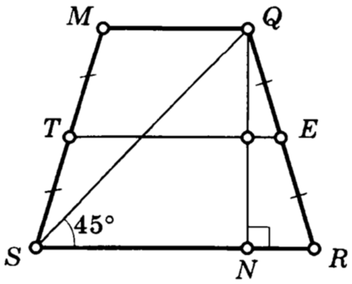
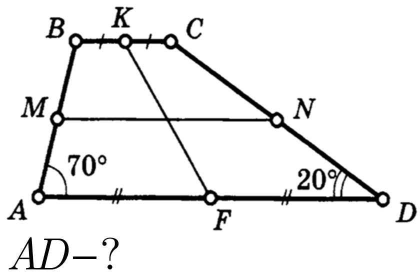
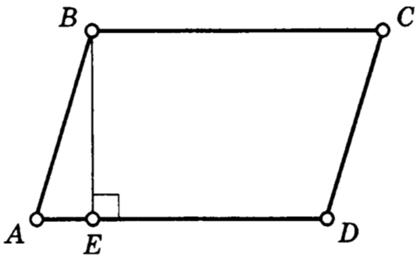
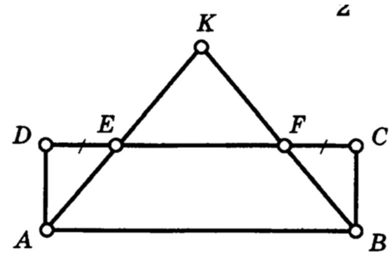
3.6.3 Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на четыре треугольника, периметры которых равны. Докажите, что этот четырехугольник – ромб.

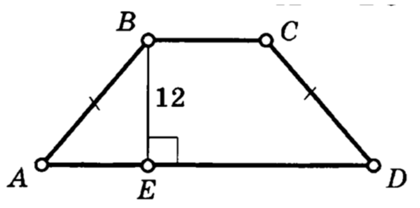
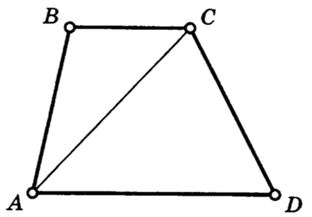
3.6.4 На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих квадратов являеются вершинами квадрата.

3.6.5 Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

3.6.6 Точки X и Y – середины диагоналей соответственно AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Прямые BC и AD пересекаются в точке P. Докажите, что площадь треугольника PXY в четыре раза меньше площади четырёхугольника $ABCD$.

Задание 7. Решить задачи «на готовых чертежах» [5]

Найти периметр четырехугольника $ADCB$, если $MC = 18$ 	Найти углы параллелограмма 
Найти углы параллелограмма, $\angle 1 : \angle 2 = 1 : 4$ 	Найти диагонали параллелограмма 
$SMQR$ – трапеция $QN = 4,\ TE - ?$ 	$ABCD$ – трапеция, MN – средняя линия, $KF = 2,\ MN = 4$  $BC,\ AD - ?$
Найти площадь параллелограмма $BE : AD = 1 : 3,\ AD - BE = 8$ 	Найти площадь прямоугольника $ABCD$, если $S_{\triangle EKF} = 28$ $DC : AD = 7 : 4,\ DE = FC = \dfrac{1}{2}EF$ 

Найти площадь трапеции $BC = \frac{1}{2}ED,\ AD - BC = 4$  	Найти площадь трапеции $BC : AD = 3 : 4,\ S_{\triangle ABC} = 30$ 

Задание 8. Решить задачи «на вычисление»

3.8.1. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900^0. Сколько у него сторон?

3.8.2. Найдите суммы углов семиконечной звездочки.

3.8.3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и B – прямые, величина угла при вершине D равна 45^0. Длина стороны BC равна 1 м, длина диагонали BD равен 5 м. Найти площадь этого четырехугольника.

Ответ: 7,5 м.

3.8.4. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найти площадь четырехугольника.

Ответ: 14.

3.8.5. Площадь $\triangle ABC$ равна 105. Биссектриса BD пересекает медиану CM в точке O, при этом $CD : AD = 1 : 5$. Найдите площадь четырёхугольника $AMOD$.

Ответ: 50.

3.8.6. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если из четырёх следующих утверждений о нём три истинны, а одно ложно:

1) $ABCD$ – квадрат;

2) $ABCD$ – трапеция с тремя равными сторонами;

3) периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 56;

4) сумма длин трёх сторон четырёхугольника $ABCD$ на 28 больше длины его четвёртой стороны.

Ответ: 196.

3.8.7. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O под углом α. Точка F принадлежит отрезку AC. Известно, что

BO=10, DO=14, AC=18. Найдите AF, если площадь $\triangle FBC$ в четыре раза меньше площади четырехугольника $ABCD$.

Ответ: 7,2.

3.8.8. На стороне AC $\triangle ABC$ взята точка E. Через точку E проведена прямая DE параллельно BC и прямая EF параллельно стороне AB (точка D лежит на стороне AB, а точка F – на стороне BC). Площадь $\triangle ADE$ равна 9, а площадь $\triangle EFC$ равна 4. Найти площадь параллелограмма $EDBF$.

Ответ: 12.

3.8.9. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а высота, проведенная из точки D, пересекает большую диагональ в точке E. Найдите длину DE, если известно, что площаь ромба равна 20, а косинус острого угла $\frac{3}{5}$.

3.8.10. Высота LH ромба $KLMN$ делит сторону KN на отрезки $KH = 2$ и $NH = 2$. Найдите высоту ромба.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

3.8.11. Площадь трапеции равна 27, основания 8 и 16. Найдите площади треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.

3.8.12. Длина средней линии трапеции равна 5, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, – 3. Углы при большем основании равны 30^0 и 60^0. Найти основания трапеции и ее площадь.

Ответ: $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

3.8.13. В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD, $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите AD, если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D = 60^0$.

Ответ: 8 см.

3.8.14. Углы при одном из оснований трапеции равны 53^0 и 37^0, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 6 и 2. Найдите основания трапеции.

Ответ: 8 и 4.

3.8.15. В трапеции с основаниями 10 и 6 меньшая диагональ перпендикулярна к основаниям. Сумма острых углов равна 90^0. Найдите боковые стороны.

Ответ: $4\sqrt{10}, 4\sqrt{6}$.

3.8.16. В трапеции $ABCD$ биссектрисы тупых углов при основании BC пересекаются в точке K, принадлежащий другому основанию, $BK = 7,5$, $CK = 6,5$. Найдите основания трапеции, если высота трапеции равна 6.

3.8.17. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известно, что $\angle ADP = \frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP = \frac{2}{3}\angle PAD$ и $AD = BD = CD$. а) Найдите все углы четырехугольника. б) Докажите, что $AB^2 = BP \cdot BD$.

Ответ: $75^0, 135^0, 60^0, 90^0$.

Задание 9. Решить задачи «в общем виде»

3.9.1. Стороны параллелограмма равны a и b, а угол между диагоналями равен α. Найдите площадь параллелограмма.

3.9.2. Стороны параллелограмма равны a и b. Через вершины тупых углов этого параллелограмма проведены прямые, перпендикулярные сторонам. Эти прямые при пересечении образуют параллелограмм, подобный исходному. Найти косинус острого угла данного параллелограмма.

Указание: разберите два случая: первый, когда основания перпендикуляров находятся на сторонах параллелограмма, и второй, когда один из перпендикуляров не пересекает сторону, на которую он опущен. В одном из случаев будет противоречие.

3.9.3. Два квадрата со стороной a имеют одну общую вершину, причем сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

3.9.4. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна h, а диагонали взаимно перпендикулярны.

3.9.5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC сумма оснований равна b, диагональ AC равна a, $\angle ACB = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

3.9.6. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны S_1 и S_2. Найти площадь трапеции.

Указание: Пусть ABCD – трапеция с основаниями AB и DC. Найти пары подобных треугольников. Выразить коэффициент подобия через известные площади на основании теоремы 2.7.5.

Ответ: $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Задание 10. Решить задачи повышенного уровня сложности

3.10.1. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

Указание: докажите равенство $\triangle C_1MB_1 = \triangle BNA_1$, $\triangle A_1KB_1 = \triangle BNC_1$, *где* A_1, B_1, C_1 *– середины сторон* BC, AC, AB. *M – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точки* C_1 *на AC и из точки* B_1 *на AB; точка N – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точки* C_1 *на BC и из точки* A_1 *на AB; K – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точки* A_1 *на AC и из точки* B_1 *на BC.*

3.10.2. Доказать, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырехугольника равна его полупериметру, то четырёхугольник является параллелограммом.

Указание: доказать, что точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, и середина диагонали совпадают.

3.10.3. Одно из оснований трапеции $ABCD$ вдвое больше другого. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно, O – точка пересечения диагоналей трапеции. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если площадь трапеции равна 72.

Указание: ввести опорные элементы: пусть h – высота трапеции, а основания равны a и 2a, используя $ah = 48$.

Ответ: 8 или 3,2.

РАЗДЕЛ 4. ОКРУЖНОСТЬ

Введем основные определения.

Опр. 4.1. *Окружность* – это фигура, которая состоит из множества точек плоскости, равноудаленных от данной точки (*центра*). Отрезок, соединяющий любую точку на окружности с центром окружности, называется *радиусом* (r).

Опр. 4.2. *Хорда* – отрезок, соединяющий две точки окружности. В частности, хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром.* Диаметр окружности равен двум радиусам.

Опр. 4.3. *Секущей к окружности* называется прямая, которая пересекает окружность в двух *различных точках.*

Опр. 4.4. *Касательная* к окружности – прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку.

Опр. 4.5. *Круг* – часть плоскости, ограниченная окружностью.

Опр. 4.6. *Дуга окружности* – это часть окружности, заключённая между двумя точками на окружности[15].

Теорема 4.1. *Свойство окружности.* Через три точки на плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, причем только одну.

Доказательство

1. Пусть нам даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой (см. рис. 4.1.)

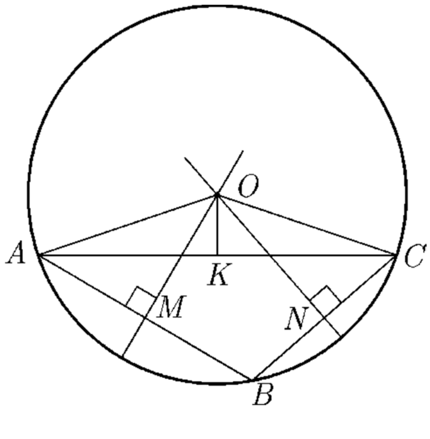


Рис. 4.1

2. Соединим эти точки отрезками AB и BC. Чтобы найти точки, равноудалённые от точек A и B разделим отрезок AB пополам и через середину (точку M) проведём прямую перпендикулярную к AB.

Каждая точка этого перпендикуляра одинаково удалена от точек A и B.

3. Чтобы найти точки, равноудалённые от точек B и C, разделим отрезок BC пополам и через его середину (точку N) проведем

[15] В настоящем пособии дугу будем обозначать следующим образом: $\overset{\smile}{AB}$.

прямую, перпендикулярную BC. Каждая точка этого перпендикуляра одинаково удалена от точек B и C.

4. Точка O пересечения этих перпендикуляров будет находиться на одинаковом расстоянии от данных точек A, B и C ($AO = BO = CO$). Если мы, приняв точку O за центр круга, радиусом, равным AO, проведём окружность, то она пройдёт через все данные точки A, B и C.

5. Точка O является единственной точкой, которая может служить центром окружности, проходящей через три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, так как два перпендикуляра к отрезкам AB и BC могут пересечься только в одной точке. Значит, задача имеет единственное Решение

Замечание. Если три точки A, B и C будут лежать на одной прямой, то задача не будет иметь решения, так как перпендикуляры к отрезкам AB и BC будут параллельны и не будет существовать точки, одинаково удаленной от точек A, B, C, т. е. точки, которая могла бы служить центром искомой окружности.

Если соединить отрезком точки A и C и середину этого отрезка (точку K) соединить с центром окружности O, то OK будет перпендикулярна к AC (рис. 4.1), так как в равнобедренном $\triangle AOC$ OK является медианой, поэтому $OK \perp AC$.

Теорема доказана.

Замечания.

1^0. Окружность разбивает множество всех точек плоскости, не принадлежащих ей, на два подмножества: внутреннюю и внешнюю области относительно окружности.

2^0. Прямая и окружность не могут иметь более чем две общие точки. *Легко доказывается методом от противного.*

Теорема 4.2. *О взаимном расположении прямой и окружности.* Путь d – расстояние от центра O окружности радиуса r до данной прямой l. Тогда, если $d < r$, то прямая и окружность пересекаются, если $d = r$ – прямая имеет с окружностью только одну общую точку, если $d > r$ – ни одной общей точки [4, с. 148].

4.1. Углы, ассоциированные с окружностью

Опр. 4.1.1. *Центральный угол* – это угол, вершина которого лежит в центре окружности.

Опр. 4.1.2. *Вписанный угол* – это угол, вершина которого лежит на окружности.

Опр. 4.1.3. *Градусная мера дуги окружности* – это градусная мера центрального угла, который на неё опирается.

Теорема 4.1.1. Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Доказательство

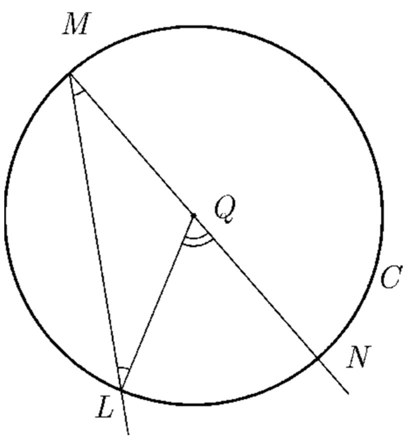


Рис. 4.1.1

Вписанный угол по отношению к центру окружности может располагаться так, что этот центр лежит: а) на одной из сторон угла; б) внутри угла; в) вне угла (рис. 4.1.1).

а) Пусть центр Q окружности принадлежит стороне $\angle LMN$.

Докажем, что величина $\angle LMN$ равна половине градусной меры дуги LN.

$\angle LQN = \angle LMQ + \angle QLM$ как внешний угол $\triangle QLM$.

Так как $\triangle QLM$ – равнобедренный, то $\angle LMQ = \angle QLM$. Значит, $\angle LQN = 2\angle LMQ$, или $\angle LMQ = \dfrac{1}{2}\angle LQN$.

Поскольку градусные меры центрального угла $\angle LQN$ и дуги LN равны, то $\angle LMQ = \dfrac{1}{2} \cup LN$.

б) Пусть центр Q окружности лежит внутри $\angle LMN$. Докажем, что величина $\angle LMN$ равна половине градусной меры дуги LN.

Проведем диаметр MP. Тогда луч MP разобьет $\angle LMN$ на два $\angle LMP$ и $\angle PMN$, в каждом из которых одна сторона проходит через центр. Используя доказанное в а), получим:

$$\angle LMN = \angle LMP + \angle PMN = \frac{1}{2} \cup LP + \frac{1}{2} \cup PN = \frac{1}{2} \cup LN.$$

в) Пусть центр Q окружности лежит вне $\angle LMN$. Докажем, что величина $\angle LMN$ равна половине градусной меры дуги LN.

Проведем диаметр MP. Тогда $\angle LMN = \angle LMP - \angle NMP$.

Используя доказанное в а) получим:
$$\angle LMN = \angle LMP - \angle NMP = \frac{1}{2} \cup LP - \frac{1}{2} \cup NP = \frac{1}{2} \cup LN.$$

Таким образом, градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую этот угол опирается.

Теорема доказана.

Следствия

1⁰. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

2⁰. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.

Теорема 4.1.2. Угол между пересекающимся хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

Доказательство

1. Пусть задана окружности и две пересекающиеся хорды AC и BD (рис. 4.1.2).

Покажем, что $\angle CMD = \frac{1}{2}\left(\overset{\cup}{AB} + \overset{\cup}{CD}\right)$.

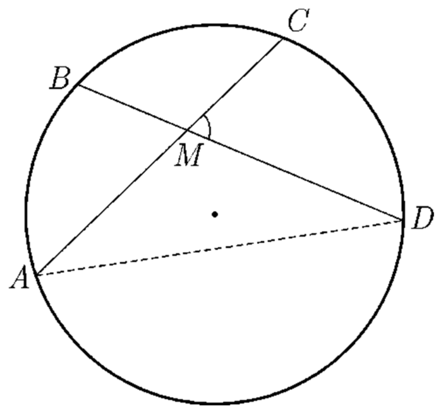


Рис. 4.1.2

2. Заметим, что $\angle BMA = \angle CMD$ как вертикальные.

3. Из $\triangle AMD$:
$$\angle AMD = 180^0 - \angle BDA - \angle CAD =$$
$$= 180^0 - \frac{1}{2}\overset{\cup}{AB} - \frac{1}{2}\overset{\cup}{CD}.$$

4. Но $\angle AMD = 180^0 - \angle CMD$,

откуда заключаем, что $\angle CMD = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\cup}{CD} = \frac{1}{2}\left(\overset{\cup}{AB} + \overset{\cup}{CD}\right)$.

Теорема доказана.

Теорема 4.1.3. Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

Доказательство

1. Рассмотрим окружность и две секущие MB и MD (рис. 4.1.3).

Покажем, что $\angle DMB = \frac{1}{2}\left(\overset{\cup}{BD} - \overset{\cup}{CA}\right)$.

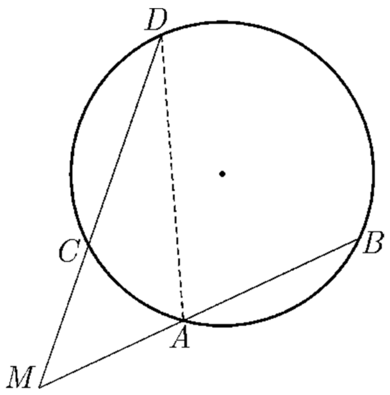


Рис. 4.1.3

2. Заметим, что $\angle DAB$ – внешний угол $\triangle MAD$, тогда $\angle DAB = \angle DMB + \angle MDA$, откуда $\angle DMB = \angle DAB - \angle MDA$, но углы $\angle DAB$ и $\angle MDA$ – вписанные, тогда $\angle DMB = \angle DAB - \angle MDA =$

$$= \frac{1}{2}\overset{\smile}{BD} - \frac{1}{2}\overset{\smile}{CA} = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{BD} - \overset{\smile}{CA}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 4.1.4. Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

Доказательство

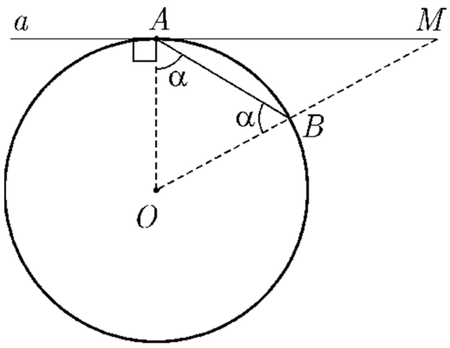


Рис. 4.1.4

1. Пусть прямая a касается окружности в точке A, AB – хорда этой окружности, O – ее центр. Пусть прямая, содержащая OB, пересекает a в точке M (рис. 4.1.4).

Докажем, что $\angle BAM = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$.

2. Обозначим $\angle OAB = \alpha$. Так как OA и OB – радиусы, то $OA = OB$ и $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$.

3. Таким образом, $\overset{\smile}{AB} = \angle AOB = 180^0 - 2\alpha = 2\left(90^0 - \alpha\right)$.

4. Так как OA – радиус, проведенный в точку касания, то $OA \perp a$, т.е. $\angle OAM = 90^0$, следовательно, $\angle BAM = 90^0 - \alpha = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$.

Теорема доказана.

4.2. Хорды, касательные и секущие

Теорема 4.2.1. Справедливы следующие утверждения:

а) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;

б) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющийся диаметром, перпендикулярен этой хорде;

в) окружность симметрична относительно своего диаметра.

г) дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны;

д) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.

Теорема 4.2.2. *О хордах.* Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.

Доказательство

1. Пусть хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 4.2.1).

2. Рассмотрим $\triangle AMC$ и $\triangle DMC$: $\angle BAC = \angle BDC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, $\angle CMA = \angle BMD$ как вертикальные.

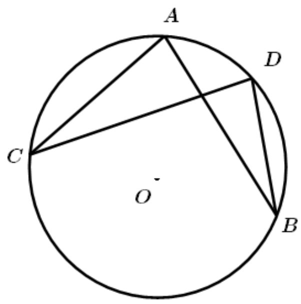


Рис. 4.2.1

3. Следовательно, $\triangle AMC \sim \triangle DMC$, поэтому $\dfrac{AM}{DM} = \dfrac{CM}{BM}$, откуда $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Теорема доказана.

Теорема 4.2.3. *О касательной.* Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

Доказательство

1. Пусть заданы окружность $\gamma(O,R)$ и касательная a, точка A – точка касания (рис. 4.2.2).

2. Предположим противное, что радиус OA и прямая a не перпендикулярны. Опустим из точки O на прямую a перпендикуляр OB. Тогда OA – наклонная, проведенная из точки O на прямую a.

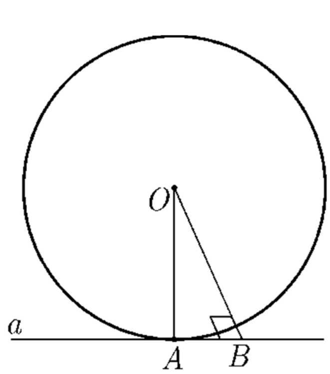


Рис. 4.2.2

По свойству перпендикуляра и наклонной (пример 2.6.7): любая наклонная больше перпендикуляра, опущенного из одной точки. Значит, $OA > OB$.

2. Получается, расстояние от точки O до прямой a – длина перпендикуляра OB – меньше радиуса. Из этого следует, что прямая a и окружность имеют две общие точки.

3. Противоречие получили, так как предположили, что радиус OA и касательная a не перпендикулярны. Значит, касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания: $a \perp OA$.

Теорема доказана.

Теорема 4.2.4. *Признак касательной.* Если прямая, проходящая через точку, лежащую на окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к окружности.

Теорема 4.2.5. Отрезки касательных, проведенные из одной точки к окружности, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Доказательство

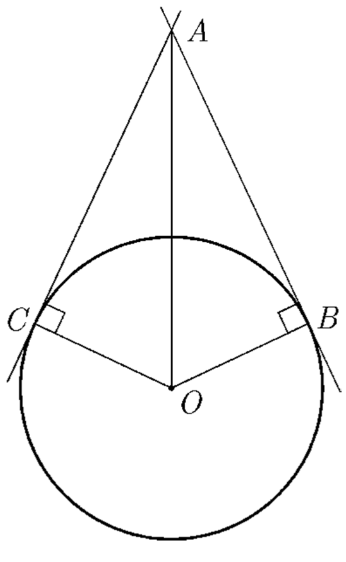


Рис. 4.2.3

1. Пусть заданы окружность $\gamma(O,R)$ и точка A – точка, не принадлежащая окружности. Проведем из точки две касательные AC и AB (рис. 4.2.3).

Докажем, что $AC = AB$ и $\angle CAO = \angle OAB$.

2. Проведем радиусы OC и OB. Рассмотрим $\triangle CAO$ и $\triangle OAB$.

По теореме 4.2.3: $\triangle CAO$ и $\triangle OAB$ – прямоугольные. Следовательно, $\triangle CAO = \triangle OAB$ по катету и гипотенузе.

3. По свойству равных треугольников: $AC = AB$ и $\angle CAO = \angle OAB$.

Теорема доказана.

Замечание 4.2.1. Окружность называется вписанной в угол, если она касается сторон угла, т.е. имеет с каждой стороной угла одну общую точку. Центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе.

Теорема 4.2.6. *О касательной и секущей.* Точка A находится вне некоторой окружности. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP, где P – точка касания. Через точку A проведена секущая, пересекающая окружность в точках R и S. Справедливо равенство: $AR \cdot AS = AP^2$.

Доказательство

Рассмотрим окружность с центром в точке O и касательной AP (рис. 4.2.4).

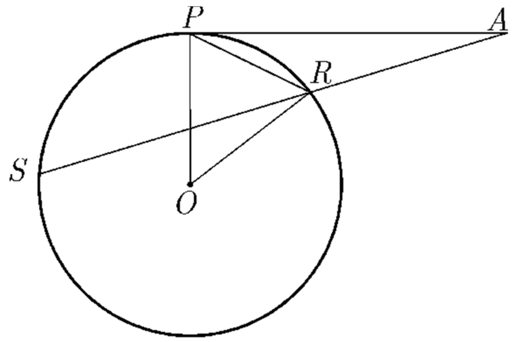


Рис. 4.2.4

1. Рассмотрим $\triangle OPR$: $OP = OR$, как радиусы. Значит, $\angle OPR = \frac{1}{2}(\pi - \angle POR) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle POR.$

2. Угол APO – прямой, т.к. AP – касательная. Следовательно, $\angle APR = \frac{\pi}{2} - \angle OPR = \frac{1}{2}\angle POR.$

3. $\angle PSR = \frac{1}{2}\angle POR$ как вписанный, равный половине центрального угла.

4. Из того, что $\angle APR = \frac{1}{2}\angle POR$ и $\angle PSR = \frac{1}{2}\angle POR$, следует, что $\angle APR = \angle PSR$.

5. Рассмотрим $\triangle APR$ и $\triangle APS$: $\angle A$ – общий, $\angle APR = \angle PSA$. Таким образом, треугольники подобны. Из подобия следует:

$$\frac{AP}{AS} = \frac{AR}{AP} \Leftrightarrow AP^2 = AR \cdot AS.$$

Теорема доказана.

4.3. Две окружности

Рассмотрим специфику задач, в которых присутствует две и более окружностей. Возможно три случая расположения двух окружностей: когда две окружности касаются друг друга в одной точке, когда две окружности пересекаются в двух точках, когда две окружности не имеют общих точек.

Касающиеся окружности

Это наиболее распространенный случай взаимного расположения двух окружностей. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют общую точку, называемой точкой касания.

При решении таких задач необходимо учитывать, что касание окружностей бывает двух видов – внутреннее и внешнее. Если через точку касания провести общую касательную к каждой из этих окружностей, то относительно этой прямой окружности будут располагаться либо обе с одной стороны, либо соответственно с разных сторон. Неучет этого обстоятельства и рассмотрение только одного из двух возможных случаев касания часто является причиной неполного решения поставленной задачи [17, с. 153].

Теорема 4.3.1. *О линии центров двух окружностей.* Точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей.

Доказательство

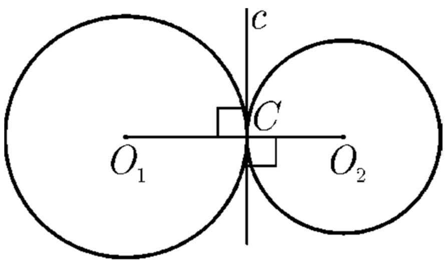


Рис. 4.3.1 а)

1. Пусть заданы две окружности $\gamma_1(O_1,R_1)$ и $\gamma_2(O_2,R_2)$, их общая точка касания C *и* их общая касательная c. Докажем, что точки O_1, O_2, C лежат на одной прямой (рис. 4.3.1 а).

2. Проведем радиусы O_1C и O_2C в точку касания C.

По теореме 4.2.3 $O_1C \perp c$, $O_2C \perp c$.

3. По теореме 1.3.7 существует единственная прямая, перпендикулярная прямой c. Следовательно, перпендикуляры O_1C и O_2C лежат на одной прямой.

Теорема доказана.

Следствие 1. Общая касательная к двум окружностям, проведенная через точку их взаимного касания, перпендикулярна линии центров этих окружностей. *Действительно,* $O_1O_2 \perp c$.

Следствие 2. Расстояние между центрами двух окружностей в случае внешнего касания равно сумме их радиусов. В случае внутреннего касания это расстояние равно модулю разности окружностей (рис. 4.3.1 б).

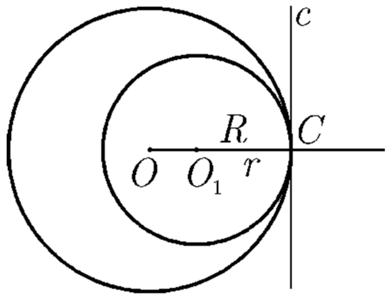


Рис. 4.3.1 б)

1. Рассмотрим случай внешнего касания, тогда $O_1O_2 = O_1C + CO_2 = R_1 + R_2$.

2. Рассмотрим случай внутреннего касания, тогда $O_1O_2 = O_1C - CO_2 = R_1 - R_2$.

Теорема 4.3.2. У касающихся друг друга внешним образом окружностей существуют две общие касательные AB и MC. Точка пересечения M этих касательных является центром окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, вершинами которого являются точки касания (точки C, A и B). Точка M также является вершиной прямоугольного треугольника, гипотенуза которого – отрезок O_1O_2, соединяющий центры окружностей (рис. 4.3.3).

Доказательство

1. Так как $MA = MC$ и $MC = MB$, то M – середина гипотенузы прямоугольного $\triangle ABC$.

2. Кроме того, из равенства прямоугольных треугольников $\triangle AMO_1$ и $\triangle CMO_1$ следует равенство соответствующих углов $\angle AMO_1 = \angle CMO_1$, а потому O_1M и O_2M являются биссектрисами смежных углов AMC и CMB, следовательно, они перпендикулярны.

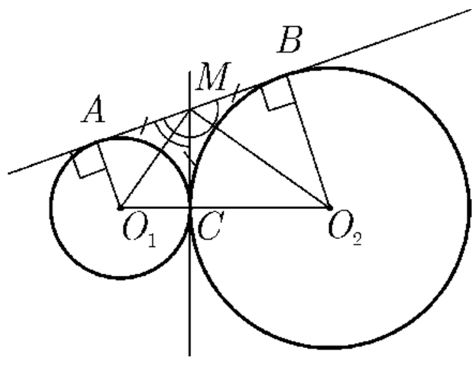


Рис. 4.3.2

Теорема доказана.

Теорема 4.3.3. Если две окружности касаются внешне, то отрезки общих касательных равны между собой.

Доказательство

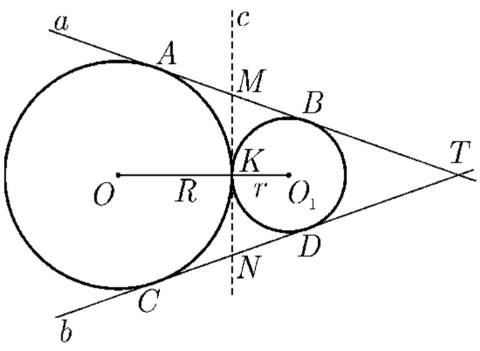


Рис. 4.3.3

1. Пусть заданы две окружности $\gamma(O,R)$ и $\gamma_1(O_1,r)$; a, b – их общие касательные, проведенные из точки T, c – их общая внешняя касательная.

A и B – точки касания окружностей с прямой a.

C и D – точки касания окружностей с прямой b.

K – точка касания окружностей.

M и N – точки пересечения касательных a и b с прямой c (рис. 4.3.3).

2. Из теоремы 4.3.1 и замечания 4.2.1 следует, что две окружности вписаны в $\angle ATC$, их центры и общая точка касания K лежат на биссектрисе этого угла.

3. Рассмотрим $\triangle MTN$ – равнобедренный, следовательно, $MK = KN$.

4. По теореме 4.2.5 $MB = MK$ и $KN = ND$. Следовательно, $MK = KN = MB = ND$.

5. Аналогично, по теореме 4.2.5 $AM = MK = KN = CN$. Получили, что $MK = KN = MB = ND = AM = CN$.

6. По построению: $AB = AM + MB$, $CD = CN + ND$, $MN = MK + KN$. Так как все слагаемые в длинах отрезков равны, то $AB = CD = MN$.

Теорема доказана.

Важное замечание. Когда к двум касающимся внешним образом окружностям проведена общая касательная AB, то распространенным является следующее дополнительное построение: соединить центры окружностей с соответствующими им точками касания и провести через центр O_1 окружности меньшего радиуса прямую O_1H, параллельную AB. В результате образуется прямоугольник AO_1HB и прямоугольный треугольник O_1HO_2 с известными ги-

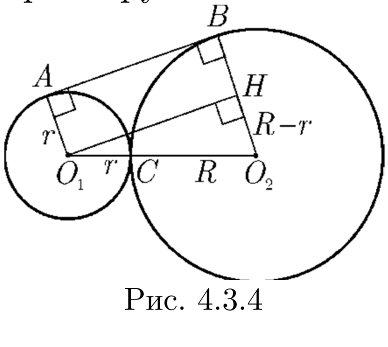


Рис. 4.3.4

потенузой, равной сумме радиусов окружностей $R+r$, и катетом O_2H, равным разности этих радиусов R-r (рис. 4.3.4).

Второй катет этого треугольника легко найти по теореме Пифагора: $(R+r)^2=(R-r)^2+O_1H^2$. Его длина как раз и будет искомым расстоянием между точками касания окружностей с прямой AB: $O_1H=AB=2\sqrt{Rr}=\sqrt{2R\cdot 2r}$.

Отметим, что построение характеристического треугольника O_1HO_2 полезно еще и тем, что один из его острых углов является углом между линией центров окружностей и проведенной к ним общей касательной [17, с. 157].

Пересекающиеся окружности

Рассмотрим теперь отличительные особенности геометрической конструкции, состоящей из двух пересекающихся окружностей.

У этой конструкции есть определяющие элементы. Это радиусы окружностей, расстояние между их центрами, а также длина общей хорды. Знание любых трех из них дает возможность вычислить все остальные ее геометрические характеристики [17, с. 161].

Теорема 4.3.4. Общая хорда двух пересекающихся окружностей есть отрезок, перпендикулярный линии центров этих окружностей, который делится этой линией пополам.

Доказательство

1. Пусть заданы две окружности $\gamma(O_1,r)$ и $\gamma_2(O_2,R)$; A и B точки их пересечения. Пусть K – точка пересечения AB и O_1O_2 (рис. 4.3.5).

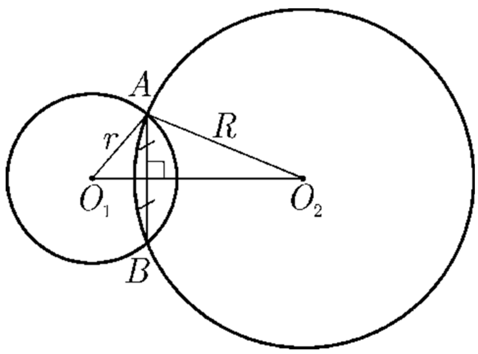


Рис. 4.3.5

2. Рассмотрим $\triangle O_1AO_2$ и $\triangle O_1O_2B$: $O_1A=O_1B$, $AO_2=BO_2$ – как радиусы двух данных окружностей, O_1O_2 – общая сторона, то $\triangle O_1AO_2=\triangle O_1O_2B$ по третьему признаку равенства треугольников.

Поэтому, $\angle AO_1O_2=\angle O_2O_1B$; $\angle AO_2O_1=\angle O_1O_2B$.

3. Следовательно, OO_1 – биссектриса углов $\angle AO_1B$ и $\angle AO_2B$.

4. Заметим, что так как $\triangle AO_1B$ и $\triangle AO_2B$ – равнобедренные, то биссектриса, проведенная к основанию, является и высотой, и медианой. Отсюда, $AB \perp OO_1$, $AK = BK$.

Теорема доказана.

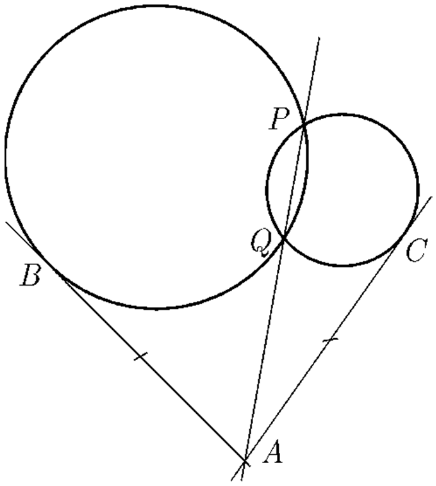


Рис. 4.3.6

Теорема 4.3.5. Если через две точки P и Q пересечения двух окружностей провести прямую, то для любой точки A этой прямой, лежащей вне отрезка PQ, длины отрезков касательных AB и AC, проведенных к этим окружностям равны.

Доказательство

1. Рассматриваемая теорема есть прямое следствие теоремы 4.2.6.

Действительно, по теореме 4.2.6: $AQ \cdot QP = AB^2$ и $AQ \cdot QP = AC^2$.

2. Следовательно, $AB^2 = AC^2 \rightarrow AB = AC$.

Теорема доказана.

Теорема 4.3.6. Если через точки P и Q пересечения двух окружностей провести прямую и из произвольной точки A этой прямой, лежащей вне отрезка PQ, провести секущие AB_1 и AB_2, пересекающие каждую из окружностей соответственно в точках C_1 и C_2, то в результате такого построения образуются равные углы: $\angle AB_1C_2 = \angle AB_2C_1$ и $\angle AC_2C_1 = \angle AB_1B_2$ (рис. 4.3.7).

Доказательство

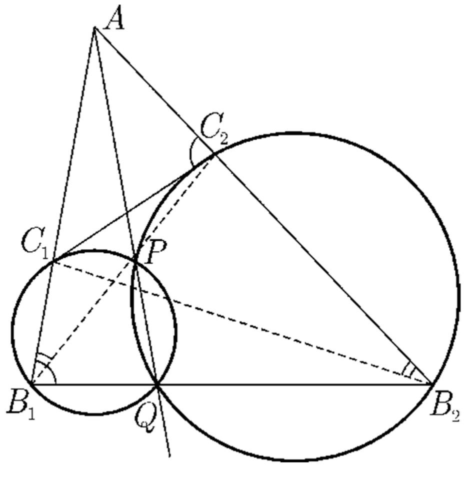


Рис. 4.3.7

1. Этот полезный при «перебрасывании углов» факт также является результатом применения теоремы о касательной и секущей к парам секущих, проведенным из точки A к каждой из окружностей: $AB_1 \cdot AC_1 = AP \cdot AQ = AB_2 \cdot AC_2$.

2. Если переписать эти соотношения в виде $\frac{AB_1}{AC_2} = \frac{AB_2}{AC_1}$, мы получим подобие $\triangle AB_1B_2$ и $\triangle AC_1C_2$ с общим углом A

и пропорциональными сторонами. Как следствие, получается равенство соответствующих углов в этих треугольниках, например, $\angle AC_2C_1 = \angle AB_1B_2$ [17, с. 164].

Пример 4.3.1. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90^0 и 60^0. Найти угол между общей касательной, проведенной к этим окружностям и линией их центров, если расстояние между этими центрами равно $\sqrt{3}+1$ [17].

Решение

1. Пусть заданы две окружности: $\gamma_1(O_1, R)$ и $\gamma_2(O_2, r)$ (рис. 4.3.8).

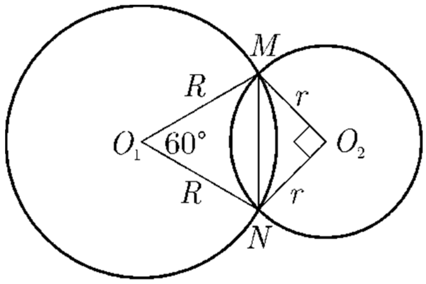


Рис. 4.3.8

2. Рассмотрим $\triangle O_1MN$ – равносторонний, следовательно, $MN=R$.

3. Рассмотрим $\triangle O_2MN$ – прямоугольный и равнобедренный, следовательно $MN = r\sqrt{2}$.

Таким образом, $R = \sqrt{2}r$.

4. Длина O_1O_2 в этом случае будет суммой высот этих треугольников: $O_1O_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{r\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + 1$.

$$\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = \sqrt{3} + 1 \to R = \frac{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1} = 2.$$

В итоге отсюда получаем $R = 2, r\sqrt{2}$.

5. Пусть AC – общая касательная (рис. 4.3.9).

Рассмотрим $\triangle O_1AC$.

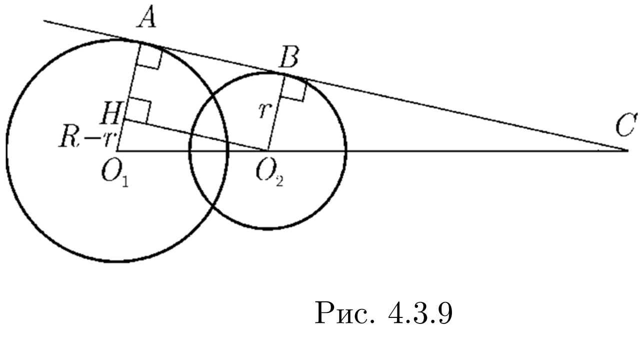


Рис. 4.3.9

Из точки O_2 опустим перпендикуляр на AO_1.

Тогда $HO_1 = R - r$.

6. $\triangle O_1AC \sim \triangle O_1HO_2$, т.к. $\angle O_1$ – общий, $\angle H = \angle A = 90^0$.

Следовательно $\sin\angle ACO_1 = \sin\angle HO_2O_1$.

7.Рассмотрим $\triangle HO_2O_1$: $\sin\angle ACO_1 = \sin\angle HO_2O_1 = \frac{HO_1}{O_1O_2} = \frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

Ответ: угол между общей касательной, проведенной к двум окружностям и линией их центров равен $\arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

Непересекающиеся окружности

Когда в условии задачи присутствуют непересекающиеся окружности, связь между их геометрическими элементами чаще всего осуществляется через прямые, с этими окружностями «взаимодействующие», а потому в основе анализа таких геометрических конструкций лежат теоремы, использующие понятия касательной и секущей.

При этом часто бывает, что одна и та же прямая, являясь касательной или секущей для одной из окружностей, одновременно является касательной или секущей для другой окружности. Именно это и является связующим соотношением между их различными элементами [17, с. 166].

Приведем фрагмент книги [17, с. 166–167], в которой авторы иллюстрируют известные свойства на примере геометрической конструкции, состоящей из двух непересекающихся окружностей, к которым проведены две внешние и одна внутренняя касательная. Обозначим через M_1, N_1, M_2, N_2 точки внешнего касания, через M_3, N_3 точки внутреннего касания, точку пересечения внешних касательных – через A, а точки пересечения внутренней касательной с внешними – через B и C. Перечислим все, что может быть полезно при решении задач в основе которых лежит эта конструкция (рис. 4.3.10).

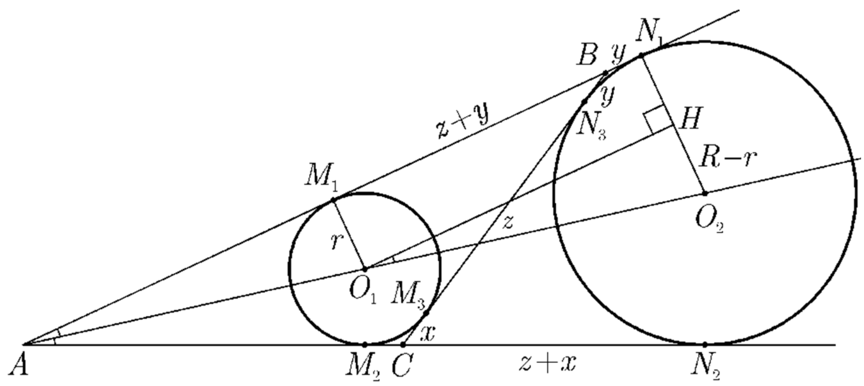


Рис. 4.3.10

1. $M_1N_1 = M_2N_2$ (следует из равенства отрезков касательных, проведенных из точки А к каждой из этих окружностей).

2. $CM_2 = CM_3 = BN_3 = BN_1$. Для обоснования этого факта удобно ввести обозначения: $CM_3 = x, BN_3 = y, M_3N_3 = z.$ Тогда $BM_1 = BM_3 = z + y$ (следует из равенства отрезков касательных, проведенных из точки В к меньшей окружности), $CN_2 = CN_3 = z + x$ (следует из равенства отрезков касательных, проведенных из точки С к большей окружности), $M_1N_1 = z + 2y = M_2N_2 = z + 2x$ (пункт 1). В итоге получаем $x = y$.

3. $M_1N_1 = BC$ (т.к. $BC = x + z + y = z + 2y$).

4. Полупериметр p $\triangle ABC$ равен длине касательной AN_1.

5. Тригонометрические функции половины угла A, образованного внешними касательными к окружностям, могут быть получены из характеристического прямоугольного $\triangle O_1HO_2$, если в задаче заданы радиусы окружностей, а также расстояние между их центрами O_1O_2 или длины каких-либо из обсуждавшийся выше касательных.

Пример 4.3.2. К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B. Через точку C, лежащую на отрезке AB, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E, причём отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE – другой. Докажите, что периметр $\triangle CDE$ вдвое больше расстояния между центрами окружностей [64].

Решение

1. Пусть задано две непересекающиеся окружности с центром O_1 и центром O_2 (рис. 4.3.11).

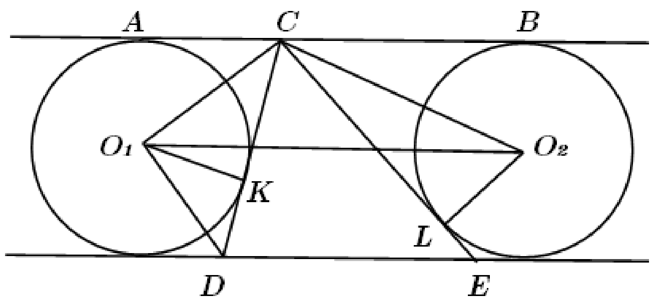


Рис. 4.3.11

2. Заметим, что AO_1O_2B и MO_1O_2N – прямоугольники. Следовательно, $AB = O_1O_2$, $MN = O_1O_2$.

3. По теореме 4.2.5 $CA = CK$, $DM = DK$, $CB = CL$, $EL = EN$.

Тогда $P_{\triangle CDE} = CD + DE + CE = .. = 2O_1O_2$.

4.4. Вписанные и описанные окружности

Опр. 4.4.1. *Окружность называется вписанной* в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности. Многоугольник в этом случае называется *описанным* около окружности.

Следующее утверждение ограничивает для нас множество многоугольников, в которые можно вписать окружность.

Теорема 4.4.1. В многоугольник можно вписать окружность и притом только одну, тогда и только тогда, когда биссектрисы его углов пересекаются в одной точке.

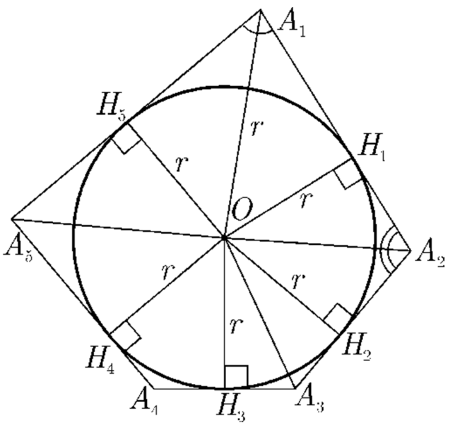


Рис. 4.4.1

Доказательство

1. Пусть задан многоугольник $A_1A_2..A_n$, в который вписана окружность. Докажем, что биссектрисы многоугольника пересекаются в одной точке (рис.4.4.1).

2. Рассмотрим $\angle A_1A_2A_3$, точка O равноудалена от сторон угла, следовательно она лежит на биссектрисе этого угла (замечание 4.2.1).

3. Пусть в многоугольнике $A_1A_2..A_n$ биссектрисы пересекаются в одной точке O, покажем, что в этот многоугольник можно вписать окружность.

4. Так как биссектрисы всех углов пересекаются в точке O, то эта точка равноудалена от всех сторон многоугольника, и, следовательно, является центром описанной окружности.

5. Таким образом, центр окружности, вписанной в многоугольник, есть точка, равноудаленная от всех сторон этого многоугольника – точка пересечения биссектрис углов этого многоугольника.

Теорема доказана.

Теорема 4.4.2. Если окружность радиуса r вписана в многоугольник, площадь которого равна S, а полупериметр равен p, то площадь описанного многоугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности: $S = pr$.

Доказательство

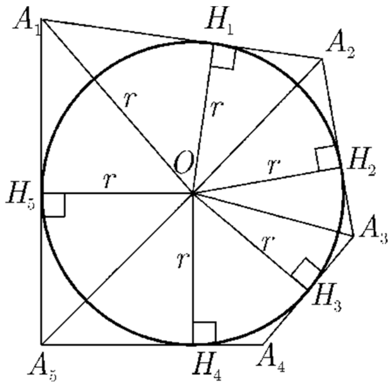


Рис. 4.4.2

1. Пусть задан многоугольник $A_1A_2..A_n$, в который вписана окружность радиуса r (рис.4.4.2). Докажем, что $S = pr$.

2. Пусть $OH_1 = OH_2 = .. = OH_n = r$ – радиусы, проведенные в точки касания. Соединим центр окружности с каждой вершиной многоугольника, так что многоугольник разобьется на $(n-1)$ треугольник.

3. Площадь многоугольника найдем как сумму площадей всех полученных в результате разбиения треугольников:

$$S = S_{\vartriangle OA_1A_2} + S_{\vartriangle OA_2A_3} + S_{\vartriangle OA_3A_4} + .. + S_{\vartriangle OA_nA_1}.$$

4. Площадь каждого треугольника вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} A_iA_{i+1} \cdot OH_i,\ i = \overline{1,n}.$$

5. После подстановки, получим:

$$S = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot r + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot r + .. + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \left(A_1A_2 + A_2A_3 + .. + A_nA_1 \right) \cdot r = pr.$$

Теорема доказана.

Опр. 4.4.2. *Окружность называется описанной вокруг многоугольника*, если все вершины многоугольника принадлежат этой окружности. Многоугольник в этом случае называется *вписанным в окружность.*

Следующее утверждение ограничивает для нас множество многоугольников, около которых можно описать окружность.

Теорема 4.4.3. Около многоугольника можно описать окружность и притом только одну, тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры к сторонам этого многоугольника пересекаются в одной точке[16].

Центр окружности, описанной вокруг многоугольника, есть точка, равноудаленная от всех вершин этого многоугольника, – точка

[16] Доказательство рекомендуем провести самостоятельно.

пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого многоугольника.

Вписанные и описанные треугольники

Теорема 4.4.4. В любой треугольник можно вписать единственную окружность.

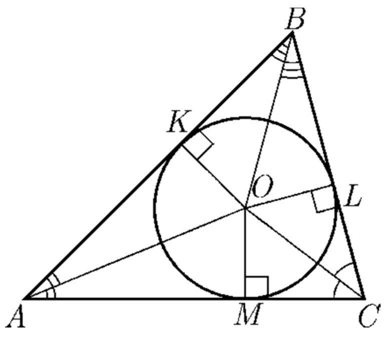


Рис. 4.4.3

Доказательство

1. Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$ и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведем из точки O перпендикулярны OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC *и* CA (рис.4.4.3).

2. Так как точка O равноудалена от сторон $\triangle ABC$, то $OK = OL = OM$.

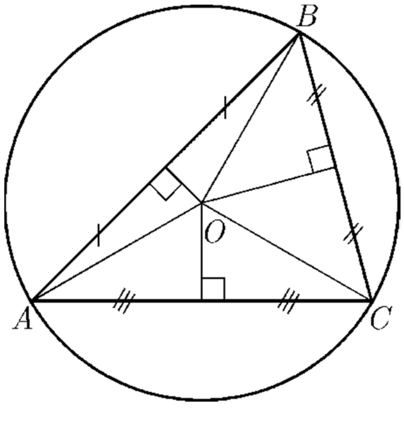
Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны $\triangle ABC$ касаются этой окружности в точках K, L и M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL, OM.

Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в $\triangle ABC$.

3. *Докажем единственность.* В самом деле, допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудален от сторон треугольника и, значит, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Следовательно, окружности совпадают.

Теорема доказана.

Теорема 4.4.5. Около любого треугольника можно описать единственную окружность.



Доказательство

1. Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$ и обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Проведем отрезки OA, OB и OC (рис.4.4.4).

Так как точка O равноудалена от вершин $\triangle ABC$, то $OA = OB = OC$.

Рис. 4.4.4

2. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около $\triangle ABC$.

3. *Докажем единственность*. В самом деле, допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудален от вершин треугольника и, значит, совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Следовательно, окружности совпадают.

Теорема доказана.

Теорема 4.4.6. *Теорема синусов.* Пусть a, b, c – стороны треугольника; R – радиус описанной окружности вокруг $\triangle ABC$; A, B и C – углы $\triangle ABC$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

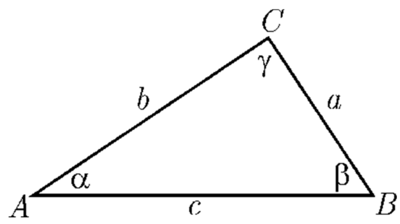


Рис. 4.4.5

1. Пусть в $\triangle ABC$:
$AB = c, BC = a, CA = b$(рис.4.4.5)

Докажем, что $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

2. По теореме 2.7.3 о площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

$$S = \frac{1}{2} ca \sin B.$$

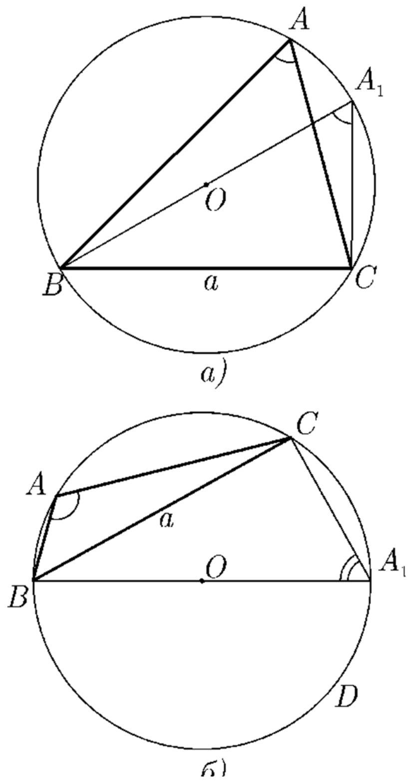


Рис. 4.4.6

Из первых двух равенств получаем: $\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A$, откуда $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$. Точно так же из второго и третьего равенств следует, что $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$. Итак, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

3. Пусть R – радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Докажем, что $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$. Проведем диаметр BA_1 и рассмотрим $\triangle A_1BC$ (рис.4.4.6). Угол C этого треугольника прямой, поэтому $\sin A_1 = \dfrac{BC}{BA_1}$.

Но $\sin A_1 = \sin A$.

4. Действительно, если точка A_1 лежит на дуге BAC, то $\angle A_1 = \angle A$, а если на дуге BDC, то $\angle A_1 = 180^0 - \angle A$. И в том, и в другом случае $\sin A_1 = \sin A$. Следовательно, $BC = BA_1 \cdot \sin A$, или $BC = 2R \cdot \sin A$.

Теорема доказана.

Теорема 4.4.7. *О центре описанной окружности, ортоцентре и стороне треугольника.* Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны.

Доказательство

Способ № 1.

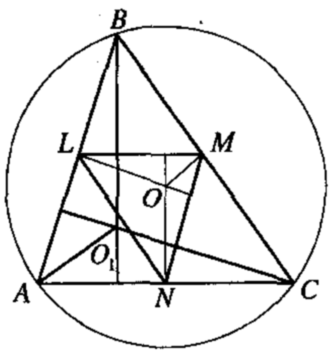


Рис. 4.4.7 *а*)

1. Пусть в $\triangle ABC$ точка O – центр описанной окружности, O_1 – его ортоцентр (рис. 4.4.7 а).

2. Построим $\triangle LMN$, сторонами которого служат средние линии заданного треугольника.

3. Высоты $\triangle LMN$ пересекаются в точке O, поскольку эти высоты перпендикулярны сторонам $\triangle ABC$ и проходят через их середины. Но $\triangle LMN \sim \triangle ABC$ и поэтому $\dfrac{MO}{AO_1} = \dfrac{LN}{BC} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $AO_1 = 2MO$.

Способ № 2.

1. Пусть задан треугольник $\triangle ABC$, в котором O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, P – середина стороны AC (рис. 4.4.7 б). Докажем, что $BH = 2 \cdot OP$.

2. Сделаем дополнительное построение: проведем окружность, описанную вокруг $\triangle ABC$ и пусть CM – диаметр этой окружности.

2. Рассмотрим $\triangle MAC$ и $\triangle OPC$. Они подобны по двум углам,

следовательно, $\dfrac{MA}{OP} = \dfrac{AC}{PC} = 2$. Отсюда, $MA = 2 \cdot OP$. Докажем, что $MA = BH$.

3. Заметим, что $MA \perp AC$ (т.к. $\angle MAC$ – вписанный, опирающийся на диаметр) и $BH \perp AC$ (как высота треугольника), следовательно, $MA \parallel BH$. Также $MB \perp BC$ (т.к. $\angle MBC$ – вписанный, опирающийся на диаметр) и $AH \perp BC$ (как высота треугольника), следовательно, $MB \parallel AH$.

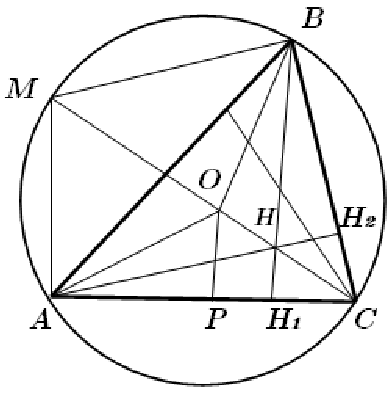


Рис. 4.4.7 *б)*

4. По определению, четырехугольник $AMBH$ – параллелограмм, следовательно по теореме 4.4.7: $MA = BH$ и $BH = 2 \cdot OP$.

Теорема доказана.

Вписанные и описанные четырехугольники

Теорема 4.4.8. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

Доказательство

1. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, который вписан в окружность, касающаяся его сторон в точках M, N, P, Q (рис. 4.4.8).

Докажем, что $AB + CD = BC + AD$.

2. Действительно, из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следуют равенства $AM = AQ, BM = BN, CN = CP, DP = DQ$.

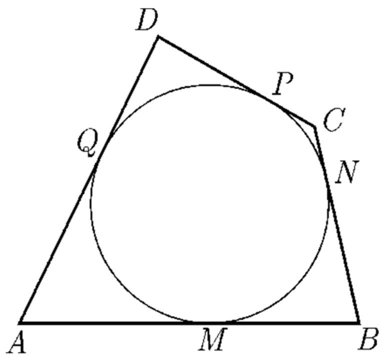


Рис. 4.4.8

Поэтому,

$AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC = BC + AD.$

3. Обратно, пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняется равенство $AB + CD = BC + AD$. Покажем, что в него вписать окружность. Для этого достаточно проверить, что биссектрисы углов этого четырехугольника пересекаются в одной точке.

4. Эта точка будет равноудалена от всех сторон четырехугольника и, следовательно, будет центром искомой вписанной окружности.

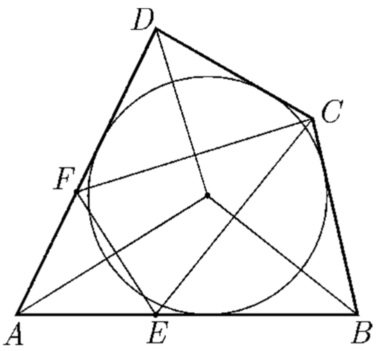


Рис. 4.4.9

Если в данном четырехугольнике выполняется равенство $AB = BC$, то этот четырёхугольник – ромб.

5. Ясно, что биссектрисы углов ромба пересекаются в одной точке – точке пересечения его диагоналей. Пусть $AB \neq BC$. Предположим для определенности $AB > BC$.

6. Из условия $AB + CD = BC + AD$ следует, что $AB - BC = AD - CD$.

Возьмем на AB точку E так, что $BE = BC$.
Тогда $AE = AB - BC$.
Возьмем на AD точку F так, что $DF = DC$ (рис. 4.4.9). Тогда $AF = AD - CD$. Следовательно, $AE = AF$.

7. Треугольники $\triangle AEF$, $\triangle BCE$, $\triangle CDF$ – равнобедренные. Поэтому биссектрисы углов A, B, D являются серединными перпендикулярами к отрезкам EF, EC, CF. Следовательно, они пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около $\triangle EFC$. Эта точка будет равноудалена от всех сторон исходного четырехугольника, то есть будет искомым центром вписанной окружности.

Теорема доказана.

Теорема 4.4.9. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180^0.

Доказательство

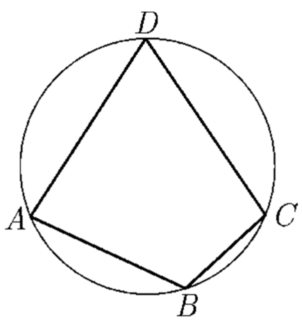


Рис. 4.4.10

1. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, около которого описана окружность (рис. 4.4.10).

Докажем, что $\angle B + \angle D = 180^0$.

2. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг ADC и ABC, которые вместе измеряются половиной дуги окружности, то есть их сумма равна 180^0.

3. Обратно, пусть в четырёхугольнике $ABCD$ сумма противоположных углов равна 180^0. Через

вершины A, B, C проведем окружность. Предположим, что эта окружность не проходит через вершину D. Обозначим точку пересечения окружности с прямой AD через D'.

Тогда четырехугольник $ABCD'$ вписан в окружность и, следовательно, $\angle B + \angle D' = 180^0$. Но по условию $\angle B + \angle D = 180^0$. Поэтому $\angle D = \angle D'$, что невозможно, т.к. прямые DC и $D'C$ не являются параллельными. Полученное противоречие показывает, что окружность, проходящая через точки A, B и C, должна пройти и через точку D.

Теорема доказана.

Теорема 4.4.10. *Теорема Птолемея.* Произведение диагоналей вписанного в круг четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.

Доказательство

1. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник (рис. 4.4.11).

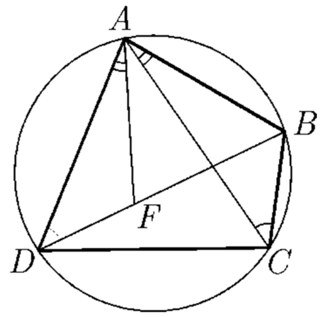


Рис. 4.4.11

Докажем, что $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

2. На диагонали BD отметим точку F так, чтобы $\angle DAF = \angle CAB$.

3. Рассмотрим $\triangle AFD$ и $\triangle ABC$:

$\angle DAF = \angle CAB$ – по построению и $\angle ADB = \angle ACB$ как вписанные, опирающиеся на одну и туже дугу.

По признаку подобия $\triangle AFD \sim \triangle ABC$. Из подобия треугольников следует отношение сторон: $\dfrac{BC}{DF} = \dfrac{AC}{AD}$. Из пропорции следует равенство: $BC \cdot AD = AC \cdot DF$.

4. Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle AFB$: $\angle BAF = \angle DAC$ – по построению и $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные, опирающиеся на одну и туже дугу.

По признаку подобия $\triangle ACD \sim \triangle AFB$.

Из подобия треугольников следует отношение сторон: $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{BF}$.

Из пропорции следует равенство: $BF \cdot AC = CD \cdot AB$.

5. Получили следующие равенства: $\begin{array}{l} BC \cdot AD = AC \cdot DF, \\ CD \cdot AB = BF \cdot AC. \end{array}$

Сложим их: $BC \cdot AD + CD \cdot AB = BF \cdot AC + AC \cdot DF$ и упростим: $BC \cdot AD + CD \cdot AB = AC \cdot (BF + DF)$.

6. В соответствии с построением точки F можем заменить сумму в скобках диагональю: $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

Теорема доказана.

Замечание. Справедливо и более общее утверждение «Произведение диагоналей произвольного четырехугольника меньше или равно сумме произведений его противоположных сторон, причем равенство достигается только в случае четырехугольника, вписанного в окружность»[17].

Теорема 4.4.11. *Формула Брахмагупты.* Если около четырехугольника можно описать окружность, то его площадь равна $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p – полупериметр, a, b, c, d – длины сторон четырехугольника.

Доказательство

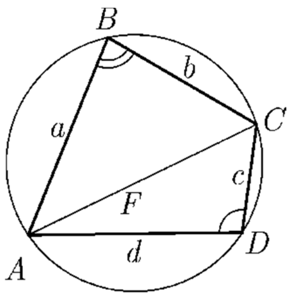


Рис. 4.4.12

1. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник, у которого известны длины всех сторон $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ (рис. 4.4.12).

2. Проведем диагональ AC, тогда четырехугольник разделится на два треугольника. Площадь четырехугольника можно найти как сумму площадей треугольников: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$. (*)

3. Воспользуемся формулой площади треугольника: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$, $S_{ADC} = \dfrac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin D$.

4. Так как четырехугольник вписанный, то $\angle D = 180^0 - \angle B$.

5. Подставим в (*)

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B + \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin\left(180^0 - \angle B\right).$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \sin B \cdot \left(AB \cdot BC + AD \cdot DC\right).$$

6. Подставим длины сторон и возведем равенство в квадрат:

$$S^2 = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 B \left(ab + cd\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \cos^2 B\right) \cdot \left(ab + cd\right)^2. \quad (****)$$

[17] Доказательство можно найти [45, с. 34].

7. Рассмотрим $\triangle ACD$, составим теорему косинусов для $\angle D$: $AC^2 = d^2 + c^2 - 2cd \cdot \cos\left(180^0 - \angle B\right)$. После упрощения, получим: $AC^2 = d^2 + c^2 - 2cd \cdot \cos B$. (**)

7. Рассмотрим $\triangle ABC$, составим теорему косинусов для $\angle B$: $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos B$. После упрощения, получим: $AC^2 = d^2 + c^2 - 2cd \cdot \cos B$. (***)

8. Приравняем левые и правые части равенств (**) и (***):

$d^2 + c^2 - 2cd \cdot \cos B = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos B$. Выразим косинус угла B: $\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - d^2 - c^2}{2(cd + ab)}$.

9. Подставим $\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - d^2 - c^2}{2(cd + ab)}$ в (****), получим

$$S^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - d^2 - c^2}{2(cd + ab)}\right)^2\right) \cdot \left(ab + cd\right)^2.$$

10. Преобразуем правую часть равенства:

$$S^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\left(ab + cd\right)^2 - \frac{\left(a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right)^2 \cdot (cd + ab)^2}{4 \cdot (cd + ab)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(\left(2\left(ab + cd\right)\right)^2 - \left(a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right) \cdot \left(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + d^2 + c^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(\left(a + b\right)^2 - \left(c - d\right)^2\right) \cdot \left(\left(c + d\right)^2 - \left(a - b\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(a + b + c - d\right) \cdot \left(a + b - c + d\right) \cdot \left(c + d + a - b\right) \cdot \left(c + d - a + b\right) =$$

{В каждом множителе прибавим и отнимем одно и тоже число и вынесем из каждого множителя число 2}.

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{16} \cdot \left(\frac{a + b + c + d}{2} - d\right) \cdot \left(\frac{a + b + c + d}{2} - c\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{a + b + c + d}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{a + b + c + d}{2} - a\right) =$$

Одно из слагаемых в каждом множителе – это полупериметр четырехугольника: $p = \dfrac{a + b + c + d}{2}$.

Поэтому можем переписать: $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$, где $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Теорема доказана.

Вписанные и описанные правильные многогранники

Опр. 4.4.3. *Выпуклый многоугольник* называется *правильным*, если у него все стороны и все углы равны.

Теорема 4.4.12. В правильный n-угольник со стороной a можно вписать окружность радиуса r, при том справедлива формула: $r = \dfrac{a}{2tg\dfrac{180^0}{n}}$.

Доказательство

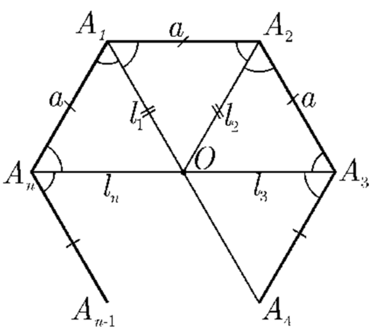


Рис. 4.4.13

1. Рассмотрим фрагмент правильного n-угольника со стороной a. Докажем, что биссектрисы правильного n-угольника пересекаются в одной точке (рис. 4.4.13).

2. Предположим противное, что биссектрисы l_1 и l_2 параллельны.

Тогда по свойствам параллельных прямых, сумма внутренних односторонних углов равна 180^0, т.е. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180^0$. Отсюда $\alpha = 180^0$, это говорит о том, что смежные стороны лежат на одной прямой, что противоречит условию. Значит, $l_1 \cap l_2 = O$.

3. Отсюда следует, что если соединить точку O с остальными вершинами многоугольника, то полученные отрезки также будут биссектрисами соответствующих углов.

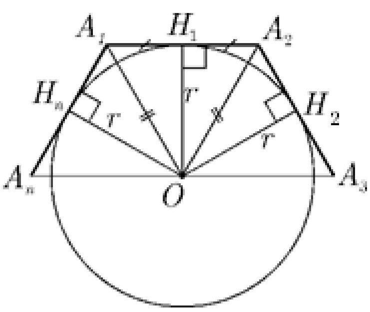


Рис. 4.4.14

4. В $\triangle A_1A_2O$ проведем высоту OH_1 (рис. 4.4.14). В $\triangle A_2A_3O$ проведем высоту OH_2.

Рассмотрим $\triangle H_1A_2O$ и $\triangle A_2H_2O$: $\angle H_1A_2O = \angle OA_2H_2$, т.к. OA_2 – биссектриса. Следовательно, $\triangle H_1A_2O = \triangle A_2H_2O$. Таким образом, $OH_1 = OH_2$.

Аналогично доказывается равенство $OH_1 = OH_2 = OH_3 = ... = OH_n$. Следовательно, в данный многоугольник можно вписать окружность.

5. *Докажем, единственность.* Предположим противное, что существует две окружности, вписанные в многоугольник. Тогда существует вторая точка пересечения биссектрис, а этого быть не может, т.к. мы доказали, что биссектрисы многоугольника пересекаются в одной точке. Следовательно, и вписанная в многоугольник окружность может быть только одна.

6. Выведем формулу. Для этого рассмотрим прямоугольный $\triangle A_1OH_1 : A_1H_1 = \frac{a}{2}, OH_1 = r, \angle H_1OA_1 = \frac{360^0}{2 \cdot n} = \frac{180^0}{n}$.

Получим, $tg\frac{180^0}{n} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \to r = \frac{a}{2tg\frac{180^0}{n}}$.

Теорема доказана.

Теорема 4.4.13. Около правильного n-угольника со стороной а можно описать окружность радиуса R, при том справедлива формула: $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}$.

Доказательство

1. Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ – правильный многоугольник, O – точка пересечения биссектрис углов $\angle A_1, \angle A_2$ (рис. 4.4.15).

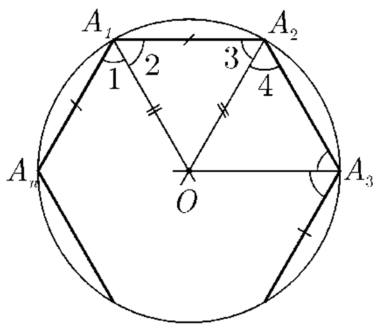


Рис. 4.4.15

2. Соединим точку O отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$.

3. Так как $\angle A_1 = \angle A_2$, то $\angle 2 = \angle 3$, поэтому $\triangle A_1A_2O$ – равнобедренный: в нем $OA_1 = OA_2$.

4. $\triangle A_1A_2O = \triangle A_2A_3O$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $OA_3 = OA_1$. Аналогично, доказывается равенство $OA_4 = OA_2, OA_5 = OA_3$ и т.д.

5. Итак, $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, т.е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника.

6. Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1, A_2, A_3. Так как по теореме 4.1 через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ можно описать одну окружность.

Теорема доказана.

Теорема 4.4.14. *Следствия.*

1⁰. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

2⁰. Площадь правильного n-угольника вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2} P \cdot r$, где P – периметр многоугольника, а r – радиус вписанной окружности.

3⁰. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в него. Эта точка называется **центром** правильного многоугольника.

Доказательство

1⁰. Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ – правильный многоугольник, в который вписана окружность с центром в точке O (рис. 4.4.14).

Рассмотрим $\triangle H_1A_1O$ и $\triangle H_1A_2O$: $OA_1 = OA_2$, OH_1 – общая. Получим, что $\triangle H_1A_1O = \triangle H_1A_2O$ по гипотенузе и катету. Следовательно, $A_1H_1 = A_2H_1$. Аналогично доказывается для других сторон.

2⁰. Площадь правильного n-угольника можно вычислить как сумму площадей треугольников:

$$S_{A_1A_2A_3...A_n} = S_{\triangle A_1OH_1} + S_{\triangle A_2OH_1} + .. + S_{\triangle A_nOH_n} + S_{\triangle A_1OH_n} =$$

$$= \frac{1}{2} A_1H_1 \cdot OH_1 + \frac{1}{2} H_1A_2 \cdot OH_1 + .. + \frac{1}{2} A_nH_n \cdot OH_n + \frac{1}{2} H_nA_1 \cdot OH_n =$$

$$= \frac{1}{2}\left(A_1A_2 + A_2A_3 + .. + A_nA_1\right) \cdot r = \frac{1}{2} r \cdot P.$$

Правильный шестиугольник

Опр. 4.4.4. *Правильным шестиугольником* называется шестиугольник, у которого все стороны и углы равны (рис. 4.4.16).

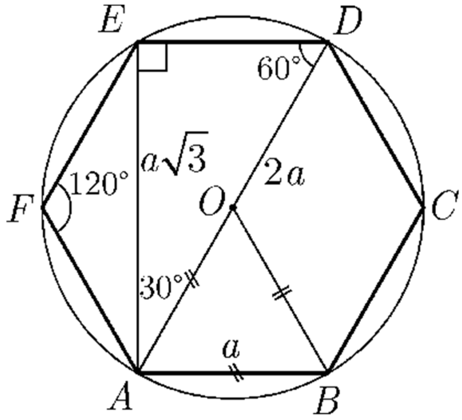


Рис. 4.4.16

Теорема 4.4.15. Правильный шестиугольник обладает следующими свойствами.

1⁰. Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной вокруг него окружности.

2⁰. Большая диагональ правильного шестиугольника является диаметром описанной вокруг него окружности и равна двум его сторонам.

3⁰. Меньшая диагональ правильного шестиугольника в $\sqrt{3}$ раз больше его стороны.

4⁰. Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°.

5⁰. Меньшая диагональ правильного шестиугольника перпендикулярна его стороне.

6⁰. Треугольник, образованный стороной шестиугольника, его большей и меньшей диагоналями, прямоугольный, а его острые углы равны 30° и 60°.

7⁰. Шестиугольники замощают плоскость, т.е. могут заполнять плоскость без пробелов и наложений.

4.5. Длина окружности и площадь круга

Предположим, что окружность сделана из тонкой нерастяжимой нити. Разрежем нить в какой-нибудь точке A и распрямим ее. В результате получим отрезок AA_1. Длина окружности – это длина отрезка AA_1.

Интуитивно ясно, что периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности. Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближенное значение.

Опр. 4.5.1. *Длиной окружности* называется предел, к которому стремятся периметры правильных вписанных в окружность многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон [4, с. 175].

Утверждение 4.5.1. Каждая окружность имеет определенную длину[18].

Выведем формулу, выражающую длину окружности через ее радиус.

Теорема 4.5.1. *Длина* окружности радиуса R равна $C = 2\pi R$.

Доказательство

1. Покажем вначале, что отношение длины окружности к ее диаметру одно и тоже число для всех окружностей.

2. Пусть C и C' – длины окружностей с центрами O и O', и радиусами R и R'. Впишем в каждую из них правильный n-угольник и обозначим через P_n и P_n' их периметры, а через a_n и a_n' их стороны.

Так как $P_n = a_n; P_n' = a_n'$, то $\dfrac{P_n}{P_n'} = \dfrac{a_n}{a_n'}$.

3. Заметим, что $\dfrac{a_n}{a_n'} = \dfrac{R}{R'}$. Действительно, $\triangle OA_1A_2 \sim \triangle O'A_1'A_2'$ по первому признаку подобия. Итак, $\dfrac{P_n}{P_n'} = \dfrac{R}{R'}$.

4. Отметим, что это равенство справедливо при любом значении n.

Будем теперь неограниченно увеличивать число n. Так как $P_n \to C, P' \to C'$ при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_n'} = \dfrac{C}{C'}$.

---

[18] Доказательство опирается на теорему Вейерштрасса [4, с. 176].

5. С другой стороны, в силу равенства $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}$, этот предел будет равен $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}$. Таким образом, $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$, поэтому $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$, откуда следует, что $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

6. Отношение $\frac{C}{2R}$ принято обозначать греческой буквой π: $\frac{C}{2R} = \pi$.

Из этого равенства получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R: $C = 2\pi R$.

Теорема доказана.

Теорема 4.5.2. *Длина дуги* окружности вычисляется по формуле $C_{\alpha^0} = 2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360}$.

Доказательство

1. Так как градусная мера всей окружности равна 360^0, то длина дуги в 1^0 равна $\frac{1}{360}$ части от всей окружности: $C_{1^0} = 2\pi R \cdot \frac{1}{360}$.

2. Тогда длина дуги в α° равна $C_{\alpha^0} = 2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360}$.

Теорема доказана.

Теорема 4.5.3. *Площадь круга.* Площадь круга S равна произведению числа π на квадрат длины радиуса *r:* $S = \pi R^2$.

Доказательство

1. Построим два правильных n-угольника: N_1 – вписанный в круг, N_2 – описанный около круга (рис. 4.5.1).

По теореме 4.4.14 центр круга, центры правильных многоугольников совпадают в точке O.

2. Проведем радиусы в вершины многоугольника N_1. Площадь многоугольника N_1, будет равна $S_{N_1} = n \cdot S_{\triangle AOB}$.

3. Рассмотрим $\triangle AOB$: $AO = OB = R$, OC – высота.

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot R \cdot \cos\angle AOC.$

Тогда, $S_{N_1} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot R \cdot \cos\angle AOC = \frac{1}{2} \cdot P_{N_1} \cdot R \cdot \cos\angle AOC$, где P_{N_1} – периметр n-угольника.

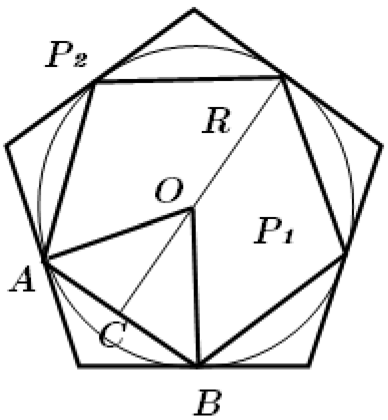


Рис. 4.5.1

Аналогично найдем площадь многоугольника N_2.

4. Соединим центр с вершинами описанного многоугольника. Площадь многоугольника N_2 будет равна $S_{N_2} = n \cdot S_{\triangle KOT}$ (рис. 4.5.2)

5. Рассмотрим $\triangle KOT$: $AO = OB = R$, OC – высота.

$S_{\triangle KOT} = \frac{1}{2} \cdot KT \cdot OA = AT \cdot R$. Выразим AT. Для этого рассмотрим $\triangle AOT$ и $\triangle ACT$. Они подобны по двум углам, следовательно $\angle TAC = \angle AOT$.

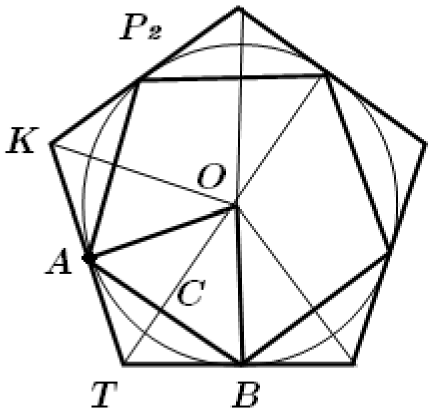


Рис. 4.5.2

Тогда,

$$AT = \frac{AC}{\cos\angle TAC} = \frac{AC}{\cos\angle AOT}.$$

6. С учетом того, что $AC = \frac{P_{N_2}}{2n}$, получим

$$S_{\triangle KOT} = AT \cdot R = \frac{AC}{\cos\angle AOT} \cdot R = \frac{P_{N_1}}{2n \cdot \cos\angle AOT} \cdot R.$$

Тогда, $S_{N_2} = n \cdot S_{\triangle KOT} = n \cdot \frac{P_{N_1}}{2n \cdot \cos\angle AOT} \cdot R = \frac{P_{N_1}}{2\cos\angle AOT} \cdot R.$

7. Итак, многоугольник, содержащийся в круге, имеет площадь $S_{N_1} = \frac{P_{N_1} \cdot R}{2} \cdot \cos\angle AOC$, а многоугольник N_2, содержащий круг, имеет площадь $S_{N_2} = \frac{P_{N_1} \cdot R}{2\cos\angle AOC}$,

При достаточно большом n периметр многоугольника отличается сколь угодно мало от длины окружности C, $\cos\angle AOC$ сколь угодно мало отличается от единицы. Перейдя к пределу, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_{N_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{N_1}\cdot R}{2}\cdot\cos\angle AOC = \frac{C\cdot R}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{N_2} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{N_1}\cdot R}{2\cos\angle AOC} = \frac{C\cdot R}{2}.$$

8. Воспользуемся теоремой 4.5.1 $C = 2\pi R$, формула площади круга примет вид: $S = \pi R^2$.

Теорема доказана.

Опр. 4.5.2. *Сектор* – это часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой. Два радиуса разделяют круг на два сектора.

Теорема 4.5.4. *Формула площади сектора.* Площадь кругового сектора круга радиуса R равна $S = \dfrac{\pi R^2\alpha}{360}$, где α^0 – градусная мера дуги сектора.

Опр. 4.5.3. *Сегмент* – это часть круга, ограниченная дугой и стягивающей её хордой. Любая хорда делит круг на два сегмента.

Теорема 4.5.5. *Формула площади сегмента.* Площадь сегмента S равна: $S = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi\alpha}{180^0} - \sin\alpha\right)\cdot R^2.$

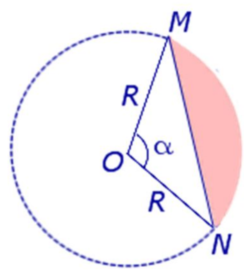


Рис. 4.5.3

Доказательство

Площадь сегмента равна разности площадей кругового сектора MON и $\triangle MON$.

$$S = \frac{\pi R^2\alpha}{360^0} - \frac{1}{2}R^2\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180^0} - \sin\alpha\right)\cdot R^2.$$

Теорема доказана.

4.6. «Расчет окружностей»

Пример 4.6.1. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если расстояние от её центра до секущей равно 5.

Решение

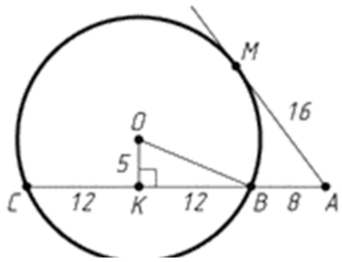


Рис. 4.6.1

1. Пусть секущая пересекает окружность в точках B и C, а M – точка касания (рис. 4.6.1). Тогда $AM = 16$, $AC = 32$, $BC = 32 - BA$.

По теореме 4.2.6 $AM^2 = AC \cdot AB \to$
$16^2 = 32 \cdot (32 - BC) \to BC = 24$.

2. Пусть K – проекция центра O данной окружности на хорду BC.

Радиус окружности находим по теореме Пифагора: $R^2 = OB^2 = OK^2 + BK^2 = 169$.

Ответ: $R = 13$.

Пример 4.6.2. Две окружности, касающиеся друг друга внешним образом, расположены внутри третьей и касаются с ней внутренним образом. Общей касательной к этим двум окружностям является диаметр третьей окружности, причем точка касания одной из них совпадет с центром третьей окружности, радиус которой равен 1. Найдите радиусы первых двух окружностей.

Решение

1. Обозначим через O_3 – центр третьей окружности. По условию задачи эта точка является точкой касания одной из заданных окружностей (обозначим ее центр через O_1) с диаметром AB третьей окружности (рис. 4.6.2).

2. Учитывая, что при этом, что центры O_1 и O_3 лежат на одной прямой с точкой C касания этих двух окружностей, получим, что

O_3C – диаметр окружности с центром O_1, который совпадает с радиусом третьей окружности, а поэтому радиус $O_1O_3 = O_1C = \frac{O_3C}{2} = \frac{1}{2}$.

3. Чтобы вычислить радиус окружности R окружности с центром O_2, надо сначала определить месторасположение этого центра. И здесь возможны два варианта (рис. 4.6.2):

1) диаметр AB, являясь общей касательной к первым двум окружностям, проходит через точку их касания O_3, т.е. радиус $O_2O_3 = \frac{1}{2}$ (окружности симметричны относительно AB);

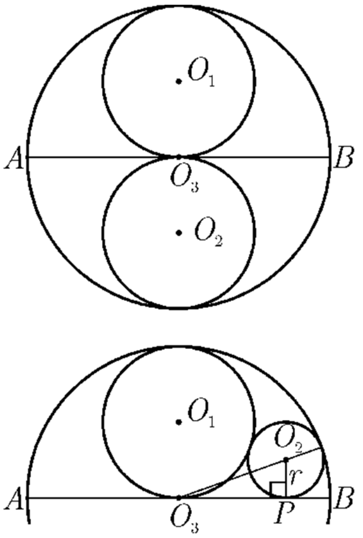


Рис. 4.6.2

2) первые две окружности касаются AB в двух различных точках O_3 и P. Тогда $O_3P = 2\sqrt{\frac{r}{2}}$. Рассмотрим прямоугольный $\triangle O_2PO_3$:

$(1-r)^2 = r^2 + \left(2\sqrt{\frac{r}{2}}\right)^2$. Отсюда получаем $r = \frac{1}{4}$.

Ответ: $a)\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\quad b)\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2}$.

Пример 4.6.3. Две стороны остроугольного треугольника – 20 см и $23\frac{1}{5}$ см. Радиус описанного около треугольника круга – 14,5 см. Найти радиус вписанного в треугольник круга.

Решение

1. Пусть задан остроугольный $\triangle ABC$, вписанный в окружность. Радиус окружности можно найти по формуле $r = \frac{S}{p}$, если найти третью сторону.

2. Проведем диаметр BE и высоту BD (рис. 4.6.3). Соединив конец диаметра E с вершиной треугольника A, получим прямоугольный $\triangle ABE$.

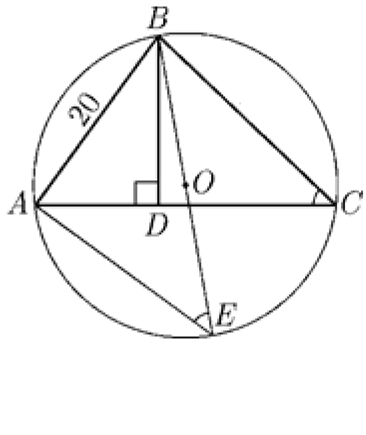


Рис. 4.6.3

3. Рассмотрим $\triangle ABE$ и

$\triangle CBD: \angle BDC = \angle BAE = 90^0$, $\angle BCA = \angle BEA$. Они подобны по второму признаку.

Следовательно, $\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{EB}$, $BD = AB \cdot \frac{BC}{BE} = 20 \cdot \frac{23\frac{1}{5}}{29} = 16$;

4. $AC = AD + DC = \sqrt{AB^2 - BD^2} + \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} +$

$$+\sqrt{\left(\frac{116}{5}\right)^2 - 16^2} = 12 + \frac{84}{5} = \frac{144}{5}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{144}{5} \cdot 16 = \frac{1152}{5}.$$

$$p = \frac{1}{2}\left(20 + \frac{116}{5} + \frac{144}{5}\right) = 36.$$

$$r = \frac{1152}{5 \cdot 36} = 6,4.$$

Ответ: радиус вписанного в треугольник круга равен 6,4.

Пример 4.6.4. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

Решение

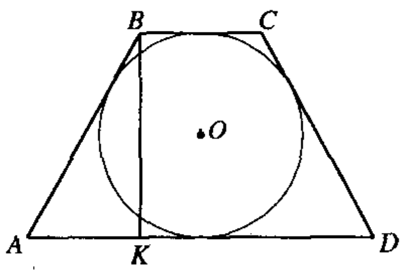


Рис. 4.6.4

1. В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $BC = 4$, $AD = 16$. Так как около данной трапеции описана окружность, то $AB = CD$. Так как в данную трапецию можно вписать окружность, то

$AD + BC = AB + CD = 2AB$;

$$AB = \frac{AD + BC}{2} = 10.$$

BK – высота трапеции, $AK = \frac{AD - BC}{2} = 6$.

2. Из $\triangle AKB \left(\angle AKB = 90^0\right): BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = 8$.

3. Радиус вписанной окружности $r = \frac{1}{2} BK = 4$.

4. Радиус описанной окружности найдем как радиус окружности, описанной около $\triangle ABD : R = \dfrac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\triangle ABD}}$, $KD = AD - AK = 10$.

5. Из $\triangle BKD \left(\angle BKD = 90^0\right) : BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 2\sqrt{41}$.

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BK = 64.$$

6. Тогда $R = \dfrac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\triangle ABD}} = \dfrac{10 \cdot 2\sqrt{41} \cdot 16}{4 \cdot 64} = \dfrac{5\sqrt{41}}{4}$.

Ответ: $r = 4$; $R = \dfrac{5\sqrt{41}}{4}$.

Пример 4.6.5. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезке 30 и 40 см. Найти длину полуокружности, заключенной между точками ее касания с катетами.

Решение

Пусть задан прямоугольный $\triangle ABC$, O – центр вписанной окружности, $O \in AB$.

1. Проведем радиусы OD и OE в точки касания (рис. 4.6.5). Имеем $OD = OE = CE = CD$, т.е. $ECDO$ – квадрат.

2. Пусть R – радиус окружности, тогда длина дуги ED равна $\dfrac{\pi R}{2}$. Так как $\triangle AEO \sim \triangle ODB$, то $\dfrac{AE}{OD} = \dfrac{AO}{OB} = \dfrac{30}{40} = \dfrac{3}{4}$.

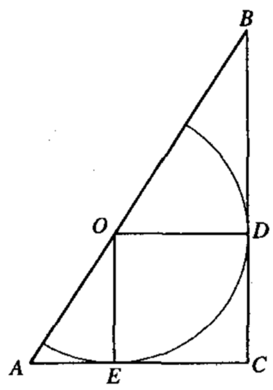


Рис. 4.6.5

3. Но $AE^2 = AO^2 - OE^2 = 30^2 - R^2$, откуда $\dfrac{\sqrt{30^2 - R^2}}{R} = \dfrac{3}{4}$,

4. Решим уравнение: $16 \cdot \left(30^2 - R^2\right) = 9R^2 \Rightarrow R = 24$.

5. $\overset{\cup}{ED} = \dfrac{\pi R}{2} = \dfrac{24 \cdot \pi}{2} = 12\pi$.

Ответ: длина дуги ED равна 12π.

Задания для практических занятий

Познакомьтесь с теоретическим материалом и примерами задач с решениями. Рекомендуемая литература: [1, 5, 8, 15, 17, 20, 34, 36, 38, 50,51, 57, 58,59, 60].

Теоретические задания в мини-группах

Задание 1. Доказать свойства окружности, перечисленные в теореме 4.2.1.

Задание 2. Вывести формулы для нахождения элементов в треугольнике. В $\triangle ABC$ буквы A, B, C обозначают как вершины треугольника, так и его углы в этих вершинах. Буквами a, b, c обозначаются стороны, лежащие напротив углов A, B, C соответственно; m_a, m_b, m_c – медианы, проведенные к соответствующим сторонам; l_a, l_b, l_c – биссектрисы; h_a, h_b, h_c – высоты. Через R и r будут обозначаться соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей; S – площадь треугольника, p – полупериметр.

а) Даны a, b, c. Найти $A, B, m_a, l_b, h_c, r, R, S$.

б) Даны a, b, r. Найти $A, B, m_a, l_b, h_c, c, R, S$.

в) Даны a, A, S. Найти $b, c, C, m_a, l_b, h_c, c, r, R$.

г) Даны a, A, h_b. Найти $b, c, C, m_a, l_b, r, R, S$.

г) Даны a, R, r. Найти $b, c, A, B, C, m_a, l_b, h_c, S$.

Задание 3. Доказать все свойства правильного шестиугольника, восьмиугольника, двенадцатиугольника. Вывести формулы для нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей.

Задание 4. Доказать теорему Эйлера о расстоянии между центрами вписанной и описанной окружностями.

Задание 5. Доказать теоремы о вневписанных окружностях треугольника.

Практические задания

Задание 6. Доказать истинность математических утверждений

4.6.1. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

4.6.2. Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.

4.6.3. Прямая AC – касательная к окружности с центром O_1, а прямая BD – касательная к окружности с центром O_2. Докажите, что: а) $AD \parallel BC$; б) $AB^2 = AD \cdot BC$; в) $BD^2 : AC^2 = AD : BC$ (рис. 4.6.6).

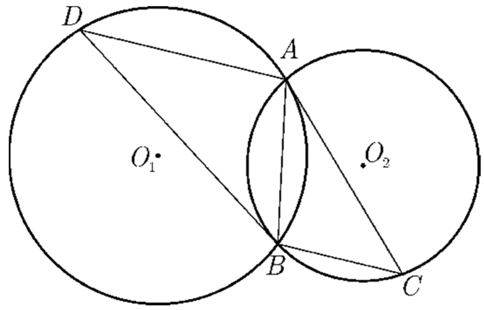


Рис. 4.6.6

4.6.4. Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

4.6.5. Докажите, что равные хорды окружности одинаково удалены от центра окружности и, наоборот, если хорды окружности одинаково удалены от ее центра, то они равны.

4.6.6. Сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше 180^0.

4.6.7. Точки A, B, C и D лежат на окружности. Докажите, что если $\overset{\smile}{AB} = \overset{\smile}{CD}$, то $AB = CD$.

4.6.8. На сторонах OA и OB четверти AOB построены как на диаметрах полуокружности ACO и OCB, пересекающиеся в точке C. Докажите, что 1) прямая OC делит угол AOB пополам; 2) точки A, C и B лежат на одной прямой; 3) дуги AC, CO и CB равны между собой.

4.6.9. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Тогда касательные, проведенные к окружностям через концы образовавшихся хорд, параллельны.

4.6.10. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB, пересекающие вторую окружность в точках P и Q соответственно. Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

Указание: Провести касательную KE. Ввести вспомогательный угол $\angle KAB = \alpha$ и доказать, что $\angle PQB = \alpha$ и $\angle QKE = \alpha$. Тогда $PQ \parallel KE$, а $KE \perp KM$.

4.6.11. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам их общую касательную.

4.6.12. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $AC \perp BD$. Доказать, что длина перпендикуляра OH, опущенного из центра O этой окружности на сторону AD, вдвое меньше длины стороны BC.

Указание: провести диаметр AM и доказать, что $OH = \dfrac{1}{2}MD$ *и $MD = BC$ как хорды, стягивающие равные дуги.*

4.6.13. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Докажите, что если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

4.6.14. Докажите, что если какие-нибудь из замечательных точек треугольника совпадают, то этот треугольник – равносторонний.

4.6.15. Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм – прямоугольник.

4.6.16. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность и можно описать около него окружность, то этот параллелограмм – квадрат.

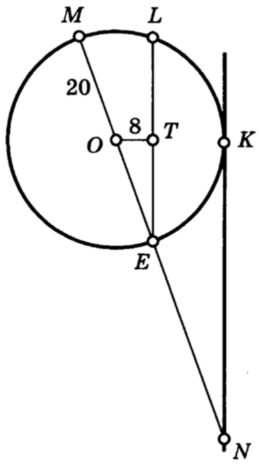
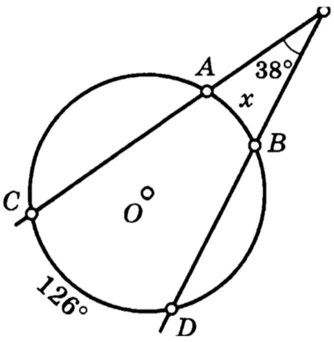
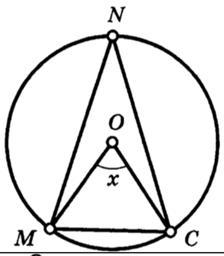
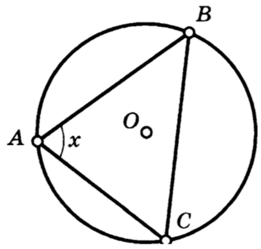
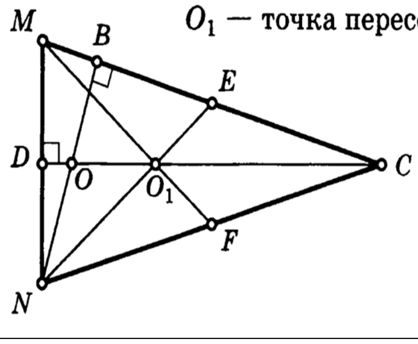
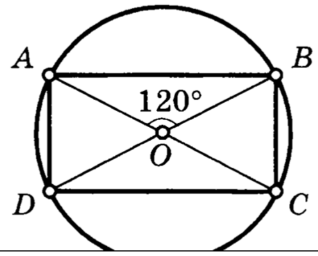
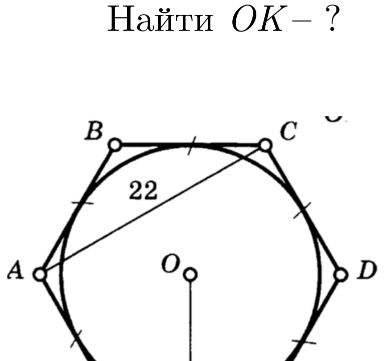
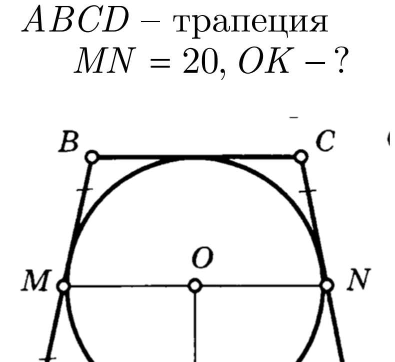
4.6.17. Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

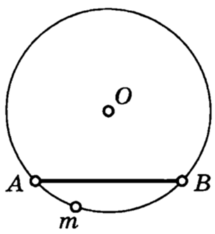
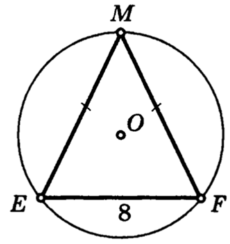
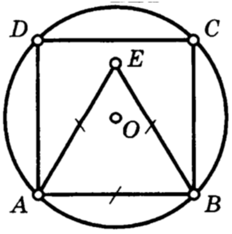
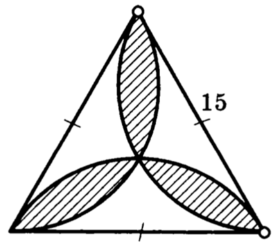
4.6.18. Диаметр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, есть среднее пропорциональное между ее основаниями.

4.6.19. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению ее оснований.

4.6.20. В равнобедренную трапецию вписан круг. Доказать, что отношение площади круга к площади трапеции равно отношению длины окружности к периметру трапеции.

Задание 7. Решить задачи «на готовых чертежах»

<table>
<tr>
<td>$EL \parallel NK$, MN – ?

</td>
<td>Найти x – ?

</td>
</tr>
<tr>
<td>$\angle NMC = 75^0$, $\cup NM : \cup MC = 2:1$
Найти x – ?

</td>
<td>$\cup AB : \cup BC : \cup AC = 7:11:6$
Найти x – ?

</td>
</tr>
<tr>
<td>O — точка пересечения высот
O_1 — точка пересечения медиан
$MC = NC = 26$
$MN = 20$
OO_1 — ?

</td>
<td>$ABCD$ – прямоугольник
$AD = 10$, AO – ?

</td>
</tr>
<tr>
<td>Найти OK – ?

</td>
<td>$ABCD$ – трапеция
$MN = 20$, OK – ?

</td>
</tr>
</table>

$\cup AmB = 120^0$, $C = 8\pi\sqrt{3}$, $AB - ?$ 	Найти длину окружности 
Найти площадь круга, если ABCD – квадрат и $S_{\vartriangle ABE} = 16\sqrt{3}$ 	Найти площадь заштрихованной фигуры 

Задание 8. Решить задачи «на вычисление»

4.8.1. Окружность разделена точками A, B, C на дуги, градусные величины которых относятся как 11 : 3 :4. Через точки A, B, C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образовавшегося треугольника.

Ответ: 40^0, 80^0, 60^0.

4.8.2. Через точку A окружности радиуса 10 см проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Вычислить радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если *AB=16 см.*

Указание: провести радиусы в точки касаний первой и второй окружности. Рассмотреть треугольник, образованный линией центром и отрезками радиусов. По теореме Пифагора найти радиус.

Ответ: 8 см.

4.8.3. Внутри круга радиуса 15 см взята точка M на расстоянии 13 см от центра. Через точку M проведена хорда длиной 18 см. Найдите длины отрезков, на которые точка M делит хорду.

Ответ: 4 и 14 см.

4.8.4. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом $\angle NMP = \angle PMQ$. Найти радиус окружности.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{510}}{15}$.

4.8.5. В большом из двух концентрических кругов проведена хорда, равная 32 см и касающаяся меньшего круга. Определите длину радиуса каждого из кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8 см.

Ответ: 12 и 20 см.

4.8.6. Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D – на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Ответ: 80.

4.8.7. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 1 и 3, соответственно, касаются внешним образом в точке A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку A, пересекает в точке B другую их общую касательную C_1C_2, где C_1 и C_2 – соответствующие первой и второй окружностям точки касания с прямой. Найти расстояния между центрами окружностей, описанных вокруг $\triangle C_1AC_2$ и $\triangle O_1BO_2$.

Указание: искомое расстояние – медиана BM $\triangle O_1BO_2$.

Ответ: 2.

4.8.8. На плоскости даны две окружности радиусов 12 и 7 см с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка O_1O_2 равно $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Вычислить длину отрезка M_1M_2.

Ответ: 10.

4.8.9. Из вершины прямого угла C $\triangle ABC$ проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в $\triangle BCP$, равен 8, $tg\angle BAC = \dfrac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности $\triangle ABC$.

Ответ: 10.

4.8.10. Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30^0 при основании. Определить стороны треугольника.

Ответ: $4\sqrt{3}+6,\ 6\sqrt{3}+12$.

4.8.11. В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислить длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки 4 и 3 см.

Ответ: 24 см, 25 см, 7 см.

4.8.12. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12 см. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

Ответ: 1 см.

4.8.13. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит этот треугольник на два треугольника. Расстояние между центрами вписанных окружностей этих треугольников равно 1. Найдите радиус вписанной окружности исходного треугольника.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4.8.14. Какими целыми числами выражаются стороны равнобедренного треугольника, если радиус вписанной окружности равен $\dfrac{3}{2}$ см, а описанной $\dfrac{25}{8}$ см?

Ответ: 5 см, 5 см, 6 см.

4.8.15. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23 см. Найти радиус окружности.

Ответ: 17 см.

4.8.16. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=25$ и $CD=16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60^0$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

Ответ: $\sqrt{427}$.

4.8.17. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Расстояние от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 25, 15 и 7. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ: 924.

4.8.18. В ромб со стороной 10 и тупым углом $\dfrac{5\pi}{6}$ вписана окружность. Определите площадь прямоугольника, вершины которого лежат в точках касания окружности с ромбом.

Ответ: 6,5.

4.8.19. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстоянии 3 и 9 см. Найти стороны трапеции.

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{10}}{5}, \dfrac{6\sqrt{10}}{5}, 3\sqrt{10}, \dfrac{18\sqrt{10}}{5}$ *см.*

4.8.20. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC $\left(AD > BC\right)$, $AB \perp AD$, и периметром, равным 60, вписана окружность. Точка касания окружности с большей боковой стороной делит ее на части, произведение которых равна 25. Найдите тангенс $\angle CKO$, где K – точка касания окружности с меньшей боковой стороной, а O – центр вписанной окружности.

Ответ: $\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$.

4.8.21. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD построены две окружности, касающиеся боковых сторон трапеции. Первая окружность касается боковых сторон в точках B и C, а вторая – в точках A и D. Оказалось, что окружности касаются внешним образом, а их радиусы равны 2 и 3. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 4,8.

4.8.22. Центр полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40 см. Найти длину дуги полуокружности, заключенной между точками ее касания.

Ответ: 12π .

4.8.23. Длины диагоналей ромба относятся как 3:4. Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

Ответ: $\dfrac{25}{6\pi}$.

4.8.24. Периметр сектора равен 28 см, а его площадь равна 49 см^2. Определите длину дуги сектора.

Ответ: 14 см.

4.8.25. Даны две концентрические окружности. Касательная к меньшей окружности делит длину дуги большей окружности в отношении 1: 5. Найдите отношение площадей кругов, ограниченных этими окружностями.

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

Задание 9. Решить задачи «в общем виде»

4.9.1. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.

Ответ: $A_1A_2 = d - R_1 - R_2$.

4.9.2. Две окружности радиусов R и r соприкасаются внешним образом. Определить радиус окружности, касающейся этих окружностей и их общей касательной.

Ответ: $\dfrac{Rr}{\left(\sqrt{R} \pm \sqrt{r}\right)^2}$.

4.9.3. Два круга радиусов R и r касаются в точке C и к ним проведена общая внешняя касательная AB, где A и B точки касания. Вычислить длины сторон $\triangle ABC$.

Ответ: $2\sqrt{Rr}$, $2r\sqrt{\dfrac{R}{R+r}}$, $2r\sqrt{\dfrac{r}{R+r}}$.

4.9.4. Для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a, h_b, h_c и радиусом вписанной окружности выражается формулой $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

4.9.5. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна h; радиус вписанной окружности равен r. Найдите гипотенузу.

Ответ: $\dfrac{2r^2}{h-2r}$.

4.9.6. В прямоугольном $\triangle ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^0$. Через точки A и C и середину M гипотенузы проведена окружность радиуса R. Найти радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

Указание: воспользоваться теоремой синусов к $\triangle AMC$ *и найти радиус по формуле* $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. *Ответ:* $r = \dfrac{2R\sin 2\alpha}{1+ctg\dfrac{\alpha}{2}}$.

4.9.7. Определить площадь равнобедренного треугольника, зная площади S_1 вписанного и S_2 описанного около него кругов.

4.9.8. В равнобедренный треугольник вписаны один над другим два круга радиуса R и r. Найти углы при основании треугольника.

4.9.9. Стороны вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ равны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Найдите его диагонали.

4.9.10. Дана прямоугольная трапеция, основания которой равны a и b. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите радиусы этих окружностей.

Указание: продлить боковые стороны трапеции и воспользоваться подобием фигур. Ответ: $r = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $R = \dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

4.9.11. Найти радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b.

Ответ: $r = \dfrac{ab}{a+b}$.

4.9.12. В некоторый угол вписана окружности радиуса r, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна a. Параллельно этой хорде проведены две касательные, и таким образом получилась трапеция, площадь которой требуется найти.

Указание: воспользоваться свойством описанной равнобедренной трапеции. Основание найти из подобных треугольников.

Ответ: $S = \dfrac{8r^2}{a}$.

4.9.13. Две окружности радиусов r и $3r$ внешне касаются. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

Указание: площадь искомой фигуры есть $S = S_1 - \left(S_2 + S_3\right)$, *где* S_1 *– площадь трапеции, образованной точками касания и линией центров,* S_2 *– площадь сектора, образованного радиусами, проведенными в точки касания первой окружности,* S_3 *– площадь сектора, образованного радиусами, проведенными в точки касания второй окружности.*

Ответ: $\dfrac{r^2\left(24\sqrt{3} - 11\pi\right)}{6}$.

Задание 10. Решить задачи повышенного уровня сложности

4.10.1. Доказать, что если из концов диаметра круга провести две пересекающиеся хорды, то сумма произведений каждой хорды на ее отрезок от конца диаметра до точки пересечения есть величина постоянная.

4.10.2. К двум равным непересекающимся окружностям проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B. Через точку C, лежащую на отрезке AB, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E, причем отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE – другой. а) Докажите, что периметр $\triangle CDE$ вдвое больше расстояния между центрами окружностей. б) Найдите DE, если известно, что радиусы окружностей равны 6, расстояние между их центрами равно 20, а $AC = 8$.

Ответ: 12,5.

4.10.3. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K. а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$. б) Найти отношение CK и KE, если $\angle ECD = 15^0$.

Ответ: 2:1.

4.10.4. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности. а) Докажите, что общая хорда этих окружностей делится пополам средней линией трапеции. б) Найдите основания трапеции, если известно, что ее диагонали перпендикулярны, равны 10 и 24, а расстояние между центрами окружностей равно 1.

Ответ: 14 и 12.

4.10.5. Центр равностороннего треугольника со стороной равной 6 см, совпадает с центром окружности радиуса 2 см. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

Указание: Искомая площадь $S = S_{\triangle ABC} - S_2$*, где* S_2 *– площадь части круга, расположенной внутри* $\triangle ABC$*. Площадь части круга находится как* $S_2 = S_{кр} - 3S_{сег}$*, где* $S_{сег}$ *– площадь сегмента, ограниченного хордой (точки пересечения окружности и треугольника). Ответ:* $S = 2\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$ см^2.

4.10.6. Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного $\triangle ABC$ лежит на большей окружности, а середина BC на меньшей. Чему может быть равен $\angle BOC$?

Ответ: 60^0 *или* 120^0.

4.10.7. Даны две концентрические окружности радиусов r и R $(R > r)$. Найти сторону квадрата, две вершины которого лежат на окружности радиуса r, а две другие – на окружности радиуса R. При каком соотношении между r и R а) решение возможно; б) имеется только одно решение?

Указание: Пусть BP – сторона квадрата (точка P лежит на меньшей окружности, B – лежит на большей). Пусть Q – точка пересечения BP с малой окружностью, C – точка пересечения продолжения BP с большой окружностью.

Опираясь на теорему о свойствах касательных и секущих, доказать, что $BP \cdot BQ = R^2 - r^2$*. Далее ввести вспомогательную переменную* $BP = x$*. Составить уравнение относительно x.*

4.10.8. Докажите, что прямая Гаусса и прямая Обера полного четырехугольника перпендикулярны.

Отметим, что основной теоретической базой решения планиметрических задач является теория равенства отрезков и углов, равенства и подобия треугольников. **Доказать равенство двух отрезков можно одни из следующих способов**:

– измерить;

– наложить;

– установить, что данные отрезки соединяют точку серединного перпендикуляра к отрезку с концами этого отрезка;

– установить, что данные отрезки являются перпендикулярами, проведенными из любой точки биссектрисы угла к сторонам этого угла;

– установить, что отрезки лежат против равных углов в одном и том же треугольнике;

– установить, что отрезки являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника или равнобедренной трапеции;

– установить, что отрезки образованы, в результате проведения медианы;

– установить, что отрезки являются соответственными сторонами равных треугольников;

– установить, что отрезки являются противоположными сторонами параллелограмма;

– установить, что отрезки являются высотами трапеции;

– установить, что отрезки являются радиусами одной окружности;

– установить, то отрезки являются хордами, стягивающими равные дуги.

Равенство двух углов можно установить следующим образом:

– измерить;

– наложить;

– доказать, что углы прямые или развернутые;

– доказать, что каждый из углов составляет с каким-либо другим прямой (или развернутый) угол;

– установить, что углы являются вертикальными;

– установить, что стороны углов соответственно параллельны или перпендикулярны;

– установить, что углы образованы в результате проведения биссектрисы;

– установить, что углы являются соответственными или накрест лежащими углами при параллельных прямых и секущей;

– установить, что углы являются соответственными углами равных фигур;

– установить, что углы лежат против равных сторон в одном и том же треугольнике;

– установить, что углы являются углами подобных треугольников;

– установить, что данные углы являются углами треугольников, у которых суммы остальных углов равны;

– установить, что данные углы являются противоположными углами параллелограмма;

– установить, что данные углы – вписанные, опирающиеся на одну и туже дугу или равные дуги одной и той же окружности.

ЧАСТЬ 2. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ЧТО ЗНАЧИТ РЕШИТЬ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ?

Довольно сложно выделить какой-то конкретный метод, эффективный в тех или иных планиметрических задачах. В настоящем пункте под методами мы будем понимать совокупность приемов, которые существенным образом влияют на поиск решения геометрической задачи.

В алгебраическом методе – это удачное введение вспомогательной переменной. В методе площадей – это удачный выбор формул для вычисления площади треугольника для нахождения элемента треугольника, в подобие – это составление пропорций, в методе визуализации окружности – это возможность увидеть окружность там, где она не задана, но «реально существует».

Однако в большинстве задач приходится использовать несколько методов при решении задачи. Приведем пример.

Пример. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны соответственно 1 и 2, а диагонали $BD = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$ и $AC = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. Вычислить площадь трапеции [18].

Решение

1. Пусть задана трапеция $ABCD$ и пусть $O = AB \cap CD$.

2. $DC : AB = CO : BO = 2 : 1$, поэтому обозначим CO через x, а BO через $\dfrac{x}{2}$. Общий угол O $\triangle AOC$ и $\triangle DOB$ используем как вспомогательный.

2. Если $\angle AOD = \alpha$, то по теореме косинусов из указанных треугольников имеем:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 + x^2 - 2,5}{\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot x} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x+2)^2 - 8,5}{2\cdot\frac{x}{2}(x+2)} \qquad (*)$$

Отсюда $x+1-2,5=4x+4-8,5 \to x=1 \Rightarrow\ CO=1,\ BO=0,5$.

3. Подставив значение x в формулу (*), найдем, что $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$.

$$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot CO\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{16}.$$

4. Треугольники $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ подобны с коэффициентом подобия, равным 3,

поэтому $S_{\triangle AOD}=9S_{\triangle BOC}$, $S_{ABCD}=9S_{\triangle BOC}-S_{\triangle BOC}=8S_{\triangle BOC}$.

5. Имеем: $S_{ABCD}=8\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{16}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Какие методы решения Вы увидели в примере?

Что значит «решить математическую задачу»? Л.М. Фридман так отвечает на этот вопрос: «это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче, - ее ответ» [52, с. 27].

В геометрии особое внимание должно быть уделено поэтапному процессу решения задач.

Этап 1. Анализ условия задачи и построение первичного чертежа.

Этап 2. Поиск решения задачи.

Этап 3. Обоснованное оформление задачи, построение динамического чертежа.

Этап 4. Исследование задачи на единственность решения, на оценку параметров задачи.

Отличительная особенность геометрических задач состоит в том, что по тексту конкретной задачи невозможно понять, простая она или сложная.

О.П. Зеленяк пишет: «Обычно геометрическая задача считается *определенной*, т.е. данных, содержащихся в ее условии, достаточно, чтобы однозначно понимать условие. Но необходимо принципиально помнить, что существуют *вариантные задачи.* Это значит, что набор данных в условии такой задачи допускает несколько вариантов (чаще два или три) расположения, построения фигур или их элементов» [18].

Во-первых, условие может не определять фиксированного расположения точек и фигур. Так, известно, что положение центра описанной окружности треугольника зависит от вида треугольника по углам; точка касания окружности и прямой не определяет однозначно полуплоскость, содержащую центр этой окружности; касающиеся окружности не определяют способ касания, который может быть внутренним или внешним и т.п.

Во-вторых, в условиях некоторых задач может не уточняться, какие отрезки (углы, дуги и т.д.) равны. Например, сказано, что точка C делит отрезок AB на части, длины которых n и m, но не известно, AC или BC равняется m; сказано, что основания трапеции n и m, но не известно, большее или меньшее основание трапеции равно m; сказано, что треугольник равнобедренный, но не известно, какие две его стороны равны между собой и т.п.

Вывод: необходимо тщательно и всесторонне анализировать условие задачи, чтобы не допустить его ложной интерпретации и рассмотреть все возможные варианты решения [18, с. 36].

Поиск способа решения должен опираться на известные методы решения. В книге «Геометрия без репетитора» Т.Т. Фискович рассматривает следующие методы решения задач:

1) Аналитико-синтетический метод основан на непосредственном рассмотрении данных в задаче фигур и сопоставлении их с искомыми фигурами или отношениями между ними. При этом методе каждая задача требует своего подхода.

2) Метод координат, при котором исследование геометрических фигур сводится к исследованию связей между координатами точек этих фигур, в применении алгебры к геометрии. Сила метода координат в приложении к геометрии – в его алгоритмичности. Успешность его применения состоит в умении рационально выбрать систему координат.

3) Векторный метод состоит в применении аппарата векторной алгебры для решения задач геометрии. Техника его применения аналогична применению векторного метода при решении текстовых задач. Суть этого метода в следующем: первый этап – введя векторы, записать условие задачи в векторной форме; второй этап – решить задачу в векторном виде, используя аппарат векторной алгебры; третий

этап – полученным векторным соотношениям дать толкование в исходных геометрических терминах и понятиях.

4) Метод преобразований состоит в том, что, кроме данных в условии задач фигур, рассматриваются вспомогательные фигуры, полученные из данных фигур или их элементов при помощи какого-нибудь частного вида преобразований.

5) Алгебраический метод состоит в следующем: задачи формулируют так, чтобы в качестве данных и искомых фигур были отрезки. Используя теоремы о свойствах фигур, выражают искомый отрезок через данные в виде формулы и по этой формуле находят этот отрезок.

6) Метод геометрических мест. Обычно в планиметрии задачу сводят к нахождению одной точки, удовлетворяющей каким-либо двум условиям, вытекающим из условия задачи. Как правило, одному условию удовлетворяет одна линия, другому – другая. Тогда искомая точка является точкой пересечения этих линий. Надо пояснить, что при применении этого метода, необходимо доказать обратное утверждение: если точка не принадлежит данной линии, то она не обладает данным свойством.

7) Применение тригонометрии к решению геометрических задач. Сущность этого метода, как и алгебраического, в составлении формулы, выражающей зависимость искомых отрезков (или данный углов) от данных отрезков (или углов), в которой содержатся тригонометрические функции.

8) Применение начал анализа к решению геометрических задач. В формулах, связывающих геометрические величины (длину, меру угла, площадь, объем) представляют одну из искомых переменных величин как функцию другой переменной величины и, исследуя эту функцию средствами анализа, находят нужные значения [50, с.148–149].

О.П. Зеленяк в качестве основных методов решения планиметрических задач рассматривает: введение вспомогательных углов и отрезков; введение вспомогательной площади; введение вспомогательной окружности; применение геометрических преобразований; применение тригонометрии; применение идеи обратного хода; применение принципа Дирихле [18].

О.Б. Шабанова пишет: «Зная разновидности методов, их названия, специфику использования, отличительные особенности, имея зрительные ассоциации по конкретным конфигурациям, школьник на этапе поиска решения задачи будет осуществлять не хаотичный, а осознанный поиск походящего решения» [54, с. 227].

Л.С. Атанасян, В.А. Гусев, Р.К. Гордин, В.А. Гусев, А.С. Зеленский, А.Г. Мордкович, П.С. Моденов, Я.П. Понарин, И.И. Панфилов, А.А. Прокофьев, И.М. Смирнова, И.Ф. Шарыгин выделяют три основных метода решения планиметрических задач: алгебраический, геометрический и векторно-координатный, каждый из которых имеет свою разновидность.

Разновидности этих методов проиллюстрированы на рисунке [54].

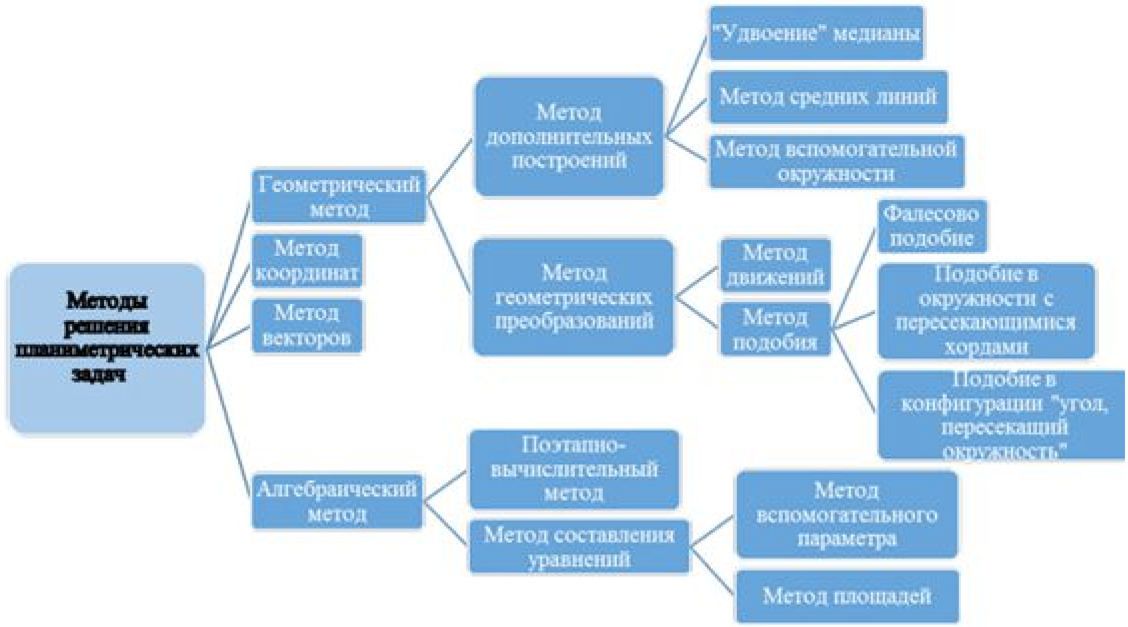


Рис. 5. Методы решения планиметрических задач

В настоящем пособии мы рассмотрим применение некоторых из указанных методов к решению планиметрических задач.

РАЗДЕЛ 5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Алгебраическое решение геометрических задач заключается в следующем. Искомые элементы геометрической фигуры обозначают через x, y, ... Исходя из условия задачи составляют уравнения (неравенства), связывающие известные и неизвестные элементы данной фигуры. После этого решают полученную систему уравнений или неравенств, определяют те элементы или отношения между ними, которые требуется найти. Удачный выбор неизвестных позволяет получить несложную систему уравнений (неравенств).

5.1. Метод вспомогательного параметра

Если в процессе решения неясно, как выразить искомые величины через данные, то используют вспомогательные величины в роли которых могут выступать сторона, угол, площадь и радиус.

Пример 5.1.1. Найти площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 60, а высота, проведенная к боковой стороне, делит ее в отношении 7:18, считая от вершины.

Решение

Рассмотрим $\triangle ABC$ и проведем в нем высоту AH (рис. 5.1.1).

1. Введем вспомогательный параметр x, так что $CH = 7x$, $HB = 18x$. Тогда $CB = 25x$.

2. Из прямоугольных $\triangle ACH$ и $\triangle ABH$ выразим катет AH по теореме Пифагора найдем:

$$\begin{cases} AH^2 = (25x)^2 - (7x)^2, \\ AH^2 = 60^2 - (18x)^2. \end{cases}$$

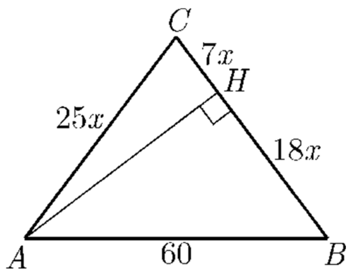


Рис. 5.1.1

Отсюда $(25x)^2 - (7x)^2 = 60^2 - (18x)^2$.

3. Решая уравнение, получим $30x = 60 \to x = 2$.

Тогда, $S_{ABC} = 12x \cdot 25x = 12 \cdot 100 = 1200$.

Ответ: $S_{ABC} = 1200$.

Пример 5.1.2. В прямоугольном $\triangle ABC$ из вершины прямого угла проведены медиана CM, биссектриса CL, и высота CH. Найти длину CM, если $CH=1$, $CL = \frac{7}{5}$.

Решение

Рассмотрим $\triangle ABC$ с прямым углом C и проведем в нем медиану CM, биссектрису CL, и высоту CH (рис. 5.1.2).

1. Пусть $AC = x$, $BC = y$.

2. Используя заданные в условии высоту CH и биссектрису CL, запишем площадь треугольника ABC тремя различными способами:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}xy,\ S_{ABC} = \frac{1}{2}CH \cdot AB = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},\ S_{ABC} = S_{ACL} + S_{LCB}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}x \cdot CL \cdot \sin 45^0 + \frac{1}{2}y \cdot CL \cdot \sin 45^0 = \frac{1}{2}(x+y) \cdot CL \cdot \sin 45^0 = \frac{7\sqrt{2}}{20}(x+y).$$

3. В итоге получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = xy, \\ 10xy = 7\sqrt{2}(x+y). \end{cases}$

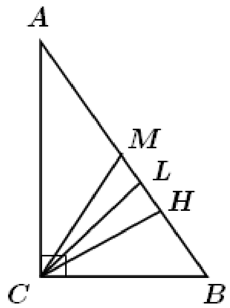


Рис. 5.1.2

Эта система относится к классу так называемых симметрических систем, в которых часто применяется замена $x + y = u$, $xy = v$.

4. Система приобретает более простой вид:

$$\begin{cases} u^2 - 2v = v^2, \\ 10v = 7\sqrt{2}u. \end{cases}$$

Получаем, $v = 98$, $u = 70\sqrt{2}$.

5. После этого находим, $CM = \frac{AB}{2} = \frac{AC \cdot CB}{2 \cdot CH} = \frac{xy}{2} = \frac{v}{2} = 49.$

Ответ: $CM = 49$.

Рассмотрим пример ведения вспомогательных (опорных) элементов, которые не находятся в процессе решения, но используются для выражения других величин.

Пример 5.1.3. Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены так, что вершины B, C, K и N лежат на одной прямой, а четыре оставшиеся расположены по разные стороны от BC и лежат на одной окружности.

Известно, что сторона одного из квадратов на 1 больше стороны другого. Найдите расстояние от центра окружности до прямой BC.

Решение

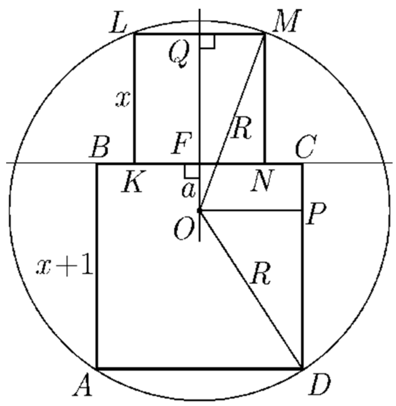


Рис. 5.1.3

1. Обозначим через x сторону квадрата $KLMN$. Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна $x+1$; прямая, проходящая через центр O указанной окружности перпендикулярно BC, пересекает BC в точке F, а LM – в точке Q; P – проекция точки O на DC; R – радиус окружности (рис. 5.1.3).

2. Пусть $OF = a$.

Тогда из прямоугольных $\triangle OQM$ и $\triangle OPD$ находим, что

$$R^2 = OM^2 = OQ^2 + QM^2 = (a+x)^2 + \frac{x^2}{4};$$

$$R^2 = OP^2 + DP^2 = \frac{(x+1)^2}{4} + (x+1-a)^2.$$

3. Приравняв правые части этих равенств, получим уравнение

$$(a+x)^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{(x+1)^2}{4} + (x+1-a)^2.$$

4. После очевидных упрощений это уравнение примет вид: $(2x+1)\cdot(8a-5) = 0.$ Откуда $a = \frac{5}{8}.$

Ответ: расстояние от центра окружности до прямой BC равно $\frac{5}{8}$.

5.2. Метод площадей

Понятие площади – одно из ключевых в геометрии. И не только потому, что вычисление площади часто является целью решения задачи, ее итогом. Площадь треугольника может выполнять «посреднические функции», выразив с помощью формул для площадей площадь треугольника разными способами, мы получаем недостающее замыкающее соотношение. Такой метод носит название «Метод площадей».

Для площади фигуры находим различные выражения, приравнивая их, получаем уравнение, содержащее известные и искомые величины.

Одно из основных свойств площади гласит: если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь фигуры равна сумме площадей ее частей.

В связи с этим «Метод площадей» понимается и в другом смысле: как метод нахождения площади геометрической фигуры как суммы площадей, входящих в него, фигур.

В некоторых случаях площадь искомой фигуры находится как разность площадей фигур, частью которых она является.

В случае, если фигуры подобны, то площадь одной фигуры может быть выражена через их отношение подобия. Например, если треугольники подобны, то площадь одной фигуры можно найти, умножив коэффициент подобия в квадрате на площадь другого треугольника.

Рассмотрим примеры нахождения высоты в треугольнике с использованием формулы площади.

Пример 5.2.1. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 5 найти высоту, проведенную к гипотенузе.

Решение

1. Рассмотрим $\triangle ABC$ с прямым углом C и катетами $AC = 3$, $BC = 5$. По теореме Пифагора найдем $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

2. Пусть CH – высота, проведенная к гипотенузе.

Воспользуемся формулами для нахождения площади прямоугольного треугольника:

$$\begin{cases} S = \dfrac{1}{2} AC \cdot CB, \\ S = \dfrac{1}{2} CH \cdot AB \end{cases} \to \begin{cases} S = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4, \\ S = \dfrac{1}{2} CH \cdot 5 \end{cases} \to \frac{1}{2} CH \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \to CH = \frac{12}{5}.$$

Ответ: высота равна $\dfrac{12}{5}$.

Пример 5.2.2. В $\triangle ABC : AB = 13, BC = 14, AC = 15.$ Найти высоты, проведенные из вершин A и C. Найти радиус вписанной и описанной окружности.

Решение

Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 5.2.1).

1. Пусть O – ортоцент треугольника $\triangle ABC$. Требуется найти AO.

2. Зная три стороны, можем найти полупериметр $\triangle ABC: p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21.$

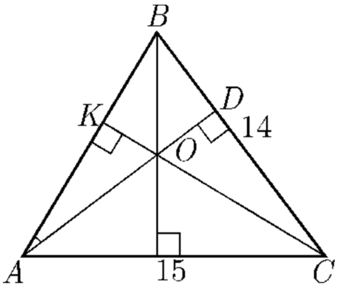


Рис. 5.2.1

3. Вычислим площадь $S_{\triangle ABC}$ по формуле Герона:

$$S = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84.$$

4. Далее найдем высоты $\triangle ABC$ по формулам:

$$S = \frac{1}{2} AD \cdot BC \to AD = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12.$$

$$S = \frac{1}{2} CK \cdot AB \to CK = \frac{2S}{AB} = \frac{2 \cdot 84}{13} = \frac{168}{13}.$$

5. Найдем радиус вписанной окружности по формуле:

$$S = pr \to r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4.$$

6. Найдем радиус описанной окружности по формуле:

$$S = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} \to R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125.$$

Ответ: $r = 4$; $R = 8{,}125$.

Рассмотрим пример, когда удобнее воспользоваться свойством аддитивности площади, чем использовать готовую формулу для нахождения площади треугольника.

Пример 5.2.3. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 6. Точка M – середина стороны BC. Точка N лежит на CD, так что $CN : ND = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника AMN.

Решение

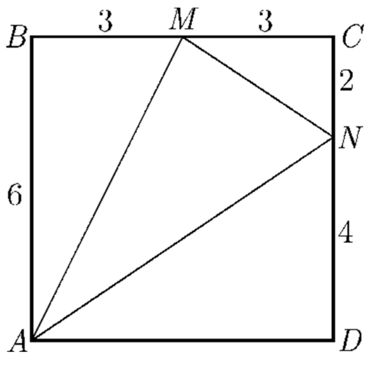


Рис. 5.2.2

Рассмотрим квадрат $ABCD$.

1. Найдем стороны $\triangle AMN$:

$AM = \sqrt{36+9} = \sqrt{45},$

$MN = \sqrt{9+4} = \sqrt{13},$

$AN = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}.$

2. Применять формулу Герона для вычисления площади $\triangle AMN$ нерационально.

3. Найдем площадь $\triangle AMN$ как разность площади квадрата и трех площадей прямоугольных треугольников:

$S_{\triangle AMN} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABM} - S_{\triangle MCN} - S_{\triangle AND}$.

4. Подставим числовые значения:

$$S_{\triangle AMN} = 36 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 12.$$

Ответ: площадь $\triangle AMN$ равна 12.

Пример 5.2.4. Найти биссектрису прямого угла треугольника, у которого катеты равны a и b.

Решение

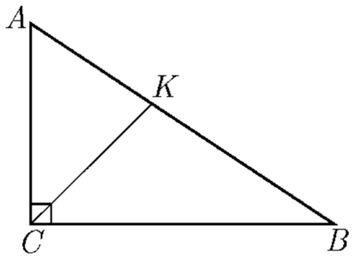


Рис. 5.2.3

Рассмотрим $\triangle ABC$.

1. Пусть в $\triangle ABC : \angle C = 90^0$, $CB = a, CA = b, CK$ – биссектриса $\angle BCA$.

Пусть $CK = x$.

Тогда $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CBK} + S_{\triangle ACK}$.

2. По теореме 2.7.2 и теореме 2.7.3 получаем:

$$\frac{1}{2}AC\cdot CB = \frac{1}{2}AC\cdot CK\cdot\sin\angle ACK + \frac{1}{2}BC\cdot CK\cdot\sin\angle BCK.$$

Тогда $ab = bx\sin 45^0 + ax\sin 45^0$, $x = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Ответ: биссектриса прямого угла равна $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

РАЗДЕЛ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

6.1. Метод дополнительных построений

Всякое решение геометрической задачи начинается с работы над чертежом. При этом иногда на «естественном» чертеже (т.е. на чертеже, на котором изображено только условие) трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, а если фигуру достроить, эти связи становятся очевидными. В работе [17, с. 228–229] приведены типовые конфигурации и рекомендуемые дополнительные построения.

В процессе решения задач, содержащих четырехугольник, как правило, необходимо выполнить дополнительное построение.

Так, например, в задачах, в которых присутствует трапеция, следует уделить внимание таким построениям, как проведение прямой, параллельной одной из боковых сторон, проведение прямой, параллельной одной из диагоналей, проведение двух высот трапеции, достраивание трапеции до треугольника, вершина которого образуется при пересечении продолжений боковых сторон.

Вместе с тем, существуют стандартные приемы дополнительных построений, которые часто применяются. Приведем некоторые из них, используя простую классификацию двух видов: разбиение фигур и дополнение фигур [18, с. 38].

Разбиение:

– проведение перпендикуляров, высот, осей симметрии с целью получения прямоугольных треугольников и применения теоремы Пифагора, тригонометрии или подобия (проведение радиусов окружности в точки касания, высот в трапеции, получение углов, стороны которых соответственно перпендикулярны и т.п.);

– проведение в многоугольнике отрезка, параллельного одной из его сторон с целью применения подобия (в частности проведение средней линии, если в условии задана середина отрезка);

– проведение в трапеции отрезка, параллельного одной из ее боковых сторон или диагоналей с целью получения треугольника и параллелограмма и применения свойств этих фигур.

Дополнение:

– построение параллелограмма, если задана медиана треугольника с целью применения свойств параллелограмма;

– построение вспомогательной фигуры (например, окружности с целью применения свойств хорд, касательных и углов);

– построение симметричной фигуры относительно прямой, содержащей какую-либо сторону многоугольника, т.к. часто фигуру полезно не только представлять, как часть другой фигуры, но и видеть ее на чертеже (применяются также центральная симметрия, поворот, гомотетия).

Метод «удлинения медианы»

Пример 6.1.1. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 5. Найти площадь треугольника.

Решение

1. Рассмотрим $\triangle ABC : AB = 10,\ \ AC = 12,\ \ AM = 5.$

Выполним дополнительное построение «удвоение медианы»: на продолжении AM за точку M отложим MD=AM. Соединим точку D с точками B и C (рис. 6.1.1).

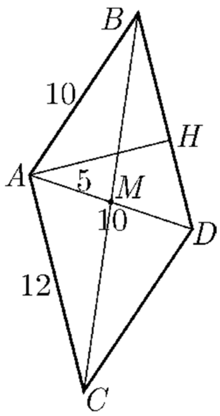


Рис. 6.1.1

2. Получившийся четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом, т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

3. Площадь $\triangle ABC$ найдем как половину площади параллелограмма $ABDC$.

Проведем высоту AH в параллелограмме $ABDC$.

4. Рассмотрим $\triangle ABD : AB = AD = 10,$ следовательно, он – равнобедренный, и высота AH является медианой.

5. По теореме Пифагора: $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$

6. Найдем площадь параллелограмма: $S_{ABDC} = AH \cdot BD = 8 \cdot 12 = 96.$

Итак, площадь $\triangle ABC$: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} S_{ABDC} = \dfrac{96}{2} = 48.$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 48.$

Пример 6.1.2. Даны два треугольника, причём сторонами второго из них являются медианы первого. Доказать, что отношение площади первого треугольника к площади второго есть $\dfrac{4}{3}$ [1].

Решение

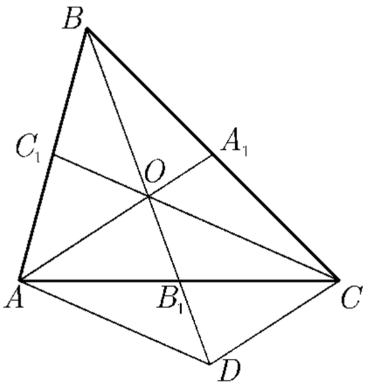


Рис. 6.1.2

1. Пусть в $\triangle ABC$ отрезки $AA_1 = m_a, BB_1 = m_b, CC_1 = m_c$ – это медианы, а O – точка их пересечения, S_1 и S_2 – площади первого и второго треугольников соответственно.

2. «Удвоим медиану» BB_1 следующим образом: отложим на продолжении медианы BB_1 отрезок $B_1D{=}OB_1$ и достроим $\triangle AOC$ до параллелограмма $AOCD$ (рис. 6.1.2).

Каждая из диагоналей параллелограмма $AOCD$ делит его на два равновеликих треугольника, т.е. $S_{\triangle OCD} = S_{\triangle AOC}$.

3. Но $S_{\triangle AOC} = \dfrac{1}{3}S_1$ и, значит $S_{\triangle OCD} = \dfrac{1}{3}S_1$. Далее, поскольку $OC = \dfrac{2}{3}m_c, OD = \dfrac{2}{3}m_b, DC = AO = \dfrac{2}{3}m_a$, то $\triangle OCD$ подобен треугольнику со сторонами m_a, m_b, m_c с коэффициентом подобия $k = \dfrac{2}{3}$. Но в таком случае $S_{\triangle OCD} = \dfrac{4}{9}S_2 = \dfrac{1}{3}S_1$, откуда и следует, что $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{4}{3}$.

Утверждение доказано.

6.2. Метод подобия

Образование подобных фигур – явление частое, возникающее в наличии дополнительных построений, наличия перпендикулярных прямых. «С помощью подобия иногда удается «связать» совершенно разрозненные отрезки геометрической конструкции, а из равенства соответствующих углов можно «увидеть» параллельность заданных в условии прямых» [18, с. 56].

Применение свойств параллельных прямых, теоремы Фалеса, подобных треугольников существенно может помочь в решении планиметрических задач, поскольку дает равенство углов, пропорциональность сторон, отношение периметром и площадей.

Пример 6.2.1. В равностороннем треугольнике ABC сторона AC продолжена на отрезок CD, а сторона BC на отрезок CE, причем $BD=DE$. На продолжении BC за точкой за точкой C взята точка F так, что $CF=CD$, и проведены отрезки CN и EL параллельно FA (здесь точка N – точка на стороне AB; L – на продолжении AB). Известно, что $NL=15$, $DE=21$. Найти длины отрезков CF и AN.

Решение

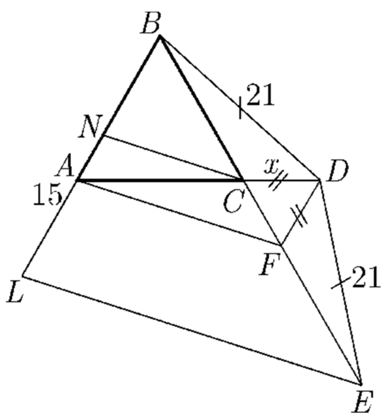


Рис. 6.2.1

Рассмотрим равносторонний $\triangle ABC$ и сделаем дополнительные построения, указанные в условии задачи (рис. 6.2.1).

1. Заметим, что $\triangle CDF$ – равносторонний.

2. Рассмотрим $\triangle BDC = \triangle DFE$, т.к. $\angle BCD = \angle DFE = 120^0$, $\angle DBC = \angle DEF$, $BD = DE$.

3. По теореме Фалеса:

$BC = FE, NC \parallel AF \parallel LE \Rightarrow BN = AL.$

4. $BN + AN = AL + AN = NL = 15 \Rightarrow BC = 15.$

5. Обозначим $DC = x$, тогда по теореме косинусов для $\triangle BDC$ имеем: $21^2 = x^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot x \cdot \cos 120^0$.

Решим квадратное уравнение $x^2 + 15x - 216 = 0$, получим, что $x = 9$. Отсюда $CD = CF = 9$.

6. По теореме Фалеса $\frac{AN}{NB}=\frac{CF}{BC}$, пусть $AN=a$, тогда $\frac{a}{15-a}=\frac{9}{15}$. Отсюда $a=\frac{45}{8}\to AN=\frac{45}{8}$.

Ответ: $CF=9$ и $AN=\frac{45}{8}$.

Пример 6.2.2. В треугольнике $\triangle ABC$ на сторонах AB и BC взяты точки K и P так, что $AK:BK=1:2, CP:PB=2:1$. Прямые AP и CK пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$, если известно, что площадь треугольника $\triangle BEC$ равна 4 см².

Решение

Рассмотрим $\triangle ABC$ и отметим на сторонах AB и BC точки K и P (рис. 6.2.2).

1. Введем вспомогательные переменные $AK=x$, $BK=2x$, $BP=y$, $CP=2y$.

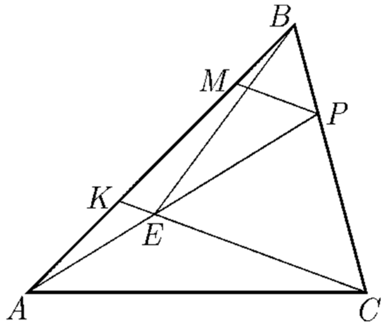


Рис. 6.2.2

2. Сделаем дополнительное построение: проведем $PM\parallel KC$. По Теореме Фалеса $\frac{BM}{MK}=\frac{BP}{PC}=\frac{1}{2}$. Значит, $BM=\frac{2x}{3}, KM=\frac{4x}{3}$.

3. Далее, $\triangle AKE\sim\triangle AMP$ ($\angle A$ – общий, $\angle AKE=\angle AMP$ как соответственные при параллельных прямых MP и KE),

поэтому $\frac{KE}{MP}=\frac{AK}{AM}$, т.е. $\frac{KE}{MP}=\frac{x}{x+\frac{4x}{3}}=\frac{3}{7}$, и, значит,

$KE=\frac{3}{7}MP$. С другой стороны, $\frac{MP}{KC}=\frac{BP}{BC}=\frac{1}{3}$, т.е. $MP=\frac{1}{3}KC$.

4. В итоге получаем, что $KE=\frac{1}{7}KC$, а потому $EC=\frac{6}{7}KC$.

5. Рассмотрим $\triangle BEC$ и $\triangle BKC$. У них высота, проведенная из вершины B, общая. Значит по теореме 2.7.5 их площади относятся как основания KC и EC, т.е. $\frac{S_{BKC}}{S_{BEC}}=\frac{KC}{EC}=\frac{7}{6}$.

6. Известно, что $S_{BEC}=4$ см², следовательно, $S_{BKC}=\frac{7}{6}\cdot 4=\frac{14}{3}$ см².

7. Теперь, рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle BKC$. У них высота, проведенная из вершины C, общая. Значит, их площади относятся как основания: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{BKC}} = \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$.

В итоге получаем $S_{ABC} = \dfrac{3}{2} S_{BKC} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{14}{3} = 7$ см^2.

Ответ: 7 см^2.

Пример 6.2.3. В $\triangle ABC$ точка K лежит на стороне AC, причем $AK : KC = 2 : 3$. Точка M делит сторону AB на два отрезка, один из которых вдвое больше другого. Прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BK в точке P. Найти отношение $BP : KP$.

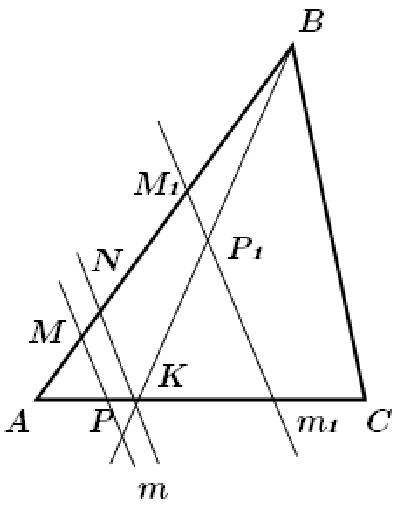


Рис. 6.2.3

Решение

1. Поскольку в условии задачи не указано относительно какого из концов отрезка AB он делится точкой M в отношении *1:2*, то необходимо рассмотреть два случая расположения точки M, такие, что $AM : MB = 1 : 2$ и $AM_1 : M_1B = 2 : 1$.

2. Проведем через точку K прямую NK параллельно BC. Тогда по теореме Фалеса $AN : NB = AK : KC = 2 : 3$.

3. Далее проводим параллельно BC прямые m и m_1 через точки M и M_1 соответственно. Пусть $P = BK \cap m$ и $P_1 = BK \cap m_1$ (рис. 6.2.3).

4. Из теоремы Фалеса следует, что $BP : KP = MB : NM$. Т.к. $AN = \dfrac{2}{5}AB$, $BM = \dfrac{2}{3}AB$, $AM = \dfrac{1}{3}AB$, $MB = \dfrac{2}{3}AB$ и

$$MN = AN - AM = \frac{1}{15}AB, \quad BP : KP = MB : NM = \frac{2}{3}AB : \frac{1}{15}AB = 10 : 1.$$

$$BP_1 : KP_1 = BM_1 : M_1N = \frac{1}{3}AB : \frac{4}{15}AB = 5 : 4.$$

Ответ: отношение $BP : KP = 10 : 1$ или $BP : KP = 5 : 4$.

6.3. Метод вспомогательной окружности

Во многих задачах окружность не задана, однако наличие определённых соотношений между точками позволяет вписать или описать окружность в геометрическую фигуру. Тем самым, все свойства окружности будут являться «помощниками» в решении задачи.

Теорема 6.3.1. Четыре точки A, B, M и K принадлежат окружности тогда и только тогда, когда:

а) M и K расположены по одну сторону от AB и $\angle AMB = \angle AKB$;

б) M и K расположены по разные стороны от AB и $\angle AMB + \angle AKB = 180^0$;

в) $\angle AMB = \angle AKB = 90^0$;

г) A, B, M *и* K равноудалены от центра окружности.

Продемонстрируем метод введения вспомогательной окружности на простом примере.

Пример 6.3.1. Медиана прямоугольного треугольника, поведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника, а длина ее равна половине гипотенузы.

Доказательство

1. Пусть задан прямоугольный треугольник $\vartriangle ABC$.

Опишем около $\vartriangle ABC$ окружность (рис. 6.3.1). Центр окружности будет совпадать с серединой гипотенузы. Значит, BO – медиана, но $\vartriangle ABO$ и $\vartriangle BCO$ – равнобедренные, т.к. $AO = OB = OC = R$.

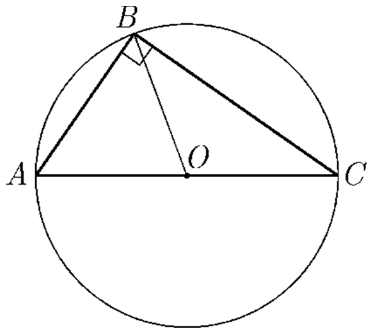


Рис. 6.3.1

Утверждение доказано.

Пример 6.3.2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает ее на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC – биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC=15$ и $BD=8,5$.

Решение

а) 1. Пусть задана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC.

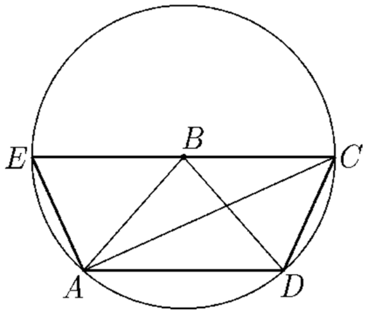


Рис. 6.3.2

2. Из равнобедренности треугольников $\angle BAC = \angle ACB = \angle CAD$, следовательно, AC – биссектриса $\angle BAD$.

б) 3. Поскольку $BA = BD = BC = 8,5$, точки A, D и C лежат на окружности радиуса 8,5 с центром в точке B.

4. Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке E.

5. Тогда EC – диаметр окружности, а $ADCE$ – равнобедренная трапеция.

6. Поэтому $AE = CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CE, получаем, что $\angle CAE = 90^0$.

7. Из прямоугольного треугольника $\triangle CAE$ находим, что $AE = \sqrt{CE^2 - AC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Следовательно, $CD = AE = 8$.

Ответ: 8.

Пример 6.3.3. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30^0. Точка E лежит вне прямоугольника, причем $\angle BEC = 120^0$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$, $CE = 24$.

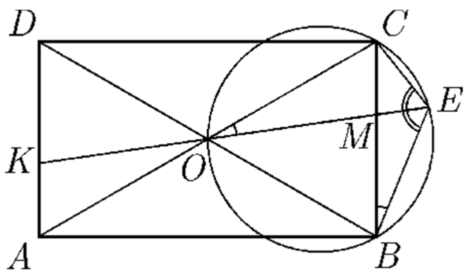


Рис. 6.3.3

Решение

Рассмотрим $ABCD$ – прямоугольник (рис. 6.3.3).

а) По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO = 30^0 + 30^0 = 60^0.$$

Поэтому

$$\angle BEC + \angle BOC = 120^0 + 60^0 = 180^0.$$

Значит $BOCE$ – вписанный четырехугольник. Отсюда, $\angle CBE = \angle COE$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу.

б) $\angle CEO = \angle OEB$ как вписанные, опирающиеся на равные дуги. Следовательно, OE – биссектриса угла E.

1. Рассмотрим $\triangle BCE$. По теореме косинусов найдем BC:

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cdot cos120^0} = \sqrt{40^2 + 24^2 - 2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 56.$$

2. Так как EM – биссектриса, то по основному свойству биссектрисы (теорема 2.6.2) $\frac{CM}{BM} = \frac{CE}{BE} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$, значит $CM = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8} \cdot 56 = 21$, $BM = 35$.

3. По теореме 4.2.2. о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим $MO = \frac{BM \cdot CM}{EM} = \frac{35 \cdot 21}{15} = 49$.

4. Рассмотрим $\triangle COM$ и $\triangle AOK$: $AO = OC$, $\angle KOA = \angle COM$, $\angle OKA = \angle OMC$, следовательно, $EK = EM + 2OM = 15 + 98 = 113$.

Ответ: 113.

Пример 6.3.4. В равнобедренном $\triangle ABC$, где угол B – тупой, на продолжение BC опущена высота AH. Из точки H на стороны AB и AC опущены перпендикуляры HK и HM, соответственно. Докажите, что $AM = MK$.

Решение

Рассмотрим тупоугольный $\triangle ABC$ (рис. 6.3.4).

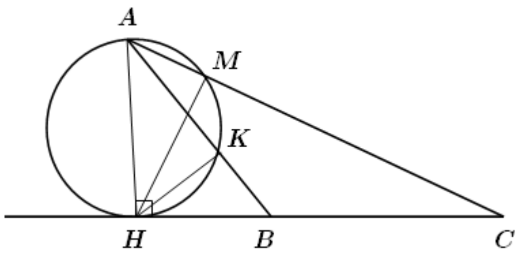


Рис. 6.3.4

1. $\triangle AMH$, $\triangle AKH$ – прямоугольные, с общей гипотенузой AH. Значит по теореме 6.3.1, точки A, M, K, H – лежат на одной окружности, центр которой – середина AH.

2. $\angle KAM = \angle KHM = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\smile}{MK}$. А $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ по свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\triangle ABC$.

3. $\angle HBA = \angle BAC + \angle BCA = \alpha + \alpha = 2\alpha$ по теореме о внешнем угле.

5. Из $\triangle ABH : \angle HAB = 90^0 - 2\alpha$. Из $\triangle AKH : \angle AHK = 2\alpha$.

6. $\angle AHM = \angle AHK - \angle KHM = 2\alpha - \alpha = \alpha$.

7. $\angle AHM = \angle AKM = \alpha$ как вписанные.

8. Из доказанного следует, что $\triangle AMK$ – равнобедренный. Следовательно, $AM = MK$.

6.4. Разные методы решения одной задачи

При решении задачи несколькими способами вскрываются общие методы и происходят обобщения [18, с. 171]. Рассмотрим решения нескольких задач разными способами.

Пример 6.4.1. Пусть задан прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, про который известно: $\angle C = 90^0$, $AL : LB = 4 : 3$. Найти периметр треугольника $\triangle ABC$ [18, с. 171–174].

Решение

1. Пусть в $\triangle ABC$: $BC = 3k$, $AC = 4k$, $AB = 5k$ (рис. 6.4.1.).

Тогда $AL = \dfrac{20k}{7}$, $LB = \dfrac{15k}{7}$.

$P_{\triangle ABC} = 12k$.

Таким образом задача свелась к нахождению вспомогательного элемента k.

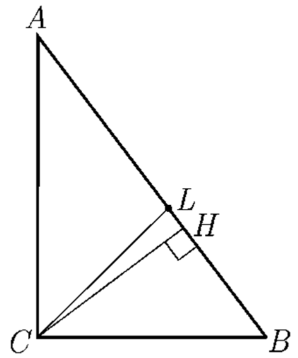


Рис. 6.4.1

Способ 1. Воспользоваться методом площадей.

1. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACL} + S_{\triangle BCL}$.

$$\frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot CL \cdot \sin 45^0 + \frac{1}{2}CB \cdot CL \cdot \sin 45^0.$$

2. Подставим значения

$$\frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 4k = \frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 24\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4k \cdot 24\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$12k = 3 \cdot 24 + 4 \cdot 24 = 7 \cdot 24, \text{ отсюда } k = 14.$$

Способ 2: Воспользоваться формулой для нахождения биссектрисы в треугольнике $l = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$.

Подставим в эту формулу все имеющиеся значения и катеты треугольника, выраженные через k. Получим

$$24\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 3k \cdot 4k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{(3k + 4k)} \leftrightarrow \frac{12\sqrt{2}k^2}{7k} = 24\sqrt{2} \leftrightarrow k = 14.$$

Способ 3. Воспользоваться теоремой Стюарта: в любом треугольнике справедливо равенство

$$AC^2 \cdot BL + BC^2 \cdot AL - CL^2 \cdot AB = AB \cdot AL \cdot BL.$$

Подставим в эту формулу все имеющиеся значения и элементы треугольника, выраженные через k. Получим,

$$16k^2 \cdot \frac{15k}{7} + 9k^2 \cdot \frac{20k}{7} - 24^2 \cdot 2 \cdot 5k = 5k \cdot \frac{15k}{7} \cdot \frac{20k}{7}.$$

Умножим все равенство на $\frac{7}{5k}$ и выразим k^2:

$$16k^2 \cdot 3 + 9k^2 \cdot 4 - 24^2 \cdot 2 \cdot 7 = \frac{15 \cdot 20}{7} k^2,$$

$$k^2 = \frac{24^2 \cdot 2 \cdot 7^2}{(48+36) \cdot 7 - 300} = \frac{(24 \cdot 7)^2}{144} = \left(\frac{24 \cdot 7}{12}\right)^2 = 14^2,$$

$$k = 14.$$

Способ 4. Воспользуемся векторным методом. Выразим вектор $\overrightarrow{CL}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ *и* $\overrightarrow{CB}$:

1. $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{CA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{4}{7}\left(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{3}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}.$

$\overrightarrow{CL}^2 = \left(\frac{3}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}\right)^2$, $\overrightarrow{CL}^2 = \frac{9}{49}\overrightarrow{CA}^2 + \frac{16}{49}\overrightarrow{CB}^2 + \frac{12}{49}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}.$

2. Подставим длины векторов: $\overrightarrow{CL}^2 = \left(24\sqrt{2}\right)^2$, $\overrightarrow{CA}^2 = (4k)^2$, $\overrightarrow{CB}^2 = (3k)^2$. С учетом того, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, получаем:

$$24^2 \cdot 2 = \frac{9}{49} \cdot 16k^2 + \frac{16}{49} \cdot 9k^2 + 0,\ 24^2 = \frac{144k^2}{49} \leftrightarrow 24 = \frac{12k}{7} \leftrightarrow k = 14.$$

Способ 5. Сделать дополнительное построение.

1. Проведем высоту CH. Тогда, получим, что $\triangle CBH \sim \triangle ABC$ с коэффициентом $\frac{3}{5}$.

Поэтому $BH = \frac{9k}{5}$, $CH = \frac{12k}{5}$ $\triangle CLH : LH = \frac{15k}{7} - \frac{9k}{5} = \frac{12k}{35}$.

2. По теореме Пифагора: $\left(\frac{12k}{35}\right)^2 + \left(\frac{12k \cdot 7}{35 \cdot 7}\right)^2 = \left(24\sqrt{2}\right)^2$.

Итак, $P_{\triangle ABC} = 12k = 7 \cdot 24 = 168$.

В [18, с. 171–174] представлено 13 способов решения задачи, рекомендуем читателю познакомиться с ними.

Пример 6.4.2. Доказать, что если в треугольнике медиана вдвое меньше стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.

Краткие решения

Пусть задан $\triangle ABC$, в котором известно, что $CD = \dfrac{1}{2}AB$, $AD = DB$.

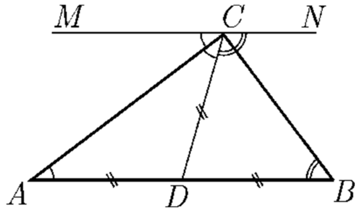


Рис. 6.4.2 *а*)

Способ 1. Проведем прямую $MN \parallel AB$ (рис. 6.4.2 *а*).

1. Из параллельности, следует, что $\angle ACM = \angle CAD$ и $\angle NCB = \angle DBC$.

2. Из условия следует, что $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ – равнобедренные.

3. Из пункта 1 и 2 следует, что $\angle ACM = \angle ACD$ и $\angle NCB = \angle BCD$. Таким образом, AC – биссектриса $\angle MCD$ и CB – биссектриса $\angle DCN$.

4. Так как $\angle MCD$ и $\angle DCN$ – смежные, то угол, образованный биссектрисами, равен 90^0.

Способ 2. Проведем прямую $MN \parallel AB$. Обозначим углы, образованные параллельными прямыми и секущими как показано на рис. 6.4.2 *б*).

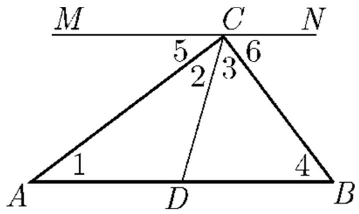


Рис. 6.4.2 *б*)

Из вышеприведённых рассуждений:

$$\left.\begin{matrix}\angle 1 = \angle 2\\ \angle 1 = \angle 5\end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle 2 = \angle 5;$$

$$\left.\begin{matrix}\angle 4 = \angle 3\\ \angle 4 = \angle 6\end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle 3 = \angle 6.$$

$$\angle 5 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 6 = 180^0.$$

$$2 \cdot (\angle 2 + \angle 3) = 180^0 \Rightarrow \angle 2 + \angle 3 = 90^0.$$

$$2 \cdot (\angle 2 + \angle 3) = 180^0 \Rightarrow \angle 2 + \angle 3 = 90^0.$$

Доказано.

Пример 6.4.3. В трапеции диагонали длиной 6 см и 8 см взаимно перпендикулярны. Найти длину средней линии трапеции.

Решение

Пусть $ABCD$ – трапеция, в которой $AD \parallel BC$, $AC = 6$, $BD = 8$, MN – средняя линия (рис. 6.4.3).

Способ 1. Сделаем дополнительное построение, проведем $DK \parallel AC$. Так как $BD \perp AC$, то $BD \perp DK$, следовательно $\triangle BDK$ – прямоугольный. Найдем

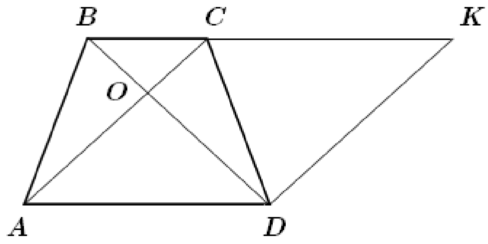


Рис. 6.4.3 *а*)

$BK = \sqrt{BD^2 + DK^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$

Заметим, что $BK = BC + AD = 2MN$. Следовательно, $MN = 5$.

Способ 2. Введем вспомогательные переменные $OC = x$, $BO = y$. Тогда $AO = 6 - x$, $DO = 8 - y$.

Рассмотрим $\triangle BOC \sim \triangle AOD$: $\dfrac{x}{6-x} = \dfrac{y}{8-y}$, откуда $y = \dfrac{4}{3}x$.

Из $\triangle BOC : BC = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{4}{3}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{16}{9}x^2} = \dfrac{5}{3}x.$

Из $\triangle BOC \sim \triangle AOD : \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{OC}{AD} \to \dfrac{\frac{5}{3}x}{AD} = \dfrac{x}{6-x} \to AD = \dfrac{5}{3}(6-x).$

$$MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{\frac{5}{3}x + 10 - \frac{5}{3}x}{2} = 5.$$

Способ № 3. Воспользуемся методом площадей.

1. Сделаем дополнительное построение: проведем прямую $CE \parallel BD$, где точка E – точка пересечения CE и продолжения AD (рис. 6.4.3. *б*). Получим прямоугольный $\triangle ACE$. Высота CH является высотой, проведённой к гипотенузе в $\triangle ACE$, и высотой трапеции h. Используя метод площадей применительно к $\triangle ACE$, найдем высоту: $\dfrac{1}{2} \cdot 10h = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \to h = 4,8.$

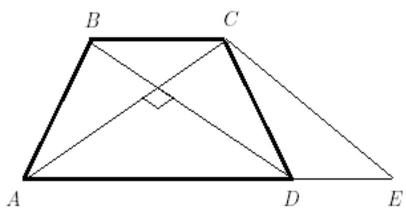


Рис. 6.4.3 *б*)

2. $S_{трап.} = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$

3. С другой стороны, $S_{трап.} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h.$

Получим, что $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{S_{трап.}}{h} = \dfrac{24}{4,8} = 5.$

Ответ: длина средней линии трапеции равна 5.

Задания для практических занятий

Познакомьтесь с теоретическим материалом и примерами задач с решениями. Рекомендуемая литература: [1, 6, 7, 10, 11, 17, 18, 27, 34, 37, 40, 43, 44, 54, 57, 63, 64, 65, 66, 66, 67].

Задание 1. Решить задачи «на доказательство»

6.1.1. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AD и BE. Докажите, что середина отрезка DE принадлежит средней линии треугольника ABC, параллельной его основанию.

Указание: провести прямую $DS \parallel MN$ *, найти подобные треугольники, выписать пропорциональные стороны и сделать вывод, опираясь на теорему Фалеса.*

6.1.2. Пусть в остроугольном $\triangle ABC$ точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот. Докажите, что точка H пересечения высот $\triangle ABC$ является точкой пересечения биссектрис $\triangle A_1B_1C_1$. Исследуйте случаи прямоугольного и тупоугольного треугольников.

Указание: На сторонах AC *и* BC *как на диаметрах построить окружность.*

6.1.3. Дан прямоугольный $\triangle ABC$: $\angle C = 90^0$. На катете BC выбрана произвольная точка M. Из точки M проведён перпендикуляр MN на гипотенузу AB. Докажите, что угол ANC равен углу AMC.

6.1.4. Отрезок BD – биссектриса $\triangle ABC$. Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

Указание: описать окружность, продлить биссектрису и воспользоваться теоремой о хордах.

6.1.5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Вершины A и D соединены отрезками с точкой M, лежащей на стороне BC, а вершины B и C – с точкой N, лежащей на стороне AD. Отрезки BN и AM пересекаются в точке O, а отрезки CN и DM – в точке P. Докажите, что площадь четырехугольника $MPNO$ равна сумме площадей треугольников ABO и CDP.

Указание: выразить $S_{MPNO} = S_{BCN} - S_{BON} - S_{MPC}$; *далее обозначив высоту трапеции через h, выразить площади треугольников.*

Задание 2. Решить задачи, используя рекомендованный метод решения

6.2.1. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния от которой до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100 см^2. Найти катеты треугольника.

Указание: Ввести вспомогательные параметры. Пусть $BC = x$, $AC = y$.

Ответ: 40 и 5 см или 10 и 20 см.

6.2.3. Расстояния от точки M, лежащей внутри $\triangle ABC$, до его сторон AC и BC равны соответственно 2 и 4 см. Вычислить расстояние от точки M до прямой AB, если $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $AC = 21$ см.

Указание. Обозначить искомое расстояние через x. Воспользоваться методом площадей, выразив площадь $\triangle ABC$ *двумя способами.*

Ответ: 5,8 см.

6.2.4. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.

Указание. Воспользоваться методом площадей.

Ответ: $10\dfrac{5}{8}$ см.

6.2.5. Медианы треугольника равны 3, 4 и 5 см. Найти площадь треугольника.

Указание: Пусть точка O – точка пересечения медиан. На продолжении медианы BM отложить отрезок DM=OM. Докажите, что $S_{\triangle ADO} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC}$. *Площадь* $\triangle ADO$ *найти по формуле Герона.*

Ответ: 8 см^2.

6.2.6. В равнобедренном $\triangle ABC$ $(AC = CB)$ проведена медиана CC_1 и биссектриса AA_1. Найти $\angle ACB$, если $AA_1 = 2CC_1$.

Указание: провести $C_1D \parallel AA_1$ *и ввести опорный элемент* $\angle ACC_1 = \angle C_1CB = \angle CDC_1 = \alpha$.

6.2.7. Расстояние между основаниями двух высот BM и BN ромба $ABCD$ вдвое меньше диагонали BD. Найдите углы ромба.

Ответ: 150^0 и 30^0.

6.2.8. Внутри $\angle ABC$ равностороннего $\triangle ABC$ взята точка M так, что $\angle BMC = 30^0$, $\angle BMA = 17^0$. Найти углы $\angle BAM$ и $\angle BCM$.

Указание: построить вспомогательную окружность с центром в точке A радиусом AB. Доказать, что точка M принадлежит этой окружности. Углы найти из свойства вписанного четырехугольника.

Ответ: 146^0 и 107^0.

6.2.9. На гипотенузе прямоугольного $\triangle ABC$ с катетами 21 и 28 см как на стороне построен квадрат $ABDE$ (треугольник и квадрат лежат по разные стороны от гипотенузы), центр квадрата соединен отрезком прямой с вершиной прямого угла треугольника. Найти длины отрезков, на которые указанной прямой делится гипотенуза.

Указание: описать окружность около четырехугольника ACBK. Доказать, что CK биссектриса прямого угла и воспользоваться основным свойством биссектрисы.

Ответ: 15 и 20 см.

6.2.10. В треугольник вписан ромб со стороной m так, что один угол у них общий, а противоположная вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки длиной p и q. Найти стороны треугольника.

Указание: найти пары подобных треугольников и составить отношение пропорциональных сторон.

Ответ: $p + q$; $\dfrac{m\cdot(p+q)}{p}$; $\dfrac{m\cdot(p+q)}{q}$.

Задание 3. Решить задачи разными способами

6.3.1. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

6.3.2. Докажите, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

6.3.3. Доказать теорему Фалеса.

6.3.4. Точка K – середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Докажите, что $\angle KLD$ – прямой.

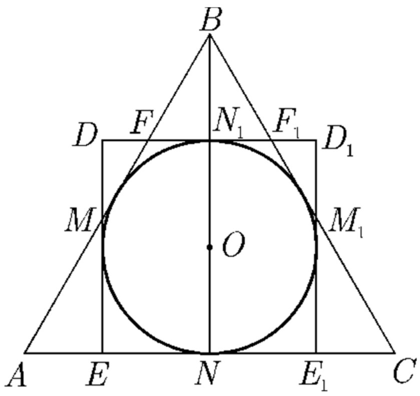
Задание 4. Решить задачи повышенного уровня сложности

6.4.1. Противоположные стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ параллельны. Через вершины B и D проведены параллельные прямые, пересекающие диагональ AC в точках M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MB = NC$. Найдите отношение площади четырехугольника $BMDN$ к площади четырехугольника $ABCD$.

Указание: доказать, что $ABCD$ – параллелограмм с использованием теоремы Фалеса. Воспользоваться тем, что медиана делит треугольник на два равновеликих. Ввести вспомогательную переменную $S_{AMD} = S$.

Ответ: $1:3$.

6.4.2. Около круга радиуса R описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.



Указание: Общей частью будет являться шестиугольник, площадь которого можно найти как площадь квадрата минус удвоенная площадь «выступающего» прямоугольного треугольника $\triangle MDF$. Катеты можно найти из подобия треугольников.

Ответ: $S = \dfrac{R^2\sqrt{3}\left(6\sqrt{3}-4\right)}{3}$.

ЧАСТЬ 3. НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

РАЗДЕЛ 7. ЗАДАЧИ НА ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ

Особую сложность представляют задачи, в которых требуется установить принадлежность точек геометрическим фигурам. Сложность заключается в том, что методы могут быть совершенно разные и по условию задачи зачастую не совсем ясно каким методом эффективнее всего воспользоваться.

Весьма условно можно выделить два подхода к типологии этих задач.

Подход № 1. Выбор решения зависит от того, что необходимо сделать:

– доказать, что три точки лежат на одной прямой;

– доказать, что прямые пересекаются в одной точке;

– доказать, что четыре точки принадлежат одной окружности.

Подход № 2. Выбор решения зависит от предпочитаемого метода решения:

– аналитико-синтетический метод,

– алгебраический метод,

– с помощью преобразования плоскости,

– векторно-координатный метод.

В настоящем пункте мы приведем несколько распространённых способов доказательства того, что точки принадлежат фигурам[19].

Принадлежность точек прямой

Пример 7.1. Три окружности имеют общую точку M и попарно пересекаются в точках P, Q, R. Через произвольную точку A одной из окружностей, лежащую на дуге PQ, не содержащей точки M, и точки P и Q, в которых окружность пересекает две другие окружности, проведены прямые, пересекающие эти же две окружности в точках B и C. Докажите, что точки B, C и R лежат на одной прямой.

[19] Заметим, что ряд способов, таких как, например, применение движений не будет рассмотрено в настоящем пособии. Векторно-координатный метод будет рассмотрен на одном примере в приложении.

Решение

1. Четырехугольники $BRMP$, $APMQ$ и $CQMR$ – вписанные (рис. 7.1).

Поэтому $\angle BRM + \angle CRM = \angle APM + \angle AQM = 180^0$.

2. Следовательно, точки B, C и R лежат на одной прямой.

Замечание. Таким образом, чтобы показать, что три точки A, B и C лежат на одной прямой, можно показать, что углы $\angle ABK$ и $\angle KBC$ – смежные, где точка K – некоторая точка плоскости.

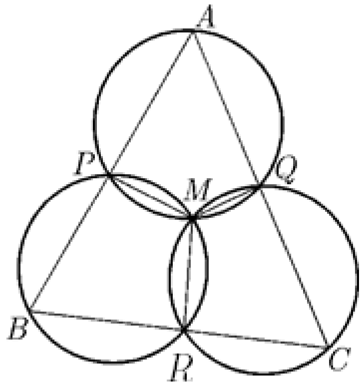


Рис. 7.1

Пример 7.2. Доказать, что ортоцентр, центр тяжести и центр описанной окружности ***лежат на одной прямой*** *(прямая Эйлера)*. При этом центр тяжести делит расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности в отношении 2:1.

Решение

1. Пусть точка H – ортоцентр (точка пересечения высот), точка O – центр описанной окружности, точка M – центр тяжести (точка пересечения медиан) $\vartriangle ABC$. Докажем, что точки H, O и M лежат на одной прямой и $MH = 2MO$.

2. Пусть P – середина стороны AC $\vartriangle ABC$, G – точка пересечения прямых BP и OH (рис. 7.2).

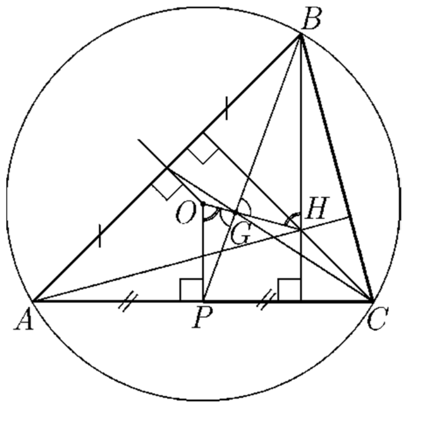


Рис. 7.2

3. Заметим, что $OP \perp AC$ (как радиус вписанной окружности, проведенный в точку касания), $BH \perp AC$ (как высота, проведенная к AC).

Из перпендикулярности двух прямых к одной прямой, следует: $OP \parallel BH$. Из параллельности прямых следует, что их накрест лежащие углы равны: $\angle POH = \angle OHB$. Углы $\angle OGP = \angle HGB$ как вертикальные.

4. Следовательно, $\vartriangle POG \sim \vartriangle BHG$ по первому признаку подобия. Из подобия следует отношение: $\dfrac{BG}{GP} = \dfrac{BH}{OP}$.

5. Из теоремы 4.4.7 следует: $BH = 2OP$ или $\dfrac{BH}{OP} = 2$.

6. Отсюда: $\dfrac{BG}{GP} = \dfrac{BH}{OP} = \dfrac{2}{1}$. Следовательно, G – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, т.е. G совпадает с M и $MH = 2MO$.

Утверждение доказано.

Замечание: Таким образом, чтобы доказать, что три точки лежат на одной прямой можно показать, что отрезок, составленный из двух заданных точек, пересекается с некоторой прямой в третьей точке.

Пример 7.3. $ABCD$ – ромб. Вне ромба взяты точки M и K, такие, что треугольники ADM и DCK – правильные. Точки M и B лежат по одну сторону от AD, точки K и B – по разные стороны от CD. Докажите, что B, M, K принадлежат одной прямой.

Доказательство

1. Для того, чтобы доказать принадлежность точек B, M и K одной прямой необходимо рассмотреть угол, образуемый отрезками, соединяющими крайние точки с точкой, лежащей между ними. Если этот угол равен 180^0, то это означает прямолинейность расположения точек.

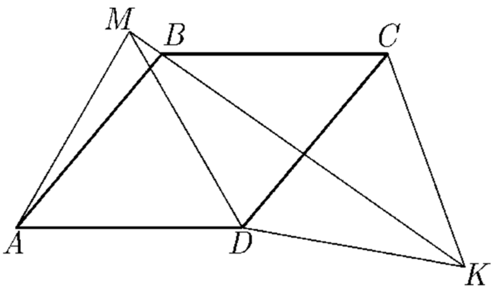


Рис. 7.3 *а*)

Таким образом, надо рассмотреть два случая, когда точка B лежит между M и K (надо доказать, что $\angle MBK = 180^0$) и когда точка M лежит между B и K (надо доказать, что $\angle BMK = 180^0$).

2. Пусть $\angle MAB = \alpha$. Тогда из равнобедренного $\triangle ABM$ $(AB = AM)$ получаем, что $\angle ABM = \angle BMA = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}$.

3. Рассмотрим первый случай, когда точка B лежит между M и K (рис. 7.3 *а*):

$$\angle MDC = 180^0 - \angle BAD - \angle MDA = 180^0 - \left(60^0 - \alpha\right) - 60^0 = 60^0 + \alpha.$$

$$\angle MDK = \angle MDC + \angle CDK = 60^0 + \alpha + 60^0 = 120^0 + \alpha.$$

$$\angle MKD = \frac{1}{2}\left(180^0 - \angle MDK\right) = 30^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\angle CKB = \angle CBK = 60^0 - \angle MKD = 30^0 + \frac{\alpha}{2}.$$

$$\angle ADC = \angle ABC = \angle MDA + \angle MDC = 120^0 + \alpha.$$

$$\angle ABK = \angle ABC - \angle CBK = 120^0 + \alpha - \left(30^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 90^0 + \frac{\alpha}{2}.$$

$$\angle MBK = \angle ABM + \angle ABK = 90^0 + \frac{\alpha}{2} + 90^0 - \frac{\alpha}{2} = 180^0.$$

Таким образом, утверждение для первого случая задачи доказано.

4. Рассмотрим второй случай, когда точка M лежит между B и K (рис. 7.3 *б*).

$$\angle BMK = \angle AMB + \angle AMD + \angle MDK.$$

$$\angle AMB = 90^0 - \frac{\alpha}{2};\ \angle AMD = 60^0.$$

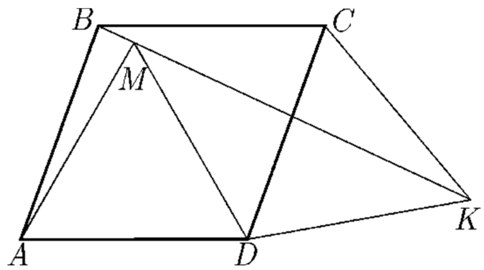


Рис. 7.3 *б*)

5. $\angle MDK = 30^0 + \dfrac{\alpha}{2}$ (рассуждения аналогичные первому случаю).

$$\angle BMK = 90^0 - \frac{\alpha}{2} + 60^0 + 30^0 + \frac{\alpha}{2} = 180^0.$$

Таким образом, утверждение для второго случая задачи доказано.

Утверждение доказано.

Пример 7.4. *(Теорема Ньютона).* Доказать, что в описанном четырехугольнике середины диагоналей ***лежат на одной прямой*** с центром его вписанной окружности.

Доказательство

1. Докажем лемму: Стороны AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ площади S не параллельны. Найдите геометрическое место точек X, лежащих внутри четырёхугольника, для которых $S_{ABX} + S_{CDX} = \dfrac{S}{2}$.

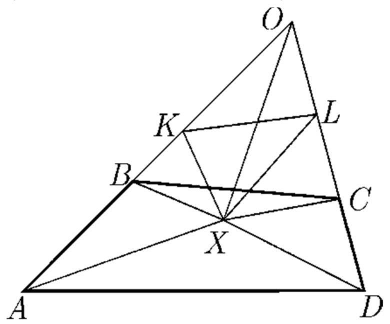


Рис. 7.4 а)

2. Пусть точка O – точка пересечения прямых AB и CD. Отложим на лучах OA и OD отрезки OK и OL равные AB и CD соответственно.

3. Тогда $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{KOX} + S_{LOX} = S_{KOL} \pm S_{KXL}$.

Следовательно, площадь $\triangle KXL$ постоянна, т.е. точка X лежит на прямой, параллельной KL.

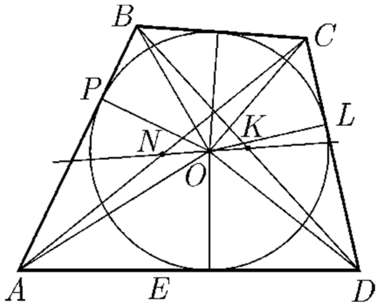


Рис. 7.4 *б*)

4. Пусть $ABCD$ – описанный четырехугольник, O – центр вписанной окружности, r – ее радиус, N и K – середины диагоналей AC и BD (рис. 7.4. б).

Если $ABCD$ – ромб, то эти точки совпадают. В противном случае можно считать, что стороны AB и CD не параллельны.

5. Заметим, что

$$S_{ANB} + S_{DNC} = \frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{2}S_{ADC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Аналогично, $S_{AKB} + S_{DKC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

6. Пусть точки P и L – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и CD. Тогда

$$S_{AOB} + S_{COD} = \frac{1}{2}AB \cdot OP + \frac{1}{2}CD \cdot OL = \frac{1}{2}r \cdot (AD + BC).$$

Поэтому $S_{AOB} + S_{COD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

7. Согласно лемме точки N, O и K лежат на одной прямой.

Утверждение доказано.

Пересечение в одной точке

Пример 7.5. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие противоположные вершины, ***пересекаются в одной точке***.

Пример 7.6. Докажите, что биссектрисы углов при боковых сторонах трапеции ***пересекаются (в одной точке)*** на ее средней линии.

Решение

1. Пусть O – точка пересечения биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне AB трапеции $ABCD$ (рис. 7.5).

Поскольку биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны, то $\angle AOB = 90^0$.

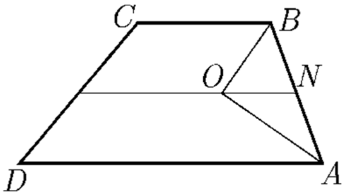


Рис. 7.5

2. Если M – середина AB, то OM – медиана прямоугольного $\triangle AOB$, проведенная к гипотенузе.

3. Поэтому $OM = MB = MA$, $\angle MOB = \angle OBM = \angle OBC$.

4. Следовательно, $OM \parallel BC$. Значит, точка O – принадлежит средней линии трапеции.

Утверждение доказано.

Пример 7.7. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных им сторон с вписанной окружностью, ***пересекаются в одной точке***, называемой точкой Жергона.

Доказательство

1. Пусть задан $\triangle ABC$ и $\gamma(O,r)$ – вписанная окружность (рис. 7.6). Пусть A_1, B_1, C_1 – точки касания окружности. Докажем, что $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$.

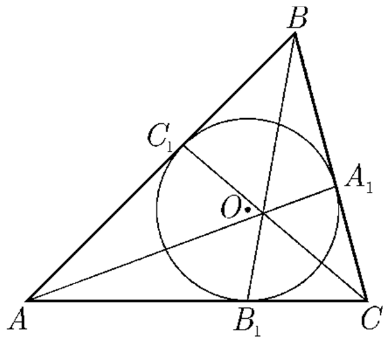


Рис. 7.6

2. По теореме 4.2.5 отрезки касательных равны: $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$.

3. Составим отношение:

$$\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1} = 1.$$

3. По теореме 2.5.5 Чевы $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$.

Утверждение доказано.

Пример 7.8. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три общие хорды каждой пары этих окружностей ***пересекаются в одной точке***.

Доказательство

1. Пусть окружности γ_1 и γ_2 пересекаются в точках A и B, окружности γ_1 и γ_3 пересекаются в точках C и D, окружности γ_2 и γ_3 – в точках E и F.

Рассмотрим случай, когда попарно пересекаются отрезки *AB, CD, EF* (рис. 7.7).

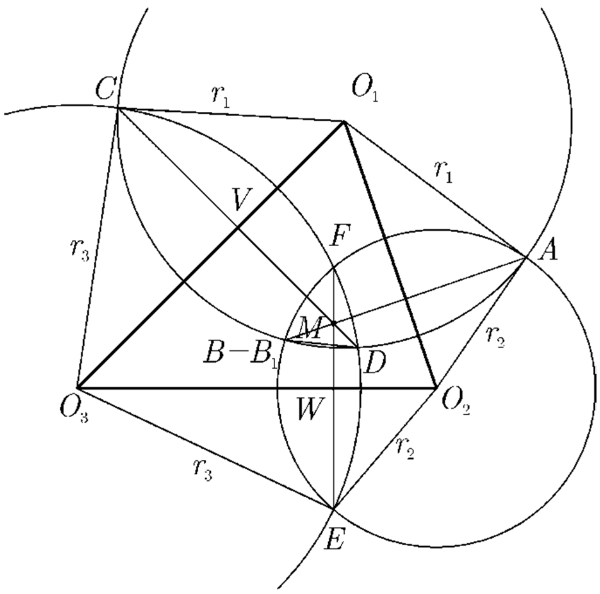


Рис. 7.7

2. Если M – точка пересечения отрезков CD и EF, то по теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд $CM \cdot MD = EM \cdot MF$.

3. Через точки A и M проведем прямую, вторично пересекающую окружность γ_2 в точке B_1. Тогда хорды AB_1 и EF окружности γ_2 пересекаются в точке M. Поэтому, $AM \cdot MB_1 = EM \cdot MF = CM \cdot MD$.

4. Рассмотрим $\triangle CB_1M \sim \triangle MDA$, следовательно, $\angle CB_1A = \angle CDA$.

Значит точки A, B_1, C и D лежат на одной окружности (теорема 6.3.1), а так как через точки A, C и D проходит единственная окружность γ_1, то точка B_1 лежит на окружности γ_1. Таким образом, точка B_1 является общей точкой окружностей γ_1 и γ_2, отличной от точки A. Значит, точка B_1 совпадает с точкой B. Следовательно, хорда AB проходит через точку пересечения хорд CD и EF.

Аналогично для случая, когда пересекаются продолжения отрезков AB, CD и EF.

Утверждение доказано.

Пример 7.9. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AB = BC$, $\angle ABE + \angle DBC = \angle EBD$ и $\angle AEB + \angle BDC = 180^0$. Докажите, что точка H пересечения высот $\triangle BDE$ лежит на диагонали AC.

Доказательство

1. Пристроим к стороне AB $\triangle ABF$, равный треугольнику $\triangle BCD$ (рис. 7.8).

Тогда в четырёхугольнике $AEBF$ $\angle AEB + \angle AFB = 180^0$, т.е. четырёхугольник $AEBF$ вписанный.

2. Рассмотрим $\triangle EFB$ и $\triangle EDB$: $FB = BD, BE$ – общая, и $\angle FBE = \angle EBD$. Значит, по второму признаку $\triangle EFB = \triangle EDB$. Следовательно, $\angle EFB = \angle EDB$.

3. Рассмотрим вписанный четырёхугольник $AEBF$:
$\angle BHE = \angle B_1HE_1$ как вертикальные.

Тогда $\angle BHE + \angle BFE = \angle B_1DE_1 + \angle B_1HE_1 = 180^0$.

4. Следовательно, четырехугольник $BHEF$ вписанный и точка H лежит на построенной окружности. Тогда $\angle AEB = \angle AHB$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

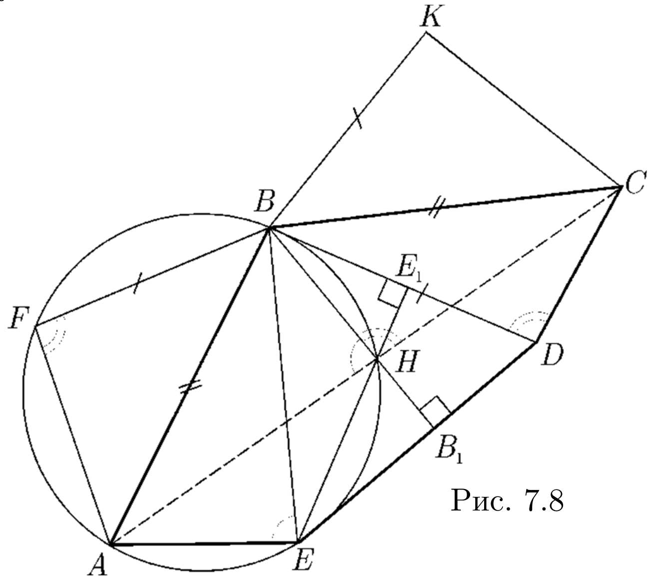


Рис. 7.8

5. Пристроив к стороне BC $\triangle BCK$, равный треугольнику $\triangle ABF$, и повторив вышеприведённые рассуждения, получим, что $\angle CHB = \angle CDB$.

6. Но $\angle AEB + \angle BDC = 180^0$. Значит, $\angle AHB + \angle BHC = 180^0$ и $\angle AHB$ и $\angle BHC$ смежные, т.е. точка пересечения высот H $\triangle BDE$ лежит на диагонали AC пятиугольника $ABCDE$.

Утверждение доказано.

Принадлежность точек окружности

Пример 7.10. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон и середин сторон, ***лежат на*** описанной около треугольника ***окружности***.

Доказательство

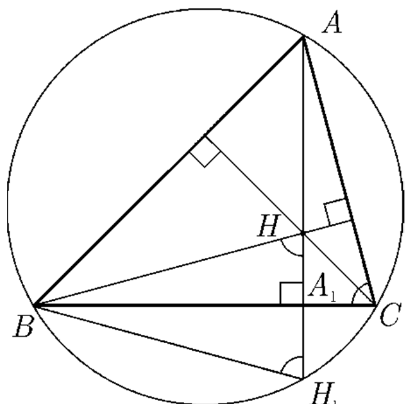


Рис. 7.9

1. Пусть H_1 – точка пересечения продолжения высоты AA_1 $\triangle ABC$ с описанной окружностью.

2. Если $\triangle ABC$ – прямоугольный, то утверждение очевидно.

3. Пусть $\triangle ABC$ – остроугольный треугольник, H – точка пересечения его высот, H_1 – точка пересечения продолжения отрезка

AH за точку H с описанной окружностью $\triangle ABC$.

Тогда $\angle BH_1H = \angle BH_1A = \angle ACB = \angle BHH_1$.

4. Поэтому, $\triangle BH_1H$ – равнобедренный. Следовательно, перпендикуляр BC к его стороне HH_1 проходит через середину отрезка HH_1, то есть точка H_1 симметрична точке H относительно прямой BC.

Утверждение доказано.

Пример 7.10. Четыре окружности расположены на плоскости так, что каждая касается ровно двух других внешним образом. Докажите, что четыре точки попарного касания этих окружностей лежат на одной окружности.

Доказательство

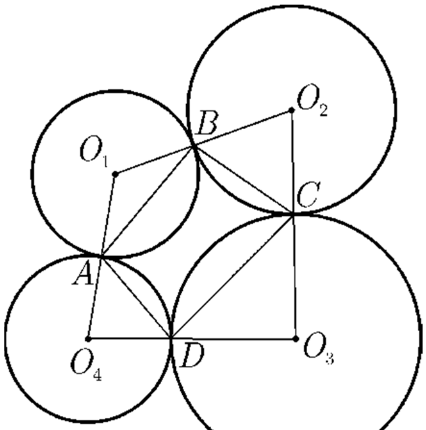


Рис. 7.10

1. Пусть A, B, C и D – точки касания окружностей γ_1 и γ_2, γ_2 и γ_3, γ_3 и γ_4, γ_4 и γ_1. Точки O_1, O_2, O_3, O_4 – соответственно центры этих окружностей (рис. 7.10).

2. Поскольку окружности касаются внешним образом, никакие три из точек O_1, O_2, O_3, O_4 не лежат на одной прямой.

3. Обозначим углы четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, которые связаны соотношением $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$.

4. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$:

$$\angle DAB = 180^0 - \angle O_4AD - \angle O_1AB = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\delta}{2}\right) - \left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\delta + \alpha}{2}.$$

$$\angle DCB = 180^0 - \angle O_3CD - \angle O_2CB = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

$$\angle DAB + \angle DCB = \frac{\alpha + \delta + \beta + \gamma}{2} = 180^0.$$

5. Следовательно, по теореме 4.4.9 четырехугольник $ABCD$ – вписанный.

Задания для практических занятий

Познакомьтесь с теоретическим материалом и примерами задач с решениями. Рекомендуемая литература: [6, 12, 16, 11, 17, 18, 27, 34, 36, 38, 39, 40, 43, 49, 53, 58, 63, 64, 65, 66, 66, 67].

Давайте порассуждаем

1. Докажите, что если $AB = AC + CB$, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

2. Пусть задано четыре точки A, B, C и D. Докажите, что если $\angle ABC + \angle CBD = 180^0$, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

3. Даны $\triangle ABC$ и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC, а середина отрезка CN – с серединой стороны AB. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

4. Может ли вершина разностороннего треугольника лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне?

5. Докажите, что диагонали любого выпуклого четырехугольника пересекаются.

6. Выясните, для каких четырехугольников биссектрисы всех углов пересекаются в одной точке.

7. Может ли средняя лини трапеции пройти через точку пересечения диагоналей?

8. Докажите, что касательные, проведенные через концы хорды, не являющейся диаметром окружности, пересекаются.

9. Докажите, что если прямые, содержащие основания трапеции, касаются окружности, то прямая, проходящая через середины боковых сторон трапеции, проходит через центр этой окружности.

10. Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.

11. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE. Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

Задание 1. *Доказать Теорему Гаусса.* Если продолжения сторон AB, AC и BC $\triangle ABC$ пересекают прямую l в точках C_1, B_1, A_1, то середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

Задание 2. *Доказать Теорему Симпсона.* Для того, чтобы четыре точки принадлежали одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы ортогональные проекции одной из них на три прямые, определяемые тремя остальными точками, были коллинеарными.

Задание 3. *Доказать теорему про окружность девяти точек.* В любом треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр H с вершинами, лежат на одной окружности с центром в середине E отрезка OH и радиусом $\dfrac{1}{2R}$ (O – центр описанной около треугольника окружности).

Задание 4. *Доказать Теорему Дезарга.* $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ с попарно непараллельными сторонами расположены так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что точки M, K и P пересечения прямых AB и AB_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой.

Задание 5. *Доказать Теорему Монжа.* Прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

Задание 6. Доказать, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC $\triangle ABC$ как на диаметрах, лежит на прямой BC.

Задание 7. Основание каждой высоты треугольника проектируется на боковые стороны треугольника. Доказать, что шесть полученных точек лежат на одной окружности.

Задание 8. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой l выбрана точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N для которой расстояния от A и B равны. Докажите, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

Указание: воспользоваться теоремой 6.3.1.

Задание 9. Докажите, что проекции вершины треугольника на четыре биссектрисы внешних и внутренних углов при двух других вершинах лежат на одной прямой.

Задание 10. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из точки B на AK пересекает AC в точке L. Докажите, что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

Задание 11*. Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на одной прямой, параллельной средней линии трапеции.

Задание 12*. В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили четыре точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести и ортоцентр. Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соотвествует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.

Задание 13*. Точки A, B движутся с равными скоростями по двум равным окружностям. Докажите, что серединные перпендикуляры к AB проходят через фиксированную точку.

Задание 14*. Даны четыре точки A, B, C и D. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – ортоцентры $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$, $\triangle ABC$. Точки A_2, B_2, C_2, D_2 – ортоцентры $\triangle B_1C_1D_1$, $\triangle C_1D_1A_1$, $\triangle D_1A_1B_1$, $\triangle A_1B_1C_1$. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке.

Задание 15*. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω и точка B $(B \neq A)$.Рассматриваются всевозможные треугольники BXY, такие что точкиX и Y лежат на ω и хордаXY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

Задание 16*. Пусть A_1 – точка касания вневписанной окружности $\triangle ABC$ со стороной BC. Прямая a проходит через точку A_1 и параллельна биссектрисе внутреннего угла A. Аналогично строятся прямые b и c. Докажите, что a, b и c пересекаются в одной точке.

РАЗДЕЛ 8. ЗАДАЧИ НА НАИМЕНЬШЕЕ И НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

Планиметрические задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины, получили называние «задачи на наименьшее и наибольшее значение».

Пример 8.1. Какая из высот треугольника наименьшая? [45].

Решение

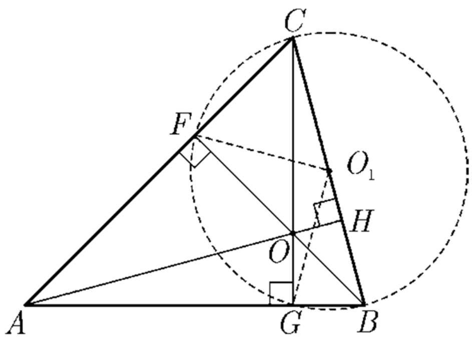


Рис. 8.1

1. Пусть O – точка пересечения высот BF и CG $\triangle ABC$. Если $AC < AB$, то $\angle C > \angle B$.

2. Построим окружность с диаметром BC. По теореме 6.3.1 окружность пройдет через точки F и G (рис. 8.1).

3. Учитывая, что из двух хорд меньше та, на которую опирается меньший вписанный угол, получаем, что $CG < BF$, то есть меньше та высота, которая опущена на большую сторону.

Ответ: меньше та высота, которая опущена на большую сторону.

Пример 8.2. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти треугольник с наибольшим периметром.

Решение

Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle ABC$ с основанием, равным a и углом $\angle ABC$. Определим вид треугольника с наибольшим периметром.

1. На данном основании $AC = a$ построим сегмент, вмещающий данный угол.

Соединим какую-либо точку B окружности с точками A и C.

Получим $\triangle ABC$ с данным основанием и данным углом при вершине.

Проведем теперь диаметр $DF \perp AC$ и построим окружность радиуса DA с центром в точке D (рис. 8.2).

2. Предполагая, что точка B отлична от D, продолжим AB до ее пересечения с построенной окружностью в точке E и соединим ее с C, а точку D с A, C и E. Покажем, что $BE = BC$.

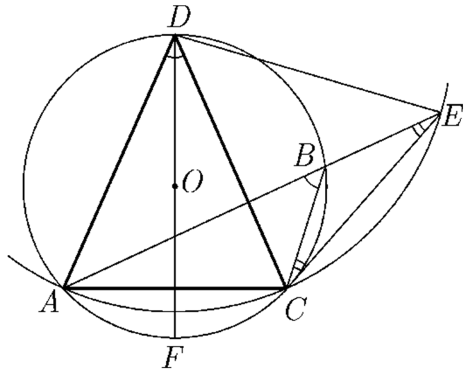


Рис. 8.2

3. $\angle ADC = \angle ABC$ как вписанные в окружность, опирающиеся на одну и ту же дугу;

$\angle ADC = 2\angle AEC$,

т.к. центральный угол в два раза больше вписанного, опирающегося на одну дугу.

4. Выразим $\angle BCE$:

$\angle BCE = \angle ABC - \angle AEC = \angle ADC - \angle AEC = 2\angle AEC - \angle AEC =$
$= \angle AEC$, а следовательно, $\triangle CBE$ – равнобедренный и $BC = BE$.

5. Отсюда, $AB + BC = AB + BE = AE$, и так как B не совпадает с центром D, то AE есть хорда, и для нее при любом выборе точки B справедливо: $AE < AD + DE = d$.

6. Заметив, что $DC = DE = r$, получаем: $AD + DC > AB + BC$, т.е. искомый треугольник равнобедренный.

Ответ: треугольник, удовлетворяющий условиям задачи, равнобедренный.

Пример 8.3. Середины высот треугольника ABC лежат на одной прямой. Наибольшая сторона треугольника $AB = 10$. Какое максимальное значение может принимать $S_{\triangle ABC}$?

Решение

1. Воспользуемся следующим утверждением: если прямая пересекает сторону треугольника и не проходит через вершину, то она пересекает ещё ровно одну его сторону (задача 2.6).

2. Пусть A_1, B_1 и C_1 – середины сторон соответственно BC, AC и AB $\triangle ABC$. Тогда середины высот этого треугольника лежат на прямых B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1, причем хотя бы одна из этих середин лежит на стороне $\triangle A_1B_1C_1$, а не на ее продолжении.

3. Пусть середины высот $\triangle ABC$ лежат на прямой l, причем эта прямая пересекает сторону B_1C_1 $\triangle A_1B_1C_1$ и не проходит ни через одну его вершину.

4. Если данный $\triangle ABC$ не прямоугольный, т. е. ни одна из сторон не является его высотой, и середины его высот лежат на одной прямой l, то эта прямая, в соответствии с приведённым выше утверждением, должна пересечь ровно одну из двух оставшихся сторон $\triangle A_1B_1C_1$, что противоречит условию задачи (в случае остроугольного треугольника прямая l имеет по одной общей точке с этими сторонами, а в случае тупоугольного — ни одной).

5. Следовательно, $\triangle ABC$ – прямоугольный, а так как прямой угол в треугольнике лежит против наибольшей стороны, то $\angle ACB = 90^0$.

6. Площадь прямоугольного треугольника с постоянной гипотенузой AB максимальна, если максимальна высота CH этого треугольника, проведённая из вершины прямого угла. Поскольку вершина C лежит на окружности с диаметром AB, то высота CH максимальна, если C – середина дуги AB этой окружности.

7. В этом случае $\triangle ABC$ –равнобедренный и $CH = \dfrac{1}{2}AB = 5.$

Тогда, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25.$

Ответ: максимальное значение, которое может принимать площадь треугольника ABC, равно 25.

Пример 8.4. Площадь прямоугольника равна S. Рассматривая периметр этого прямоугольника как функцию длины какой-либо его стороны, определить наименьшее значение функции, а также то значение аргумента, при котором функция достигает своего наименьшего значения.

Решение

1. Обозначим одну сторону прямоугольника через x, а другую через y. Тогда для периметра прямоугольника получим $p = 2x + 2y$.

2. Но по условию $xy = S$. Поэтому $p = 2x + \dfrac{2S}{x}$.

Сделаем ряд преобразований:

$$p = 2x + \frac{2S}{x} = 2 \cdot \frac{x^2 + Sx}{x} = 2 \cdot \frac{x^2 - 2\sqrt{Sx} + 2\sqrt{Sx} + S}{x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\left(x - \sqrt{S}\right)^2}{x} + 4\sqrt{S}.$$

3. Отсюда видим, что наименьшее значение p получится при $x = \sqrt{S}$ и оно равно $4\sqrt{S}$. При этом вторая сторона $y = \frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}$, т.е. прямоугольник будет квадратом.

Ответ: наименьшее значение равно $4\sqrt{S}$.

Пример 8.5. Найдите внутри треугольника точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника была бы наименьшей.

Решение

1. Пусть AD, BE и CF – медианы $\triangle ABC$, I – точка пересечения его медиан, P – основание перпендикуляра, опущенного из произвольной точки M на медиану AD (рис.8.3).

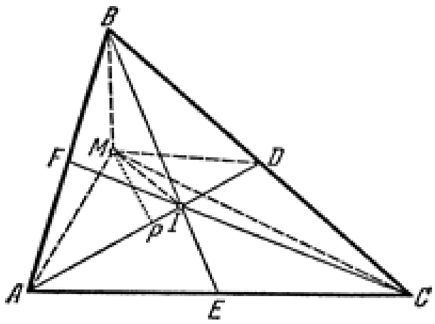


Рис. 8.3

2. Соединим точку M с точками A, B, C, D и I. Пусть для определенности $\angle MIA \le 90^0$, $\angle MID \ge 90^0$.

3. Из $\triangle MIA$ и $\triangle MID$ получаем: $MA^2 = MI^2 + AI^2 - 2AI \cdot IP$, $MD^2 = MI^2 + ID^2 - 2ID \cdot IP$.

4. Умножая второе из равенств на 2 и складывая с первым, получаем: $MA^2 + MD^2 = 3MI^2 + AI^2 + 2ID^2$.

Но MD – есть медиана $\triangle BMC$, а ID – медиана $\triangle BIC$. Отсюда по теореме 2.6.5. о длине медиане, имеем:

$$MD^2 = \frac{1}{2}\left(MB^2 + MC^2\right) - \frac{1}{4}BC^2, \ ID^2 = \frac{1}{2}\left(IB^2 + IC^2\right) - \frac{1}{4}BC^2,$$

и, следовательно,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 - \frac{1}{2}BC^2,$$

т.е. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2$.

Из последней формулы сразу следует, что искомой точкой является точка I пересечения медиан $\triangle ABC$.

Задания для практических занятий

Познакомьтесь с теоретическим материалом и примерами задач с решениями. Рекомендуемая литература: [6, 12, 16, 11, 17, 18, 27, 34, 36, 38, 39, 40, 43, 49, 53, 58, 63, 64, 65, 66, 66, 67].

Задание 1. Какие значения может принимать: а) наибольший угол треугольника; б) наименьший угол треугольника; в) средний по величине угол треугольника?

Задание 2. В треугольнике ABC медиана, проведённая из вершины A, в четыре раза меньше стороны AB и образует с ней угол 60°. Найдите наибольший угол данного треугольника.

Задание 3. В треугольнике из вершины A выходят медиана, биссектриса и высота. Какой угол больше: между медианой и биссектрисой или между биссектрисой и высотой, если $\angle A = \alpha$?

Задание 4. Докажите, что среди всех четырёхугольников с данной площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Задание 5. Окружность разделена в отношении $5 : 9 : 10$ и через точки деления проведены касательные. Найдите наибольший угол в полученном треугольнике.

Задание 6. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Задание 7. Точка Торричелли и задача Ферма.

Задание 8. Рассматриваются все трапеции, вписанные в окружность радиуса R и имеющие диаметр своим основанием. Найти острый угол трапеции, имеющей наибольшую площадь.

Задание 9. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 2 км. Деревни соединены дорогами таким образом, что из каждой можно пройти в любую другую. Может ли общая длина дорог быть меньше чем 5,5 км?

Задание 10. На квадратном участке со стороной 100 растут (цилиндрические) деревья радиуса 1. Докажите, что если на этом участке нельзя проложить (сколь угодно тонкую!) прямолинейную тропинку длины 10, не задевающую ни одного дерева, то число деревьев на участке не менее 400.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

В каждом варианте представлено двадцать задач разного уровня сложности, затрагивающих все темы, представленные в пособии.

Рекомендации к выполнению индивидуальных заданий:

1) В решении каждой задачи должны быть выделены четыре этапа:

– на этапе анализа аккуратно напишите «Дано» и сделайте чертеж, верно отражающий величины, заданные в условии задачи;

– на этапе поиска решения, сформулируйте основную идею решения (или несколько) и обоснуйте выбор метода решения;

– правильно оформите решение задачи, опираясь на теоретические положения;

– сделайте проверку правильности решения задачи там, где это возможно.

2) Используйте разные методы решения задач.

3) Избегайте недочеты в чертежах (если в задаче речь идет о треугольнике общего вида, то необходимо чертить разносторонний треугольник). Размеры на чертежах должны совпадать с данными условия задачи. Каждый важный этап в решении задачи должен содержать свой чертеж.

4) В каждой задаче должен присутствовать ответ.

5) Напишите методическое заключение по каждой задаче (какого типа задача, в какой теме рекомендуете изучать, на каком этапе изучения геометрии и т.д.).

Вариант № 1

1. В $\triangle ABC$ со сторонами $AB=13, BC=15, AC=14$ вычислить площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B.

2. Точка M лежит внутри прямого угла. Расстояния от точки M до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от угла треугольник площадью 100 см^2. Найти катеты этого треугольника.

3. В остроугольном $\triangle ABC$ проведена медиана BD. Найти площадь треугольника, если $AB=c$, $BD=m$, $\angle BDA=\beta$.

4. В $\triangle ABC$ высота CD равна 7, высота AE равна 6. Точка E делит BC в отношении $BE:EC=3:4$. Найти AB.

5. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, делящая основание в отношении 2:1. Под какими углами она наклонена к боковым сторонам?

6. Вычислить площадь общей части двух ромбов, длины диагоналей первого 4 и 6 см, а второй получен из первого поворотом на 90° вокруг центра ромба.

7. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей. Найти отрезок этой прямой, заключённого между боковыми сторонами, если основания равны 4 и 12.

8. В трапеции $ABCD$ углы A и B прямые, $AB=5, BC=1, AD=4$. На AB взята точка M так, что $\angle AMD$ в два раза больше $\angle BMC$. Найти отношение $AM:BM$.

9. В $\triangle ABC$ угол B равен 60°. Радиус вписанной окружности равен $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Найти высоту AH, если $AB+BC=11$, $AB>BC$.

10. Через вершину A остроугольного $\triangle ABC$ и центр описанной окружности проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D. Найти длину AD, если $AB=BC=b$, $\angle ABC=\alpha$.

11. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Сторона AD является ее диаметром. Найти BC, если $AD=6$, $BD=3\sqrt{3}$, $\angle CAD$ в три раза больше угла $\angle BAC$.

12. В окружность вписана трапеция, большее основание которой равно диаметру окружности, угол при основании равен α. Найти

отношение, в котором точка пересечения диагоналей делит высоту трапеции.

13. Через точку P диаметра окружности проведена хорда AB, образующая с диаметром угол 60°. Найти радиус окружности, если $AP = a$, $BP = b$.

14. К окружности радиуса 6 проведены касательные из точки, удаленной от центра на 10. Найти площадь кругового сектора, соответствующего меньшей дуге между точками касания.

15. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти угол между хордами, соединяющими точку касания окружностей с точками касания их общей внешней касательной.

16. Две окружности с центрами O_1 и O_2, радиусы которых равны 10 и 17 соответственно, пересекаются в точка P и Q. Через точку Q проведена касательная к большей окружности, пересекающая вторично меньшую окружность в точке L. Докажите, что треугольник LPQ подобен треугольнику O_1PO_2. Найдите площадь треугольника LPQ, если $O_1O_2=21$.

17. Дана окружность с диаметром KL. Вторая окружность с центром в точке K пересекает первую окружность в точках M и N, а диаметр KL – в точке A. На дуге AN, не содержащей точки M, взята точка B, отличная от точек A и N. Луч LB пересекает первую окружность в точке C. Известно, что $CN = a$, $CM = b$. Найдите BC.

18. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

19. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причем точка P лежит между точками B и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM. а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$. б) Известно, что $CM=17$ и $CD=25$. Найдите сторону AD.

20. На сторонах PQ, QM и PM $\triangle PQM$ взяты соответственно точки K, L и N, при этом $PK : KQ = 21 : 10$, $QL : LM = 2 : 3$, $PN : NM = 2 : 5$. Отрезки MK и NQ пересекаются в точке **A**. а) Докажите, что $PALN$ – параллелограмм. б) Найдите AM, если $QM=15$, $PM=28$ и прямая PA перпендикулярна прямой QM.

Вариант 2

1. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними 12.

2. Найти площадь остроугольного $\triangle ABC$, если медиана $BM = 4$, медиана $CN = 5$, высота $AH = 6$.

3. Равнобедренный треугольник со сторонами 8, 5, 5 разделен на три равновеликие части перпендикулярами, проведенными из некоторой точки к его сторонам. Найти расстояние от этой точки до каждой стороны данного треугольника.

4. В $\triangle ABC$ проведена прямая DE параллельная AC. Площадь $\triangle ABC$ равна 8, площадь $\triangle DEC$ равна 2. Найти отношение $DE : AC$.

5. Высоты треугольника равны 12, 15, 20. Доказать, что треугольник прямоугольный.

6. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

7. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина CB, N – середина CD. Доказать, что AM и AN делят BD на три равные части.

8. В трапеции $ABCD$ точки M и N – середины оснований. $AB = a, CD = b$. F – точка пересечения AN и DM, K — точка пересечения BN и CM. Найти площадь $MFNK$, если площадь трапеции равна S.

9. Дан равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b. Найти отношение, в котором центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании.

10. В $\triangle ABC : AC = \ 3, \angle A = 30^0$. Радиус описанной окружности равен 2. Доказать, что площадь треугольника ABC меньше 3,75.

11. В окружность радиуса 10 вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Найти стороны четырехугольника, если его диагонали равны 12 и $10\sqrt{3}$.

12. Около окружности радиуса 6 описана трапеция $ABCD$, меньшее основание BC которой равно 5. Найти площадь трапеции, если $BM = 3$, где M — точка касания окружности с боковой стороной AB.

13. Найти среднюю линию равнобедренной трапеции, высота которой равна h, если боковая сторона трапеции видна из центра описанной окружности под углом 120°.

14. Точка B лежит вне окружности, точки A и C — диаметрально противоположные. Прямые AB и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно. Найти радиус окружности, если $AB = 2$, $PC = \sqrt{2}$, $AQ = \sqrt{3}$.

15. Окружности радиусов 5 и 2 касаются некоторой прямой в точках A и B и лежат по разные стороны от касательной. Отношение расстояния между точками A и B к расстоянию между центрами окружностей равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найти AB.

16. В угол вписаны три окружности — малая, средняя и большая. Большая окружность проходит через центр средней, средняя — через центр малой. Найти радиусы средней и большой окружностей, если радиус малой равен r, а расстояние от ее центра до вершины угла равно a.

17. В окружность вписан четырехугольник с углами 120^0, 90^0, 60^0, 90^0 и площадью $9\sqrt{3}$ см^2. Найдите радиус окружности, если диагонали четырехугольника перпендикулярны.

18. Две окружности касаются внешним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров. Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей. Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

19. В $\triangle ABC$ известны стороны $AB = 7$, $BC = 10$, $AC = 12$. Биссектрисы AD и BE пересекаются в точке N. Докажите, что $BD : AE = 85 : 114$. Найдите отношение $S_{\triangle ABN} : S_{\triangle ABC}$.

20. В $\triangle ABC$ угол при вершине B острый. Отрезок BM – медиана этого треугольника. Докажите, что $BM > \frac{1}{2}AC$. Найдите $\sin\angle ABC$, если $AB = 15$, $BC = 7$, $BM = 10$.

Вариант 3

1. В прямоугольном $\triangle ABC$ биссектриса прямого угла пересекает гипотенузу AC в точке M. Найти площадь $\triangle ABC$, если $AM = 5$, а расстояние от точки M до BC равно 4.

2. В $\triangle ABC : \angle B = 15^0$, $m_b^2 - m_c^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Найти $\angle A, \angle C$.

3. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удаленная от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 40 и 30 см. Найти катеты.

4. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12, боковая сторона – 18. К боковым сторонам проведены высоты. Найти длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот.

5. На медиане BD $\triangle ABC$, площадь которого равна S, построена точка E так, что $DE = BE$. Через точку E проведена прямая AE, пересекающая BC в точке F. Найти площадь $\triangle AFC$.

6. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 3$. Найти его площадь, если известно, что AC перпендикулярна к BE, где E – середина стороны AD.

7. Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны в точках M и N. Найти MN, если основания трапеции равны a и b.

8. В прямоугольный $\triangle ABC$, $P_{\triangle ABC} = 30$, вписана окружность. Один из катетов делится точкой касания в отношении 2:3, считая от вершины прямого угла. Найти стороны треугольника.

9. В $\triangle ABC$ биссектриса AE относится к радиусу вписанной окружности как $\sqrt{2} : \left(\sqrt{2} - 1\right)$. Найти $\angle B, \angle C$, если $\angle A = 60^0$.

10. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Сторона BC является ее диаметром. Найти сторону AB, если $BC = 8$, $BD = 4\sqrt{2}$, $\angle ACD$ в два раза больше $\angle ACB$.

11. Около окружности радиуса R описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами параллельна основаниям и равна b. Найти площадь трапеции.

12. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Радиус OA перпендикулярен радиусу OB, радиус OC перпендикулярен радиусу OD. Длина перпендикуляра, опущенного из точки C на AD, равна 9. Найти площадь $\triangle AOB$.

13. Радиус кругового сектора равен R, радиус вписанной в него окружности равен r. Найти площадь сектора.

14. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что длина касательной к ней, проведенной из третьей вершины, в три раза больше стороны квадрата. Найти радиус окружности, если сторона квадрата равна a.

15. Окружности радиусов 12 и 7 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежат по одну сторону от касательной. Отношение расстояния между центрами окружностей к расстоянию между точками M_1 и M_2 равно $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Найти M_1M_2.

16. Три окружности проходят через точку P, а вторые точки их пересечения A, B, C лежат на одной прямой. A_1, B_1, C_1 – вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с соответствующими окружностями. C_2 – точка пересечения прямых AB_1 и BA_1, точки A_2, B_2 – определяются аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

17. Два выпуклых четырехугольника таковы, что стороны каждого лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого. Найдите их углы.

18. В параллелограмм вписана окружность. а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб. б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит ее на отрезки равные 3 и 2. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

19. Окружность с центром O касается в точке A внутренним образом окружности с центром P. Диаметр BD меньшей окружности параллелен диаметру EC большей окружности, причем точки B и E лежат по одну сторону от линии центров окружностей. а) Докажите, что точки O, D и B лежат соответственно на прямых AP, AC и BE. б) Найдите AD, если AE больше чем AD в 2 раза, а радиусы окружностей равны соответственно 3 и 8.

20. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A провели перпендикуляр AH к стороне CD, а затем через точку C провели прямую, параллельную прямой AH и пересекающую сторону AB в точке E. а) Докажите, что прямые BH и DE параллельны. б) Известно, что $BC = 9$, $AD = 17$, $AB : CD = 3 : 5$. Найдите $S_{\triangle BPH}$, где P – точка пересечения прямых AB и CD.

Вариант 4

1. В прямоугольном $\triangle ABC$ биссектриса прямого угла пересекает гипотенузу AC в точке M. Найти расстояние от M до BC, если $AB = 5$, $BC = 8$.

2. Площадь $\triangle ABC$ равна 8. Найти tgA, если $h_a = 3$, $l_a = 4$.

3. В прямоугольном $\triangle ABC$ расположен прямоугольник $EKMP$ так, что EK лежит на гипотенузе BC, вершины M и P – на катетах AC и AB, $AC = 3$, $AB = 4$. Найти длины сторон прямоугольника, если его площадь равна $\frac{5}{3}$, а периметр меньше 9.

4. Определить углы равнобедренного треугольника, если его площадь относится к площади квадрата, построенного на его основании, как $\sqrt{3} : 12$.

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Проекция вершины прямого угла на гипотенузу делит ее на два отрезка, меньший из которых относится к большему, как больший к гипотенузе. Найти площадь треугольника.

6. Основания трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

7. В полукруге радиуса 5 расположен прямоугольник $ABCD$ так, что AB лежит на диаметре, C и D — на дуге. Найти стороны прямоугольника, если его площадь равна 24, а диагональ больше 8.

8. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB. Биссектриса $\angle C$ делит площадь $\triangle AMD$ пополам. Найти AD, если $CD = 4$.

9. Окружность, вписанная в $\triangle ABC$, касается стороны AB в точке M. Найти CM, если $BM = 10$, $AM = 4$, $\angle ACB = 60°$.

10. В $\triangle ABC \left(\angle A = 90^0\right) : AB = a$, радиус вписанной окружности равен r. Окружность касается AC в точке D. Найти длину хорды, соединяющей точки пересечения окружности с BD.

11. В $\triangle ABC : AB = 4, \angle A = 30^0$. Радиус описанной окружности равен 3. Доказать, что высота CH меньше 3.

12. В трапецию, меньшее основание которой равно 10, вписана окружность. Одна из боковых сторон трапеции делится точкой касания на отрезки 6 и 8. Найти площадь трапеции.

13. Найти стороны параллелограмма, описанного около окружности радиуса R, если площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами параллелограмма, равна S.

14. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r построена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найти длину этих отрезков.

15. Из точки M, лежащей на окружности радиуса r, проведены диаметр MK и хорда MP. Угол PMK равен α. Найти радиус окружности, касающейся MK, MP и дуги PK.

16. В прямоугольной трапеции меньшая диагональ служит биссектрисой тупого угла и делит другую диагональ в отношении 13:8. Вычислить площадь трапеции, если ее высота равна 36.

17. Прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения высот $\triangle ABC$, делит его периметр и площадь в одном и том же отношении. Найдите это отношение.

18. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного $\triangle ABC$, перпендикулярная CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = 1 : 2$. а) Докажите, что $\angle BAC = 30^0$. б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK в точке Q. Найдите KQ, если $BC = 3\sqrt{2}$.

19. Через точки A и B равнобедренного прямоугольного $\triangle ABC$ $\left(\angle A = 90^0\right)$ провели окружность с центром O так, что эта окружность пересекает отрезок AC в точке D. Через точки A и C провели еще одну окружность так, что ее центр P лежит на прямой AO. E – точка пересечения этой окружности с прямой AB. а) Докажите, что прямая BD параллельна прямой CE. б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны соответственно 6 и 8.

20. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точках D и E соответственно. а) Докажите, что $\dfrac{BP}{AB} = \dfrac{CP}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. б) Пусть Q – точка пересечения отрезков DE и AP. Найдите площадь $\triangle ABC$, если $AQ = \sqrt{10}$, а радиус большей окружности равен 10.

Вариант 5

1. В треугольнике ABC с прямым углом C, проведена биссектриса CD, $AD = 2\sqrt{3}$. Найти BC, если $DM = \sqrt{3}$, где DM – высота $\triangle ADC$.

2. В $\triangle ABC$ высота BD равна 11, высота AE равна 12. Точка E делит BC в отношении $BE : EC = 5 : 9$. Найти AC.

3. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Найти отношение медианы, проведенной к боковой стороне, к основанию.

4. В $\triangle ABC$ на AB взята точка L так, что $AL = 1, BL = 3$. На BC взята точка K, делящая эту сторону в отношении $BK : KC = 3 : 2$. Точка Q, которая является пересечением прямых AK и CL, отстоит от BC на расстоянии 1,5. Найти $\sin\angle ABC$.

5. В прямоугольном треугольнике расстояние от середины гипотенузы до одного из катетов равно 5, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4. Найти площадь треугольника.

6. В прямоугольнике $LMNK$ диагонали LN и MK пересекаются в точке O. Треугольники MON и MO_1N симметричны относительно MN. Угол MON в два раза больше угла LO_1K. Найти стороны прямоугольника, если известно, что площадь LMO_1NK равна $5\sqrt{3}$.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины AB и CD, равна 1. Найти длину отрезка, соединяющего середины BC и AD.

8. Биссектрисы тупых углов трапеции пересекаются на другом её основании. Найти стороны трапеции, если её высота равна 12, а биссектрисы равны 15 и 13.

9. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания на отрезки 5 и 12. Найти площадь треугольника.

10. В $\triangle ABC$ биссектриса AP делится центром O вписанной окружности в отношении $AO : OP = \sqrt{3} : 2\sin\left(\dfrac{5\pi}{18}\right)$. Найти углы B и C, если угол A равен $\dfrac{5\pi}{9}$.

11. Найти площадь ABC, вписанного в окружность радиуса 2, если $\angle A = 60^0$, $\angle B = 45^0$.

12. В окружность радиуса 17 вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 и 9 от центра окружности. Найти стороны четырехугольника.

13. Большее основание равнобедренной трапеции составляет с боковой стороной угол α, а с диагональю — угол β. Найти отношение площади круга, описанного около данной трапеции, к площади трапеции.

14. Из одной точки A окружности проведены две хорды AB и AC. Расстояние от середины хорды AB до хорды AC равно 4. Найти радиус окружности, если $AB = 10$, $AC = 12$.

15. Две окружности радиусов R и r пересекаются под прямым углом. Найти длину отрезка общей касательной.

16. Окружности радиусов 4 и 3 касаются некоторой прямой в точках A и B и лежат по разные стороны от касательной. Отношение расстояния между точками A и B к расстоянию между центрами окружностей равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найти расстояние между центрами.

17. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и по-разному ориентированы. На отрезке AA_1 взята точка A' такая, что $\frac{AA'}{A_1A'} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Аналогично строим B' и C'. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой.

18. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB $\triangle ABC$, причем $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC. б) Найдите отношение площади четырехугольника AB_1OC_1 к площади $\triangle ABC$, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 3$.

19. В $\triangle ABC$ стороны AB и BC соответственно равны 3 и 5, а угол между ними 120^0. Серединные перпендикуляры к AB и BC пересекают AC соответственно в точках L и N. а) Докажите, что $BN : (BL + LN) = 5 : 8$. б) Найти отношения радиусов окружностей, вписанных соответственно в $\triangle BCN$ и $\triangle ABL$.

20. В прямоугольном $\triangle ABC$ отрезок CH – высота к гипотенузе AB, точки I и J – центры вписанных окружностей $\triangle ACH$ и $\triangle BCH$ соответственно. Прямые CI и CJ пересекают гипотенузу AB в точках K и L соответственно. а) Докажите, что прямая KJ параллельна AI, а прямая LI параллельна прямой BJ. б) Найдите длину отрезка IJ, если $AC = 15$, $BC = 8$.

Вариант 6

1. В $\triangle ABC$ основание высоты CD лежит на AB, медиана $AE = 5, CD = 6$. Найти площадь $\triangle ABC$, если площадь ADC в три раза больше площади BCD.

2. В $\triangle ABC$ на AC взята точка K так, что $AK = 1, KC = 3$, а на AB взята точка L так, что $AL : LB = 2 : 3$. Пусть Q – точка пересечения BK и CL. $S_{AQC} = 1$. Найти длину h_b.

3. Определить стороны прямоугольного треугольника, у которого периметр равен p, а площадь m^2.

4. В $\triangle ABC$ проведены высота AH и биссектриса BE. Найти $S_{\triangle CHE} = 1$, если $\angle A = \angle B = \alpha$, сторона AB равна a.

5. Из точки внутри правильного треугольника со стороной a опущены перпендикуляры на его стороны. Длины перпендикуляров равны m, n, k. Найти отношение площади данного треугольника к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

6. Длина диагонали BD трапеции $ABCD$ равна m, длина боковой стороны AD равна n. Найти длину основания CD, если известно, что длины основания, диагонали, боковой стороны, выходящих из вершины C, равны.

7. Высота равнобедренной трапеции равна h, острый угол между диагоналями $2a$. Найти среднюю линию.

8. В параллелограмме $ABCD$: $AB = 4, AD = 6$. Биссектриса $\angle BAD$ пересекает BC в точке M, $AM = 4\sqrt{3}$. Вычислить площадь $AMCD$.

9. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся этой окружности и боковых сторон треугольника.

10. В $\triangle ABC$ проведены медиана AM и биссектриса AD. Около $\triangle AMD$ описана окружность, которая отсекает от AB и AC отрезки BL и CN. Доказать, что $BL = CN$.

11. Около круга описана трапеция с углами α и β при основании. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

12. Четырехугольник $MNPQ$ вписан в окружность. Диагональ MP является биссектрисой угла NMQ и пересекает диагональ NQ в точке A. Найти длину NP, если $AM = 5$, $AP = 4$.

13. Сторона ромба $ABCD$ равна 5. В ромб вписана окружность радиуса 2,4. Найти расстояние между точками касания окружности со сторонами AB и BC, если $AC < BD$.

14. Точка M лежит внутри круга на расстоянии d от центра. Хорда AB проходит через эту точку. Найти радиус круга, если $AM = a$, $BM = b$.

15. Точка P лежит на продолжении диаметра окружности радиуса R на расстоянии $2R$ от центра. Из точки P проведена прямая пересекающая окружность в точках A и B так, что $AB = BP$. Найти длину отрезка AP.

16. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

17. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех $\triangle ABC$, касаются некоторой фиксированной окружности.

18. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного $\triangle ABC$ с основанием BC является боковой стороной равнобедренного $\triangle BLD$ с основанием BD. а) Докажите, что $\triangle DCL$ равнобедренный. б) Известно, что $\cos\angle ABC = \dfrac{3}{4}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

19. В $\triangle ABC$ стороны AB, BC и AC соответственно равны 4, 5 и 6. Высоты AH и BK пересекаются в точке O. а) Докажите, что четырехугольника $KOHC$ можно описать окржность. б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $KOHC$.

20. Точка P – центр вписанной окружности $\triangle ABC$. Прямые AP и BP пересекают описанную окружность $\triangle ABC$ в точках A_1 и B_1. а) Докажите, что прямая CP перпендикулярна прямой A_1B_1. б) Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 6$, $\angle ACB = 30^0$.

Вариант 7

1. Внутри равностороннего треугольника взята точка M, отстоящая от его сторон на расстоянии b, c, d. Найти высоту треугольника

2. Длины сторон остроугольного треугольника равны a, b, c. Точка M находится внутри треугольника. Углы $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA$. Найти сумму отрезков AM, BM, CM.

3. В $\triangle ABC$ на AB взята точка K так, что $AB : BK = 1 : 2$, а на BC взята точка L так, что $CL : BL = 2 : 1$. Прямые AL и CK пересекаются в точке Q. Найти $S_{\triangle ABC}$,если $S_{\triangle BQC} = 1$.

4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4, а медиана, проведенная к ней равна 3. Найти основание.

5. $ABCD$ – квадрат, O – точка внутри квадрата, $OC = OD = \sqrt{10}$, $OB = \sqrt{26}$. Найти площадь квадрата.

6. В выпуклом четырехугольнике $PQRS$ углы при вершинах Q и R прямые, а величина угла при вершине P равна 60°. Найти диагональ PR, если диагональ QS равна $2\sqrt{13}$, а сторона PQ равна 6.

7. В равнобочной трапеции диагональ делит угол при основании пополам. Нижнее основание в 2 раза больше верхнего. Найти стороны трапеции, если её площадь равна $27\sqrt{3}$.

8. Точка касания вписанной окружности делит один из катетов прямоугольного треугольника в отношении 2:3 считая от вершины прямого угла. Найти радиус вписанной окружности, если периметр треугольника равен 60.

9. Сторона AB $\triangle ABC$ равна 48, высота BH равна 8,5. Радиус вписанной окружности равен 4. Найти расстояние от центра вписанной окружности до вершины B.

10. В окружность с центром O вписан $\triangle ABC$ с тупым углом A. Точка P – середина большей из дуг, стягиваемых хордой BC. Радиус OA пересекает BC в точке Q. AF – высота $\triangle ABC$. Найти отношение площади AOP к площади AQF, если длина биссектрисы угла A треугольника ALF равна $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $AP = \sqrt{3}$, $\angle OAP = 30^0$.

11. Основания трапеции 4 и 16. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей.

12. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E. Найти BE, если известно, что диагональ BD является биссектрисой угла ABC, $BD = 25$, $CD = 16$.

13. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 3 и 9. Найти стороны трапеции.

14. Хорды AB и AC имеют одинаковую длину, $\angle BAC = 30^0$. Найти отношение площади части круга, заключенной внутри угла, к площади круга.

15. На продолжении общей хорды двух пересекающихся окружностей взята точка, и из этой точки проведены касательные к обеим окружностям. Доказать, что отрезки касательных между их общей точкой и точками касания равны.

16. Даны две пересекающиеся окружности радиуса 10. Расстояние между их центрами равно 16. Найти радиус окружности, которая касается внешним образом двух данных окружностей и их общей касательной.

17. Дана окружность радиуса R. Две другие окружности, сумма радиусов которых также равна R, касаются ее изнутри. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из общих точек этих окружностей.

18. На катетах AC и BC прямоугольного $\triangle ABC$ вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M – середина гипотезы AB, H – точка пересечения прямых CM и DK. а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикуляры. б) Найдите MH, если известно, что катеты $\triangle ABC$ равны 60 и 80.

19. В $\triangle ABC$ сторона BC равна 12, $\angle B = 45^0$, $\angle C = 30^0$. Окружность касается стороны BC в точке K, проходит через точку A и пересекает сторону AB в точке N, которая делит AB в отношении $4:5$, считая от точки B. б) Найдите радиус R окружности, указанной в условии задачи.

20. Биссектрисы внутренних углов при вершинах A и B $\triangle ABC$ пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1 и B_1 соответственно, а биссектрисы внешнего угла при вершине C пересекает эту окружность в точке L. а) Докажите, что прямая B_1L параллельна прямой AA_1. б) Найдите длину отрезка A_1L, если $AB = 4$, $\angle A = 50^0$, $\angle B = 60^0$.

Вариант 8

1. Длины сторон треугольника относятся как $m : n : k$. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника, вершины которого находятся в точках пересечения биссектрис со сторонами.

2. В тупоугольном $\triangle ABC$ площадью $24\sqrt{5}$ медианы AN и CM пересекаются под углом $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$. Найти стороны треугольника, если $AN - CM = 3$.

3. В $\triangle ABC : a = \sqrt{5}, b = 1, l_c = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Найти $\angle C$.

4. В прямоугольном $\triangle ABC$ $\angle A = \alpha$. Через середину D гипотенузы AB проведена прямая, пересекающая AC в точке E. В каком отношении эта прямая делит площадь $\triangle ABC$, если $\angle DEA = \beta$, $AE > \frac{1}{2}AC$.

5. В прямоугольном $\triangle ABC$ расположен прямоугольник $ADKM$ так, что его сторона AD лежит на катете AB, сторона AM на катете AC, вершина K – на гипотенузе BC. $AB = 5, AC = 12$. Найти стороны прямоугольника, если его $S_{ADKM} = \frac{40}{3}$, а длина диагонали меньше 8.

6. В параллелограмме $ABCD$ на AB взята точка M так, что $AB = 3AM$. N – точка пересечения AC и $ДM$. Найти отношение площади AMN к площади $ABCD$.

7. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с её основаниями, равны S_1 и S_2. Найти площадь трапеции.

8. В $\triangle ABC$ вписана окружность. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N. Найти периметр $\triangle AMN$, если $AB = 12, AC = 10, BC = 6$.

9. Прямые, соединяющие центр окружности, вписанной в треугольник, с его вершинами, делят площадь этого треугольника на части 4, 13 и 15 см^2. Найти стороны треугольника.

10. BD – высота $\triangle ABC$, точка E – середина стороны BC. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle BDE$, если $AB = 30, BC = 26, AC = 28$.

11. В круг вписана трапеция. Большее основание составляет с боковой стороной угол α, а с диагональю – угол β. Найти площадь трапеции, если боковая сторона равна a.

12. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса r. Найти боковые стороны и большее основание трапеции, если меньшее основание равно $\frac{4r}{3}$.

13. В окружность радиуса 13 с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке K. Найти площадь четырехугольника, если $AC = 18,\ OK = 4\sqrt{6}$.

14. Точка B лежит вне окружности, точки A и C принадлежат окружности. Прямые AB и BC пересекают окружность в точках D и E. Найти $\angle ACB$, если $CE = 1$, $BE = ED = 4$, $AB : BD = 4 : 1$.

15. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других сторон на отрезки 2 и 23. Найти R.

16. Две окружности радиуса R касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается внешним образом третьей окружности радиуса 8 в точках A и B. Найти R, если $AB = 12$.

17. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Точка P – отличная от A и B точка одной из окружностей, X и $У$ – вторые точки пересечения прямых PA, PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB, делит одну из дуг $XУ$ пополам.

18. На продолжении стороны AC за вершину A $\triangle ABC$ отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M. а) Докажите, что AM – биссектриса $\angle BAC$. б) Найдите S_{AMBD}, если $S_{\triangle ABC} = 224$ и известно отношение $AC : AB = 4 : 3$.

19. Высота BH параллелограмма $ABCD$, опущенная на сторону AD, равна 10. Сторона AB и диагональ BD образует со стороной AD углы, соответственно равные 75^0 и 30^0. На высоте BH, как на диаметре, построена окружность, пересекающая сторону AB и диагональ BD в точках M и N соответственно. а) Докажите, что $\angle MHB = 75^0$, $\angle NHB = 30^0$. б) Найдите S_{HMBN}.

20. Точка P – центр вписанной окружности $\triangle ABC$. Прямые AP и BP пересекают описанную окружность $\triangle ABC$ в точках A_1 и B_1. а) Докажите, что прямая CP перпендикулярная прямой A_1B_1. б) Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 6$, $\angle ACB = 30^0$.

Вариант 9

1. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной b, проведены биссектрисы углов при основании. Отрезок прямой между точками пересечения биссектрис с боковыми сторонами равен m. Найти основание треугольника.

2. В $\triangle ABC$ проведена высота CD. Найти длину стороны AC, если $AB = 3, CD = \sqrt{3}, AD = BC$.

3. Найти площадь $\triangle ABC$, если $AC = 3, BC = 4$, а медианы AK и BL взаимно перпендикулярны.

4. В $\triangle ABC : \angle A = 36^0, h_a = 1 + \sqrt{5}, \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{2}$. Найти $\angle B, \angle C$.

5. В $\triangle ABC$ на стороне AC как на диаметре описана окружность, которая пересекает AB в точке M, BC – в точке N. Найти $\cos\angle A$, если $AC = 2, AB = 3, AN = 1$.

6. В остроугольном треугольнике, площадь которого равна S, $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Найти высоту, опущенную на сторону AB.

7. В параллелограмме $ABCD$ высота, проведённая к стороне AD, равна 3. Биссектриса $\angle BAD$ пересекает BC в точке M, N – точка пересечения AM и BD. Найти площадь BNM, если $AB = 6, MC = 4$.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и B прямые, $\angle D = 45^0$, $BC = 1, BD = 5$. Найти S_{ABCD}.

9. В $\triangle ABC$ вписана окружность, которая касается стороны AB в точке D, стороны AC – в точке E. Найти $S_{\triangle ADE}$, если $AD = 6, EC = 2, \angle BCA = 60^0$.

10. В прямоугольном $\triangle ABC$ биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $BO : OE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найти углы треугольника ABC.

11. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60°. Найти площадь этого треугольника.

12. Около окружности радиуса 2 описана равнобедренная трапеция $ABCD$. M и K – точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AD и боковой стороной AB равен 60°. Найти площадь четырехугольника $ADKM$.

13. Около окружности радиуса R описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами параллельна основаниям и равна b. Найти площадь трапеции.

14. Хорда AB проходит через точку M, лежащую внутри круга на расстоянии 5 от центра. Найти радиус круга, если $AM = 8$, $BM = 3$.

15. Две окружности радиусов 4 и 8 пересекаются под прямым углом. Найти длину общей касательной.

16. Через точку A окружности радиуса 10 проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Найти радиус окружности, касающейся данной окружности и хорд, если $AB = 16$.

17. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 10 и 24 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен 13, а средняя линия трапеции равна 26. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AMD.

18. На продолжении стороны AC за вершину A $\triangle ABC$ отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M. а) Докажите, что AM – биссектриса $\angle BAC$. б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если $S_{\triangle ABC} = 180$ и известно отношение $AC : AB = 3 : 2$.

19. Две окружности O_1 и O_2 одинакового радиуса, равного 10, касаются друг друга в точке K. а) Докажите, что существует и притом только одна окружность O_3, которая касается окружностей O_1 и O_2 и их общей касательной l, не проходящей через точку K. б) Найдите площадь четырехугольника C_1MNC_2, где точки M и N являются соответственно точками касания окружности O_3 с окружностями O_1 и O_2, а C_1 и C_2 – центры окружностей O_1 и O_2.

20. Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается стороны AB в точке P. Проведена окружность, касающаяся продолжений сторон AC и BC и касающаяся стороны AB в точке K – так называемая «вневписанная» окружность. а) Докажите, что $AK = BP$. б) Найдите периметр $\triangle ABC$, если известно, что он равнобедренный, радиус его вписанной окружности равен 3, а радиус одной из вневписанных окружностей равен 27.

Вариант 10

1. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $36°$, биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти стороны данного треугольника.

2. Найти третью сторону остроугольного треугольника, зная, что две его стороны равны a и b, а медианы этих сторон перпендикулярны.

3. В каком отношении делит высоту равнобедренного треугольника точка O, из которой все три стороны видны под одним и тем же углом, если угол при основании треугольника равен α.

4. Точки P и M на стороне BC треугольника BC выбраны так, что $BP : PM : MC = \frac{2}{3} : 1 : 1$. Точка R на продолжении AB выбрана так, что $AB : BR = 1 : 2$. Найти отношение $S_{PMST} : S_{\triangle ABC}$, если точки S и T являются точками пересечения AM и AP с прямой CR.

5. В трапеции $ABCD$ основания $AB = a$, $BC = b$. На продолжении BC выбрана точка M так, что AM отсекает от площади трапеции четвёртую часть. Найти CM.

6. $ABCD$ – квадрат, O – точка вне квадрата, $OA = OB = 5$, $OD = \sqrt{13}$. Найти площадь квадрата.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найти величину одного из углов между AB и CD.

8. В $\triangle ABC$ вписана окружность. Отрезок касательной к окружности, проведенной параллельно стороне AC, заключенный между сторонами AB и BC равен 2,4. Найти сторону AC, если периметр $\triangle ABC$ равен 20.

9. В равнобедренном треугольнике основание равно 3, боковая сторона равна 5. Найти отношение, в котором центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании.

10. Около $\triangle ABC$ с тупым углом A описана окружность с центром в точке O. Продолжение биссектрисы AD этого треугольника пересекает окружность в точке F. Радиус OA пересекает сторону BC в точке E. AH — высота треугольника. Найти отношение $S_{FOED} : S_{\triangle AED}$, если $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AF = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\angle AEH = 30^0$.

11. Около окружности радиуса 5 описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами параллельна основаниям и равна 8. Найти площадь трапеции.

12. Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найти расстояние от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если его стороны равны 24 и 7.

13. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5.

14. В угол вписаны три окружности – малая, средняя и большая. Большая окружность проходит через центр средней, средняя – через центр малой. Найти радиусы средней и большой окружностей, если радиус малой равен 1, а расстояние от ее центра до вершины угла равно 3.

15. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка C лежит на этой дуге, точка D лежит на хорде AB. Найти площадь $\triangle ABC$, если $AD = 2, ВД = 1, СД = \sqrt{2}$.

16. Найдите высоту трапеции, у которой основания AB и CD равны a и b ($a<b$), угол между диагоналями равен 90^0, а угол между продолжениями боковых сторон равен 45^0.

17. Через ортоцентр H $\triangle ABC$ проведены две перпендикулярные прямые, одна из которых пересекает BC в точках X, а другая пересекает AC в точке $У$. Прямые AZ, BZ параллельны соответственно прямым HX и $HУ$. Докажите, что точки X, $У$, Z лежат на прямой.

18. Дан $\triangle ABC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой $\angle BAC$ в точке K, лежащий на стороне BC. а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$. б) Найдите радиус окружности, вписанной в $\triangle AKC$, если $\sin B = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$ и сторона $AC = 45$.

19. Около окружности радиусом 3 описана равнобедренная трапеция $ABCD$ (AD – большее основание), $S_{ABCD} = 39$. а) Докажите, что $\sin \angle A = \dfrac{12}{13}$. б) Найдите S_{AMND}, где M и N – точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции.

20. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках D и E соответственно. а) Докажите, что прямые DE и BC параллельны. б) Пусть Q точка пересечения отрезков DE и AP. Найдите AQ, если радиус большей окружности равен 26, а $BC = 48$.

Вариант 11

1. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $72°$, а биссектриса этого угла равна m. Найти стороны треугольника.

2. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями Q и q. Найти катеты данного треугольника.

3. В треугольнике ABC даны углы α и γ ($\gamma < \alpha < \pi/2$). Из вершины B проведена высота BD и медиана BE. Найти площадь BDE, если площадь ABC равна S.

4. $S_{\vartriangle ABC} = \dfrac{3}{2}, \angle A = 30^0, h_b + h_c = \dfrac{5}{2}$. Найти b и c.

5. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота и медиана. Отношение их длин $40:41$. Найти отношение катетов.

6. Через вершину угла при основании равнобедренного треугольника и имеющего величину α, проведена прямая, пересекающая боковую сторону и образующая с основанием угол β ($\beta < \alpha$). Найти отношение, в котором эта прямая делит площадь треугольника.

7. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое больше основания CD и вдвое больше боковой стороны AD. Диагональ AC равна a, длина BC равна b. Найти площадь трапеции.

8. Основания трапеции равны 1 и 7. Найти длину отрезка прямой, параллельной основаниям и делящей пополам площадь трапеции.

9. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма диаметров описанной и вписанной окружности равна сумме катетов.

10. Из вершины B равнобедренного $\vartriangle ABC$ на основание AC опущена высота BD, $AB = BC = 8$. В треугольнике BCD проведена медиана DE. В треугольник BDE вписана окружность, касающаяся BC в точке K, DE – в точке M. Найти угол BAC, если $KM = 2$.

11. В окружность радиуса R вписан $\vartriangle ABC$, вершины которого делят окружность в отношении $2:5:17$. Найти $S_{\vartriangle ABC}$.

12. Диагональ AC четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около $ABCD$. Найти BD, если $AC = 4, CD = 2\sqrt{2}, \angle BAC : \angle CAD = 2:3$.

13. Рассматриваются все трапеции, вписанные в окружность радиуса R такие, что центр окружности лежит внутри трапеции, а одно из оснований равно $R\sqrt{3}$. Найти боковую сторону трапеции, имеющей наибольшую площадь.

14. Окружность радиуса 13 касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18. Найти отрезки, на которые окружность делит каждую из двух других сторон квадрата.

15. Две окружности радиуса R расположены так, что каждая из них проходит через центр другой. Найти радиус окружности, вписанной в общую часть данных окружностей и касающейся их линии центров.

16. Окружности радиусов 7 и 13 касаются друг друга внутренним образом в точке A. Через точку A проведены две прямые, пересекающие данные окружности: одна из них пересекает меньшую окружность в точке B, а большую окружность – в точке C, другая пересекает меньшую окружность в точке D, а большую – в точке E. Докажите, что прямые BD и CE параллельны. Найдите площадь трапеции $BCED$, если известно, что угол $\angle OAB = 45^0$, $\angle OAD = 60^0$, где точка О – центр большей из окружностей.

17. В $\triangle ABC$ биссектриса угла A равна полусумме высоты и медианы, проведенных из вершины A. Докажите, что если угол А тупой, то $AB = AC$.

18. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB $\triangle ABC$, причем $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC. б) Найдите отношение $S_{AB_1OC_1} : S_{\triangle ABC}$, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1 = 1 : 4$.

19. Отрезок AB – диаметр окружности с центром в точке O. Проведены две хорды AC и BD так, что точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Точка пересечения прямых BC и AD находится от точке C и D на расстоянии, равном 4, $\angle CAB = 60^0$. а) Докажите, что точка пересечения прямых BC и AD не лежит внутри окружности. б) Найдите радиус окружности.

20. Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки BE и CK пересекаются в точке L. а) Докажите, что $CL = KL$. б) Найдите $S_{\triangle BCK}$, если $S_{ABCD} = 50$, а меньшее из ее оснований BC относится к большему основанию AD как $2 : 3$.

Вариант 12

1. В равнобедренном треугольнике $AB = BC$, AD - биссектриса. Площади $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ равны S_1 и S_2. Найти AC.

2. В треугольник со сторонами 10, 17, 21 вписан прямоугольник с периметром 24 так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

3. Основание треугольника равно 20, медианы боковых сторон–18 и 24. Найти площадь данного треугольника.

4. В $\triangle ABC : h_a = 8, h_b = 6, m_c = 5$. Найти $\angle C$.

5. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, если медиана, проведенная к боковой стороне, составляет с основанием угол, синус которого равен $3/5$.

6. В трапеции $ABCD$ основание AB в три раза больше основания CD. На CD взята точка M так, что $MC = 2MD$. Точка N – пересечение BM и AC. Найти отношение площадей MCN и $ABCD$.

7. Доказать, что разность между суммой квадратов расстояний произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин параллелограмма и суммой квадратов расстояний от той же точки до двух других вершин постоянна.

8. В $\triangle ABC : AB = 15, BC = 12, AC = 18$. Найти отношение, в котором центр вписанной окружности делит биссектрису угла C.

9. В треугольнике ABC с острым углом A проведены медиана AM и биссектриса AD. Доказать, что $AD < AM$.

10. Окружность радиуса 4 вписана в равнобедренную трапецию, меньшее основание которой равно 4. Найти расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами трапеции.

11. Найти стороны параллелограмма, описанного около окружности радиуса 3, если площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами параллелограмма, равна 18.

12. Прямоугольник со сторонами 12 и 5 вписан в окружность. Вершины прямоугольника делят окружность на четыре дуги. Найти расстояние от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника.

13. К окружности радиуса 12 проведены касательные из точки, расположенной на расстоянии 15 от центра. Найти площадь кругового сектора, соответствующего меньшей дуге между точками касания.

14. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Длина общей внешней касательной равна $6\sqrt{3}$. Найти радиусы окружностей, если известно, что $r : R = 1 : 3$.

15. Через точку M, лежащую на диаметре NK окружности радиуса 4, проведена хорда AB, образующая с диаметром угол 30°. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная диаметру NK. Найти площадь треугольника ABC, если $AM : BM = 2 : 3$.

16. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AB взята точка M, что $AM : MB = 2 : 3$, а на стороне BC взята такая точка N, что $BN : NC = 4 : 7$. Найдите площадь четырехугольника $MNCD$, если площадь прямоугольника $ABCD$ равна 2200 см^2.

17. В $\triangle ABC$ точка O – центр описанной окружности. A_1, B_1, C_1 – точки, симметричные A, B, C относительно противоположных сторон, A_2, B_2, C_2 – точки пересечения OA_1 и BC, OB_1 и AC, OC_1 и AB. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

18. На катетах AC и BC прямоугольного $\triangle ABC$ вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M – середина гипотенузы AB, H – точка пересечения прямых CM и DK. а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикулярны. б) Найдите MH, если известно, что катеты $\triangle ABC$ равны 130 и 312.

19. В $\triangle ABC$ известны стороны $AB = 6, BC = 11$ и $\cos\angle ABC = -\dfrac{33}{44}$. Прямые AD и BE пересекаются в точке O, центре вписанной в треугольник окружности. Прямые AD и BE пересекают стороны BC и AC в точках D и E соответственно. а) Докажите, что $EC : DC = 20 : 17$. б) Найдите отношение площадей $\triangle ABC$ и $\triangle ABO$.

20. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках D и E соответственно. а) Докажите, что $\dfrac{BP}{AB} = \dfrac{CP}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. б) Пусть точка Q - точка пересечения отрезков DE и AP. Найдите площадь $\triangle ABC$, если $AQ = \sqrt{10}$, а радиус большей окружности равен 10.

Вариант 13

1. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при противоположной вершине равен 2α. Найти биссектрису, проведенную к боковой стороне.

2. В равнобедренном треугольнике $AB = BC$, высота AE равна 12, основание AC равно 15. Найти площадь $\triangle ABC$.

3. Медианы треугольника равны 3, 4, 5. Найти $S_{\triangle ABC}$.

4. На катете BC прямоугольного $\triangle ABC$ как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D так, что $AD : DB = 1 : 4$. Найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу AB, если $BC = 10$.

5. В треугольнике дана сторона a, противолежащий угол α и высота h_a к этой стороне. Найти сумму двух других сторон.

6. Дана трапеция $ABCD$. Параллельно её основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны AB и CD в точках P и Q, диагонали AC и BD в точках L и R. Известно, что $BC = a$, $AD = b$, а $S_{\triangle BOC} = S_{LOR}$. Найти длину PQ, если O – точка пересечения диагоналей.

9. В $\triangle ABC$ вписана окружность радиуса 2, касающаяся AC в точке D, AB – в точке E, BC – в точке F. Найти $S_{\triangle BEF}$, если $AD = 2$, $DC = 3$.

10. Найти площадь круга, вписанного в треугольник, если прямые, соединяющие центр круга с вершинами треугольника, делят площадь треугольника на части 4, 13 и 15 см^2.

11. В $\triangle ABC : AB = a, \angle C = \alpha$. O – центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle AOB$.

12. Дана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB которой перпендикулярна основаниям AD и BC ($AD > BC$). В трапецию вписана окружность. Радиус окружности, описанной около $\triangle ABD$ равен 10. Найти AD, если расстояние между центрами данных окружностей равно 2.

13. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около $ABCD$. Найти AC, если $BD = 2$, $AB = 1$, $\angle ABD : \angle DBC = 4 : 3$.

14. Найти среднюю линию равнобедренной трапеции, высота которой равна 6, если боковая сторона трапеции видна из центра описанной окружности под углом 120°.

15. Даны две концентрические окружности. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки одной окружности до концов диаметра другой не зависят от выбора точки и диаметра.

16. Окружности радиусов 8 и 6 касаются некоторой прямой в точках A_1 и A_2 и лежат по одну сторону от касательной. Отношение расстояния между центрами окружностей к расстоянию между точками A_1 и A_2 равно $\sqrt{3}$. Найти расстояние между центрами.

17. Один конец диаметра полуокружности совпадает с вершиной угла при основании равнобедренного треугольника, а другой принадлежит этому основанию. Найти радиус, если известно, что полуокружность касается одной боковой стороны треугольника и делит другую на отрезки 5 и 4, считая от основания.

18. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 26, вписана окружность, при этом боковая сторона делится точкой касания в отношении 4:9. Через центр окружности и вершину трапеции проведена прямая. Найдите площадь треугольника, отсекаемого от трапеции этой прямой.

19. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E, а вне – точка F, так что $\triangle ABE$ и $\triangle BCF$ равны. Найдите углы $\triangle ABE$, если известно, что отрезок EF равен стороне квадрата, а $\angle BFD$ – прямой.

20. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает ее на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB. а) Докажите, что луч DB – биссектриса $\angle ADC$. б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 8$, $AC = 5$.

21. В $\triangle ABC : \angle A = 120^0$, BM и CN – высоты $\triangle ABC$. Точка K – середина сторон BC. а) Докажите, что $\triangle KMN$ - равносторонний. б) Найдите $S_{\triangle KMN}$, если радиус окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$, равен $2\sqrt{3}$.

22. Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного $\triangle ABC$. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^0$. б) Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle BKC$, если известно, что радиус описанной окружности $\triangle ABC$ равен 12, а $\cos\angle BAC = 0{,}6$.

Вариант 14

1. Тангенс угла при основании равнобедренного треугольника равен 3/4. Найти тангенс угла между медианой и биссектрисой, проведенными к боковой стороне.

2. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны $\sqrt{13}$ и $\sqrt{10}$. Найти длину третьей стороны, зная, что она равна проведенной к ней высоте.

3. Числа m_1, m_2, m_3 выражают длины медиан треугольника. Показать, что если $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$, то треугольник прямоугольный.

4. Найти косинусы углов равнобедренного треугольника, у которого точка пересечения высот делит пополам высоту, проведенную к основанию.

5. На катете BC прямоугольного $\triangle ABC$ как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D так, что $AD : DB = 1 : 3$. Длина высоты, опущенной из вершины C на гипотенузу, равна 3. Найти катет BC.

6. Один из углов трапеции равен 30°, боковые стороны при продолжении пересекаются под прямым углом. Найти меньшую боковую сторону, если средняя линия равна 10, одно из оснований равно 8.

7. Стороны параллелограмма равны a и b. Из середины большей стороны параллельная сторона видна под углом α. Найти площадь параллелограмма.

8. Сумма квадратов параллельных сторон трапеции равна 288. Определить длину отрезка, параллельного сторонам и делящего площадь трапеции пополам.

9. В прямоугольном треугольнике с прямым углом A, $AB = 12$, радиус вписанной окружности равен 5. Окружность касается AC в точке D. Найти длину хорды, соединяющей точки пересечения окружности с BD.

10. Около $\triangle ABC$ с тупым углом A описана окружность с центром в точке O. Продолжение биссектрисы AF этого треугольника пересекает окружность в точке L. Радиус OA пересекает сторону BC в точке E. AH – высота треугольника. Найти отношение площади $\triangle OAL$ к площади $OEFL$, если $AL = 4\sqrt{2}$, $AH = \sqrt{2\sqrt{3}}$, $\angle AEH = 60^0$.

11. Найти радиус окружности, описанной около трапеции, основания которой равны 2 и 14, боковая сторона равна 10.

12. В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность с центром в точке O. Найти площадь трапеции, если $\angle DAB = 90^0$, $OC = 2$, $OD = 4$.

13. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Диагональ BD является биссектрисой угла ABC и пересекает диагональ AC в точке N. Найти BN, если $CD = 12$, $DN = 9$.

14. Точка M лежит внутри круга радиуса 13 на расстоянии 5 от центра. Через точку M проведена хорда. Найти произведение длин отрезков, на которые хорда делится точкой M.

15. Дана окружность с центром O радиуса 2. Отрезок OA пересекает окружность в точке M. Из точки A проведена касательная AK. Угол OAK равен 60°. Найти радиус окружности, которая касается AK, AM и дуги MK.

16. Окружность, вписанная в $\triangle ABC$, касается средней линии этого треугольника, параллельной стороне AC. Известно, что $S_{\triangle ABC} = 96$, $AC = 12$. Найдите длину большей из сторон AB и BC.

17. В $\triangle ABC$: $\angle A = \alpha, BC = a$. Вписанная окружность касается прямых AB и AC в точках M и P. Найдите длину хорды, высекаемой на прямой MP окружностью с диаметром BC.

18. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный $\triangle ABC$, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC – в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K. а) Докажите, что $\angle CKN = \dfrac{1}{2}\angle ABC$. б) Найдите BK, если $BC = 3\sqrt{2}$.

19. На сторонах AB, BC и AC $\triangle ABC$ отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, причем $AC_1 : C_1B = 15 : 4$, $BA_1 : A_1C = 1 : 3$, $CB_1 : B_1A = 4 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D. а) Докажите, что ADA_1B_1 – параллелограмм. б) Найдите площадь четырехугольника ADA_1B_1, если $AD \perp BC$, $AC = 20$, $BC = 16$.

20. В трапеции $ABCD$ углы при вершинах A и B прямые, а боковая сторона CD ровно вдвое длиннее меньшего основания BC. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность. Построена окружность, которая касается большего основания AD, боковой стороны CD и вписанной окружности трапеции. а) Прямая, проходящая через центр построенной окружности и центр окружности, вписанной в трапецию, пересекает боковую сторону AB в точке P. Докажите, что $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AD}{BC}$. б) Найдите радиус построенной окружности, если радиус вписанной в трапецию окружности равен 1.

Вариант 15

1. Основание равнобедренного треугольника равно 8, боковая сторона – 12. Найти длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами.

2. В $\triangle ABC: 2h_c = AB, \angle A = 75^0$. Найти угол C.

3. В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу.

4. Угол при основании равнобедренного $\triangle ABC$ равен α. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот $\triangle ABC$, если площадь $\triangle ABC$ равна S.

5. В $\triangle ABC$ на AB как на диаметре построена окружность, пересекающая BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 1$. Найти AC, если $AB = BC = 6$.

6. Найти острый угол равнобедренной трапеции площади S, если ее основания равны a и b.

7. В треугольник вписан ромб со стороной m так, что один угол общий, а противоположная вершина ромба делит сторону треугольника на отрезки p и q. Найти стороны треугольника.

8. Доказать, что если угол ромба равен 30°, то его сторона есть среднее пропорциональное между диагоналями.

9. В $\triangle ABC: r = \sqrt{2}, R = 2\sqrt{2}, b + c = 2a$. Найти стороны и углы треугольника.

10. В треугольник со сторонами 6, 10, 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная, пересекающая две боковые большие стороны. Найти периметр отсеченного треугольника.

11. Отношение боковых сторон трапеции равно отношению её периметра к длине вписанной окружности и равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

12. Сторона BC четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около $ABCD$. Найти AB, если $BC = 8$, $BD = 4\sqrt{2}$, $\angle DCA : \angle ACB = 2 : 1$.

13. В остроугольный $\triangle ABC$ с углами α и β при вершинах A и B соответственно вписана окружность радиуса r. Параллельно BC к ней проведена касательная. Найти площадь полученной трапеции.

14. Две окружности радиусов 2 и 6 пересекаются под прямым углом. Найти длину общей касательной.

15. Радиус кругового сектора равен R, радиус вписанной в него окружности равен r. Найти площадь сектора.

16. В окружность радиуса R вписаны три равных окружностей, каждая из которых касается данной окружности и дух соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими тремя окружностями.

17. Пусть P – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, M – точка пересечения прямых, соединяющих середины его противоположных сторон, O – точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, H – точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры $\triangle APD$ и $\triangle BCP$, $\triangle APB$ и $\triangle CPD$. Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, $У$, расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CA, CB к другой. Прямая CB вторично пересекает первую окружность в точке A_1. Найдите расстояние AA_1.

18. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB $\triangle ABC$, а вершина M и N – на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH $\triangle ABC$ проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причем $CD = DO = OH$. а) Докажите, что $\triangle ABC$ равнобедренный и прямоугольный. б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 4$.

19. Меньшее основание BC трапеции $ABCD$ равно 12. Углы при большем основании равны по 75^0. Угол между диагоналями равен 90^0. а) Докажите, что $BO = OC$, где O – точка пересечения диагоналей. б) Найдите площадь трапеции $ABCD$.

20. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках D и E соответственно. а) Докажите, что прямые DE и BC параллельны. б) Пусть Q – точка пересечения отрезков DE и AP. Найдите AQ, если радиус большей окружности равен 26, а $BC = 48$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Векторно-координатный метод решения задач

Рекомендуемая литература: [1, 22, 24, 43, 44, 64, 65, 67].

Векторно-координатный метод решения планиметрических задач заключается в том, что первоначально условия геометрической задачи и требуемый результат описываются на языке векторной алгебры, т.е. строится векторно-координатная модель задачи. Для того чтобы продуктивно решать геометрические задачи векторным методом, необходимо научиться задавать с помощью векторов основные геометрические объекты и описывать основные отношения между ними на языке векторной алгебры [22, с. 24].

Пример 1. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC. Точки M и N – середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN – прямой.

Решение

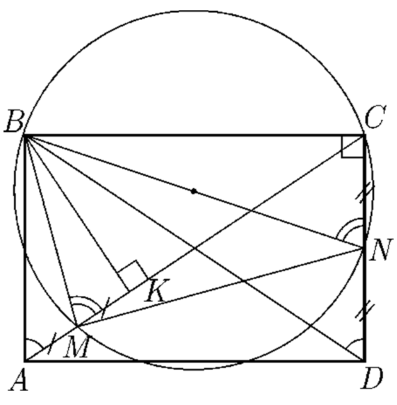


Рис. 9.1

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (рис. 9.1).

1. Поскольку

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KC}\right) \text{ и}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}\right), \text{ то}$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AB}\right),$$

т.к. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{BK} = 0$.

2. Обозначим, $\angle BAC = \angle KBC = \alpha$.

Тогда $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AB} = BC \cdot BK \cdot \cos\alpha - KC \cdot AB \cdot \cos\alpha = \left(BC \cdot BK - KC \cdot AB\right) \cdot \cos\alpha = \left(BC \cdot KC \cdot ctg\alpha - KC \cdot BC \cdot ctg\alpha\right) \cdot \cos\alpha = 0.$

3. Следовательно, $BM \perp MN$.

Утверждение доказано.

Пример 2. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин прямоугольника.

Доказательство

Первый способ. 1. Введём декартову прямоугольную систему координат. Поместим начало координат в вершину A прямоугольника $ABCD$, а оси координат направим по лучам AB и AD. Пусть $AB = a,\ AD = b$. Тогда вершины прямоугольника будут иметь следующие координаты: $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;b)$, $D(0;b)$.

2. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка плоскости. По формуле для квадрата расстояния между двумя точками

$$MA^2 + MC^2 = \left(x^2 + y^2\right) + \left((x-a)^2 + (y-b)^2\right),$$

$$MB^2 + MD^2 = \left((x-a)^2 + y^2\right) + \left(x^2 + (y-b)^2\right).$$

Из полученных равенств следует, что $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Второй способ. 1. Пусть O – центр прямоугольника $ABCD$, M – произвольная точка плоскости. Тогда $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2OA^2 + 2OM^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM} =$$

$$= 2OB^2 + 2OM^2 - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow$$

$$-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM} = -2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\vec{0} = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{0} \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Пример 3. В прямоугольном $\triangle ABC$ с катетами $AC = 3$, $BC = 2$ проведены медиана CM и биссектриса CL. а) Докажите, что $S_{\triangle CML} = \dfrac{1}{10} S_{ABC}$.

Решение

1. Поместим заданный $\triangle ABC$ в декартову систему координат (рис. 9.2). Выпишем координаты некоторых точек: $A(0;3)$, $B(2;0)$.

По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

2. По теореме 2.6.6 о медиане в прямоугольном треугольнике

$AM = BM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$. Тогда координаты точки M, как середины отрезка, есть $M(1;1,5)$.

3. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника (теорема 2.6.2): $\dfrac{AL}{BL} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{2} = 1,5$.

4. Найдем координаты точки L, используя формулы деления отрезка в данном отношении $\left(\lambda = \dfrac{AL}{BL} = 1,5\right)$:

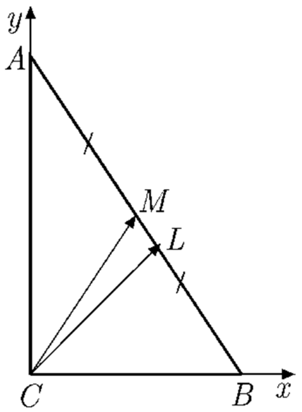


Рис. 9.2

$$x_L = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{0 + 1,5 \cdot 2}{1 + 1,5} = \frac{3}{2,5} = \frac{6}{5};$$

$$y_L = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{3 + 1,5 \cdot 0}{1 + 1,5} = \frac{3}{2,5} = \frac{6}{5}.$$

Тогда координаты точки $L\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{6}{5}\right)$.

5. Найдем длину CL по формуле расстояния между двумя точками: $CL = \sqrt{\dfrac{36}{25} + \dfrac{36}{25}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$.

6. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{CM} = \left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$, $\overrightarrow{CL} = \left\{\dfrac{6}{5};\dfrac{6}{5}\right\}$.

7. Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CL} = 1 \cdot \dfrac{6}{5} + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{6}{5} = \dfrac{6}{5} + \dfrac{9}{5} = 3$.

8. Найдем косинус $\angle MCL$:

$$\cos\angle MCL = \frac{\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CL}}{\left|\overrightarrow{CM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CL}\right|} = \frac{3}{\dfrac{\sqrt{13}}{2} \cdot \dfrac{6\sqrt{2}}{5}} = \frac{30}{6\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}};$$

$$\sin\angle MCL = \sqrt{1 - \frac{25}{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

$$S_{\triangle CML} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot CL \cdot \sin\angle MCL = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{3}{10}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = 3. \ \frac{S_{\triangle CML}}{S_{ABC}} = \frac{3}{10} : 3 = \frac{1}{10}.$$

Доказано.

Задания для самостоятельного решения

Решить задачи векторно-координатным методом

Задание № 1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна ее основанию и равна по длине половине суммы оснований.

Задание № 2. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 28 и 4, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB = 15$.

Задание № 3. Доказать, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно середины его стороны, лежит на описанной окружности.

Задание № 4. Даны точки A и B. Найти множество всех точек плоскости, для которых разность квадратов расстояний до точек A и B равна постоянному числу k.

Задание № 5. Используя векторы, докажите, что середины диагоналей четырехугольника и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

Задание № 6. Дан такой выпуклый четырёхугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M – середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

Задание № 7. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

Задание № 8. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин квадрата, до произвольной точки описанной около него окружности, постоянна. Чему равна эта сумма, если сторона квадрата равна a?

Задание № 9. *Задача о четырёх пятаках.* Четыре окружности радиуса R пересекаются по три в точках M и N, и по две в точках A, B, C и D. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

Приложение 2

Планиметрия в ЕГЭ

Приведем несколько примерных задач, выносимых на ЕГЭ [9, 14, 29, 30, 39, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 66, 67].

Пример 1. В остроугольном $\triangle ABC$ провели высоту BH, из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырехугольника $AKMC$, если $BH=2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.

Решение

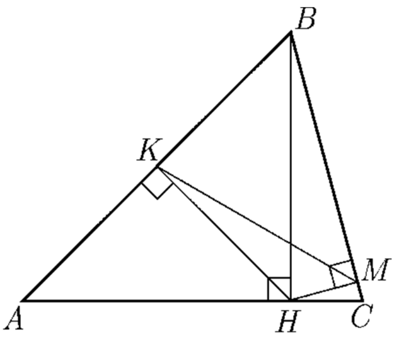


Рис. 10.1

Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 10.1).

а) Пусть $\angle BAC = \alpha$. Углы BAC и KHB равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

Рассмотрим четырехугольник $BKHM$: в нем $\angle BKH + \angle BMH = 90^0 + 90^0 = 180^0$, следовательно четырёхугольник $BKHM$ вписан в окружность. Значит углы KHB и KMB – вписанные, опирающиеся на одну и туже дугу, следовательно, они равны.

Таким образом, $\angle BAC = \angle KBH = \angle KMB$. Треугольники ABC и MBK имеют общий угол B, и $\angle BAC = \angle KMB$, значит, эти треугольники подобны по двум углам.

б) Из прямоугольного $\triangle BKH$ находим, что $BH = \dfrac{BK}{\sin \angle KHB}$.

Для треугольника ABC справедливо равенство $2R = \dfrac{BC}{\sin \angle BAC}$.

Учитывая, что $\angle KHB = \angle BAC$, получаем: $\dfrac{BC}{BK} = \dfrac{2R}{BH}$. Сторона BC и BK – сходственные в подобных треугольниках ABC и MBK, следовательно, их коэффициент подобия $k = \dfrac{BC}{BK} = \dfrac{2R}{BH} = 4$. Найдем отношение площади $\triangle MBK$ к площади четырёхугольника $AKMC$:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{AKMC} - S_{MBK}} = \frac{S_{MBK}}{k^2 \cdot S_{MBK} - S_{MBK}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{16-1} = \frac{1}{15}.$$

Ответ: $\frac{1}{15}$.

Пример 2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.

Решение

Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 10.2 *а*).

1. Продолжим AD до пересечения с BC: $AD \cap BC = M$.

По теореме Чевы:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

2. Подставим известные выражения:

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{3}{1} = 1 \to \frac{BM}{MC} = \frac{1}{8},$$

тогда $BM = \frac{1}{9}BC$.

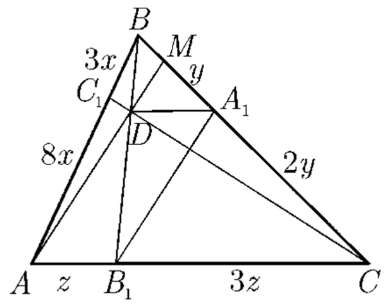


Рис. 10.2 *а*)

3. Тогда $MA_1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right)BC = \frac{2}{9}BC$, $A_1C = \frac{2}{3}BC$.

$$MA_1 = \frac{1}{3}A_1C, \ A_1C : MC = B_1C : AC = \frac{3}{4}.$$

Это значит, что $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle MCA$ по двум углам и $AM \parallel B_1A_1$, т.е. $AD \parallel B_1A_1$.

4. Рассмотрим $\triangle ABB_1$. Прямая C_1C пересекает две его стороны и продолжение третьей стороны AB_1.

По теореме Менелая: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{AC} = 1.$

Подставим известные числовые значения:

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{BD}{DB_1}\cdot\frac{3}{4}=1,\ \ \frac{BD}{DB_1}=\frac{1}{2}=\frac{BA_1}{A_1C},\ \ \frac{BD}{BB_1}=\frac{BA_1}{BC}=\frac{1}{3}.$$

5. Заметим, что $\triangle BDA_1 \sim \triangle BB_1C$ по углу и двум сторонам, отсюда $\angle BDA_1 = \angle BB_1C,\ \ DA_1 \parallel B_1C$.

6. Таким образом, получили: $AD \parallel B_1A_1$, $DA_1 \parallel AB_1$, ADA_1B_1 – параллелограмм.

б) Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 10.2 *б*).

7. Найдем CD, если $AD \perp BC$, $AC = 28$, $BC = 18$.

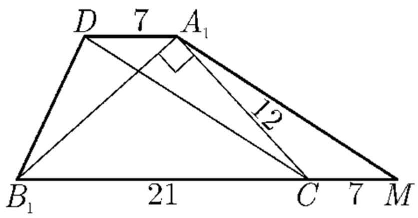


Рис. 10.2 *б*)

8. Поскольку $A_1B_1 \perp BC$, получим, что $A_1B_1 \perp BC$, $\triangle A_1B_1C$ – прямоугольный.

9. Мы доказали, что B_1DA_1C – трапеция, причем $B_1A \perp A_1C$.

10. Тогда $AC = 28$,

$$A_1D=\frac{28}{4}=7,\ \ B_1C=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}\cdot 18=12.$$

11. Пусть $M \in B_1C,\ \ CM = 7,\ \ B_1M = 28$.

12. Тогда A_1MCD – параллелограмм: $A_1M = CD$.

13. $\triangle B_1A_1C$: по теореме Пифагора

$$B_1A_1=\sqrt{21^2-12^2}=3\sqrt{7^2-4^2}=3\sqrt{33},$$

$$\cos\angle A_1B_1C=\cos\angle A_1B_1M=\frac{B_1A_1}{B_1C}=\frac{\sqrt{33}}{7}.$$

14. Рассмотрим $\triangle A_1B_1M$:

$$A_1M^2=A_1B_1^{\,2}+B_1M^2-2\cdot A_1B_1\cdot B_1M\cdot\cos\angle A_1B_1M.$$

$$A_1M^2=9\cdot 33+28^2-\frac{2\cdot 28\cdot 3\sqrt{33}\cdot\sqrt{33}}{7}=28^2-15\cdot 33=289.$$

$$CD=A_1M=17.$$

Ответ: $CD = 17$.

Пример 3. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что прямые DE и BC параллельны.

б) Пусть Q точка пересечения отрезков DE и AP. Найдите AQ, если радиус большей окружности равен 26, а $BC = 48$.

Решение

1. Пусть точки O и S – центры большей и меньшей окружностей соответственно, FA – диаметр большей окружности, а прямая l – общая касательная к двум данным окружностям (рис. 10.3 *а*).

2. Так как оба радиуса OA и SA, проведенные в точку касания, перпендикулярны прямой l, то прямые OA и SA совпадают, поэтому точка S лежит на радиусе OA и, значит, отрезок OA – это диаметр меньшей окружности.

3. Так как отрезки FA и OA – диаметры большей и меньшей окружностей, то $\angle FBA = 90^0$ и $\angle ODA = 90^0$. Поэтому прямые FB и OD параллельны. Отсюда по теореме Фалеса получаем, что $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AO}{AF} = \dfrac{1}{2}$.

4. Абсолютно аналогично из параллельности прямых OE и FC получаем, что $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$.

5. Отсюда по теореме, обратной теореме Фалеса, следует, что прямые DE и BC параллельны.

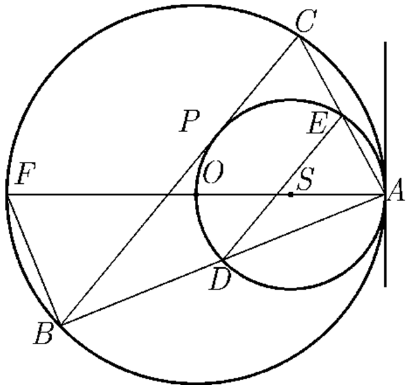


Рис. 10.3 *а*)

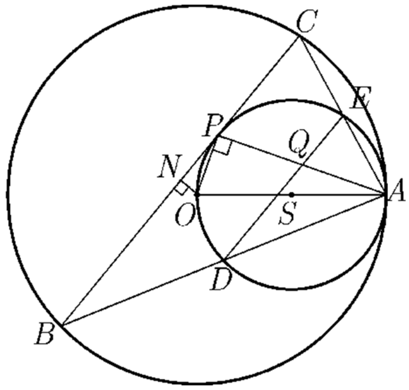


Рис. 10.3 *б*)

б) Из параллельности прямых DE и BC и теоремы Фалеса получаем, что $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому для нахождения длины отрезка AQ нам достаточно найти длину отрезка AP (рис. 10.3 *б*).

6. Пусть ON – перпендикуляр к хорде BC, тогда N середина хорды BC и, значит, BN=24.

7. Из прямоугольного $\triangle BON$ находим: $ON=\sqrt{BO^2-BN^2}=\sqrt{26^2-24^2}=10.$

8. Так как OA – меньший диаметр окружности, то $\angle APO=90^0$. Заметим, что поскольку угол между хордой и касательной равен половине дуги, которую он стягивает, то $\angle OPN=\frac{1}{2}\overset{\smile}{OP}=\angle OAP$, а из равенства углов $\angle OPN$ и $\angle OAP$ следует, что прямоугольные треугольники OPN и OAP подобны.

9. Поэтому $\frac{OP}{OA}=\frac{ON}{OP}\Rightarrow OP^2=ON\cdot OA.$ Вспоминая что $ON=10$, а $OA=26$, получаем: $OP^2=10\cdot 26=260.$

10. Из $\triangle OAP$ по теореме Пифагора находим, что $AP=\sqrt{OA^2-OP^2}=\sqrt{26^2-260}=\sqrt{26\cdot 16}=4\sqrt{6},\ AQ=\frac{1}{2}AP=2\sqrt{26}.$

Ответ: $AQ=2\sqrt{26}.$

Пример 4. Равносторонний $\triangle ABC$ и три одинаковые окружности расположены таким образом, что каждая окружность касается двух других сторон треугольника и двух других окружностей.

а) Докажите, что точки попарного касания окружностей являются вершинами равностороннего треугольника.

б) Найдите радиус окружностей, если известно, что $AB=4$.

Решение

а) Обозначим: центры окружностей – O_1, O_2, O_3; точки касания окружностей – M, N, P; общую точку AC и окружности $(O_1;r)$ – Q; проекцию точки P на AC – T.

1. Соединим центры окружностей отрезками. Пусть радиус окружностей равен r.

2. Рассмотрим $\triangle O_1O_2O_3$, каждая его сторона по теореме 4.3.1 равна $2r$. Следовательно, $\triangle O_1O_2O_3$, – равносторонний.

3. Рассмотрим $\triangle MNP$, каждая его сторона является средней линией $\triangle O_1O_2O_3$ и равна r, следовательно он равносторонний.

б) Так как каждая окружность вписана в угол, равный 60^0, то $\angle O_1AQ = 30^0$, а это значит, что $AO_1 = 2r = 2O_1Q$.

4. Очевидно, что $QT = r$, $AT = \dfrac{AC}{2}$; $AQ = AT - QT = 2 - r$;

5. Рассмотрим $\triangle AO_1Q$: $AQ = AO_1 \cdot \cos 30^0 = 2r \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$

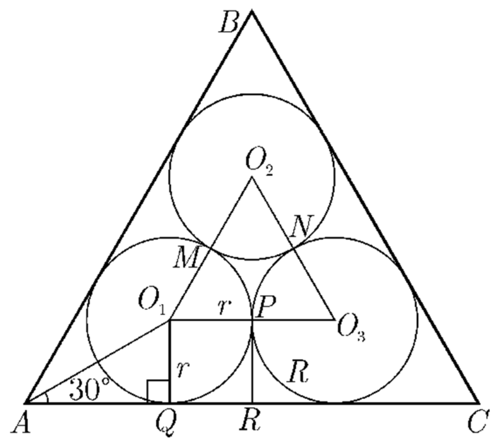


Рис. 10.4

Приравняем $2 - r = r\sqrt{3} \leftrightarrow r = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1.$

Ответ: $\sqrt{3} - 1.$

Пример 5. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного $\triangle ABC$ отложены равные отрезки AP и CQ соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельна его основанию, проходит через середину отрезка PQ.

б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенной внутри вписанной окружности $\triangle ABC$, если $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$, $CQ = AP = \sqrt{2}$.

Решение

а) Рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC$ (рис. 10.5).

1. Пусть KN – средняя линия $\triangle ABC$ и T – точка пересечения KN и PQ, проведем $PL \parallel BC$.

2. Рассмотрим $\triangle PAL \sim \triangle KAN \sim \triangle BAC$. По теореме Фалеса $AP = AL$, $KP = LN$.

3. Заметим, что $KP = LN = \dfrac{AC}{2} - AP$,

$NQ = \dfrac{AC}{2} - QC = \dfrac{AC}{2} - AP.$ Следовательно $LN = NQ$.

4. Рассмотрим $\triangle PLQ$, по теореме Фалеса имеем: $PT = TQ$.

б) Пусть вписанная окружность пересекает PQ в точках M и E.

5. Известно, что $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$, $CQ = AP = \sqrt{2}$. Найдем:

$$PK = AK - AP = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, AQ = 2\sqrt{2}.$$

6. Составим отношение $\frac{AP}{PK} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{1} = \frac{AQ}{QC}$.

7. Следовательно, по теореме, обратной к теореме Фалеса, имеем $PQ \parallel KC$.

8. Так как $CK \perp AB$, то и $PQ \perp AB$.

9. Рассмотрим прямоугольные $\triangle OKP$ и $\triangle ONQ$, они равные по двум катетам, следовательно $OP = OQ$.

10. Рассмотрим $\triangle POQ$, он равнобедренный, следовательно $OT \perp PQ$.

11. Получили, что $OTPK$ – прямоугольник, $OT = PK = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

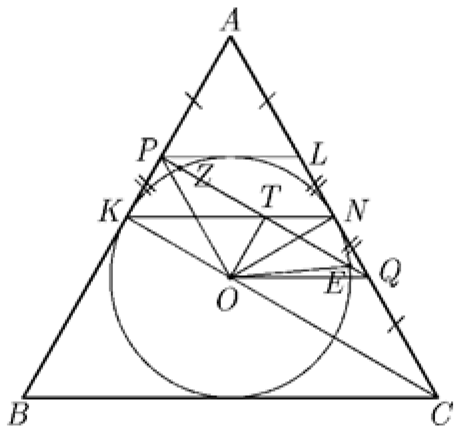


Рис. 10.5

12. Рассмотрим $\triangle BKC$ $\left(\angle K = 90^0\right)$:

$$KC = \sqrt{BC^2 - BK^2} \rightarrow$$

$$KC = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

13. Заметим, что $OK = OE$ как радиусы вписанной окружности.

$$OE = OK = \frac{1}{3}KC = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

14. Рассмотрим $\triangle OTE : TE = \sqrt{OE^2 - OT^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$

15. Получим, $TE = TM$, т.к. $OT \perp PQ$ и $\triangle OME$ равнобедренный. Следовательно, $ME = 2$.

Ответ: 2.

Пример 6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 15$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину . Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности. а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC. б) Найдите радиус второй окружности.

Решение

а) Пусть Q – центр второй окружности, M и N – ее точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H – проекция точки Q на BC (рис. 10.6).

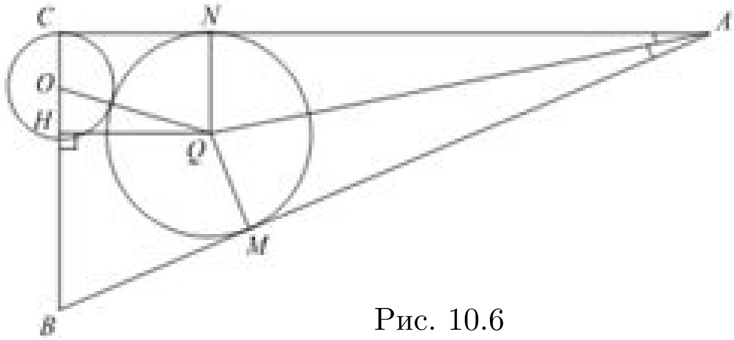


Рис. 10.6

Имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13,$ следовательно, $\cos\angle A = \frac{12}{13}, \sin\angle A = \frac{5}{13}.$

Тогда $tg\angle NAQ = tg\frac{\angle A}{2} = \frac{\sin\angle A}{1+\cos\angle A} = \frac{1}{5}.$

Поэтому $AC > AN = 5NQ$, что и требовалось доказать.

б) Пусть x – радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный $\triangle OHQ$: $QH = CN = 12 - 5x > 0,\ OQ = x + \frac{1}{2},$

$$OH = |OC - CH| = \left|\frac{1}{2} - x\right|.$$

По теореме Пифагора $OH^2 + QH^2 = OQ^2$, откуда:

$$(12-5x)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2,$$

$$25x^2 - 122x + 144 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 2{,}88. \end{array}\right.$$

Условию $12 - 5x > 0$ удовлетворяет только $x = 2$.

Ответ: радиус второй окружности равен 2.

Приложение 3

Темы курсовых работ

1. Признаки равенства треугольников.
2. Вписанные и описанные многоугольники.
3. Замечательные точки и линии треугольника.
4. Фигуры постоянной ширины.
5. Паркеты на плоскости.
6. Многоугольники на решетках.
7. Равновеликость и равносоставленность. Задачи на разрезание.
8. Разрезание и складывание бумаги.
9. Математические бильярды.
10. Геометрические неравенства.
11. Комбинаторные задачи по геометрии.
12. Геометрические задачи на максимум и минимум.
13. Геометрические задачи с практическим содержанием.
14. Геометрия на клетчатой бумаге.
15. Геометрия окружностей.
16. Теоремы Штейнера, Паскаля, Брианшона и их применение к решению геометрических задач.
17. Теория измерения длин отрезков.
18. Теория измерения площадей фигур.
19. Правильные многоугольники и их свойства.
20. Центр масс.
21. Вневписанные окружности.
22. Метрические соотношения в четырехугольнике.
23. Пучки окружностей.
24. Семидианы, антибиссектрисы и прямые.
25. Точка Брокара.
26. Окружности Торричелли.
27. Геометрические экстремумы.
28. Экстремальные свойства правильных многоугольников.
30. Полярное соответствие.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амелькин, В.В. Геометрия на плоскости: Теория, задачи, решения / В.В. Амелькин. – Мн.: ООО «Асар», 2003 – 592 с.

2. Аргунов, Б.И. Элементарная геометрия / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. – М.: Просвещение, 1966. – 368 с.

3. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7–9 классы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 383 с.

4. Атанасян, Л.С. Курс элементарной геометрии. Часть I. Планиметрия / Л.С. Атанасян, Н.С. Денисова, Е.В. Силаев. – М.: ПКФ «ПРИНТ», 1992. – 191 с.

5. Балаян, Э.Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ: 7–9 классы / Э.Н. Балаян. – 5-е изд., испр. и допол. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – 223 с.

6. Воронин, В.П. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. Геометрия / В.П. Воронин, М.В. Федотов. – М.: МГУ, 2001. – 154 с.

7. Габович, И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач / И.Г. Габович. – М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996. – 192 с.

8. Гордин, Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы / Р.К. Гордин. – 3-е изд., испр. – М.:МЦНМО, 2006. – 416 с.

9. Гордин, Р.К. ЕГЭ 2012. Математика. Решение задачи С4 / Р.К. Гордин. – М.: МЦНМО, 2012 – 328 с.

10. Гордин, Р.К. Это должен знать каждый матшкольник / Р.К. Гордин. – 2-е изд., испр. – М.: МЦНО, 2003. – 56 с.

11. Готман, Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения / Э.Г. Готман. – М.: Просвещение, 1996. – 240 с.

12. Гусев, В.А. Практикум по элементарной математике: Геометрия / В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1992. – 352 с.

13. Дубнов, Я.С. Измерение отрезков / Я.С. Дубнов. – М.: Физматгиз, 1963. – 100 с.

14. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко,

М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: Изд-во «Экзамен», 2019. – 263 с.

15. Еременко, С.В. Элементы геометрии в задачах / С.В. Еременко, А.М. Сохет, В.Г. Ушаков. – М.: МЦНМО, 2003. – 168 с.

16. Заславский, А.А. Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина / А.А. Заславский. – М.: Бюро Квантум, 2009. – 160 с.

17. Зеленский, А.С. Геометрия в задачах / А.С. Зеленский, И.И. Панфилов. – М.: Научно-технический центр «Университетский»: УНИВЕР-ПРЕСС, 2008. – 272 с.

18. Зеленяк, О.П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач теорем. Моделирование в среде TurboPascal / О.П. Зеленяк. – Киев, М.: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. – 336 с.

19. Зетель, С.И. Новая геометрия треугольника / С.И. Зетель. – М.: ГУПИМП РСФСР, 1962. – 151 с.

20. Зив, Б.Г. Задачи по геометрии / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский: пособие для 7–11 классов. – М.: Просвещение, 2003. – 271 с.

21. Кармакова, Т.С. Учимся самостоятельно решать геометрические задачи / Т.С. Кармакова, Л.А. Комкова. – Хабаровск: Изд-во ХК ИППК ПК, 2002. – 79 с.

22. Клековкин, Г.А. Решение геометрических задач векторным методом / Г.А. Клековкин. – Самара: СФ ГАОУ МГПУ, 2016. – 180 с.

23. Куланин, Е.Д. Геометрия треугольника в задачах / Е.Д. Куланин, С.Н. Федин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 208 с.

24. Кушнир, И.А Векторные методы решения задач / И.А. Кушнир. – Киев: Обериг, 1994. – 205 с.

25. Литвиненко, В.Н. Практикум по решению задач школьной математики. Геометрия / В.Н. Литвиненко. – М.: Просвещение, 1982. – 159 с.

26. Локшин, А.А. Что такое величина? / А.А. Локшин, В.Ф. Сибаева. – М.: Вузовская книга, 2006. – 80 с.

27. Лурье, М.В. Геометрия. Техника решения задач. – 3-е изд., стер. – Ростов н/Д.: Феникс; М.: Издательский отдел УНЦ ДО, 2002. – 240 с.

28. Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов н/Д: Легион, 2015. – 400 с.

29. Математика. ЕГЭ 2021. Книга 2. Профильный уровень. Решебник / Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцева. – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; М.: Народное образование, 2021. – 384 с.

30. Математика. Подготовка к ЕГЭ–2021. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2021 года / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов н/Д: Легион, 2020. – 400 с.

31. Математическая энциклопедия. Том 4 / под ред. И.М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – 1216 с.

32. Мякишев, А.Г. Элементы геометрии треугольника / А.Г. Мякишев. – М.: МЦНМО, 2002. – 32 с.

33. Никулин, А.В. Планиметрия. Геометрия на плоскости / А.В. Никулин. – Висагинас: Альфа, 1998. – 592 с.

34. Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Поздняк, С.А. Шестаков, И.И. Юдина. – М.: Физматлит, 2005. – 488 с.

35. Погорелов, А.В. Геометрия: учебник для 7–9 классов / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

36. Полный сборник решений задач для поступающий в вузы. Группа Б / под ред. М.И. Сканави. В 2 кн. кн. 2. – М.: ООО Изд-во «Мир и Образование»: МН.: ООО «Харвест», 2003. – 832 с.

37. Полонский, В.Б. Учимся решать задачи по геометрии/ В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович, М.С. Якир. – К.: Маристр, 1996. – 253 с.

38. Понарин, Я.П. Элементарная геометрия: в 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости / Я.П. Понарин – М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.

39. Потоскуев, Е.В. ЕГЭ 2017. Математика. Задания 14, 16. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия / Е.В. Потоскуев. – М.: Экзамен, 2017. – 224 с.

40. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. – 640 с.

41. Расин, В.В. Лекции по геометрии: Аксиомы планиметрии. Преобразования плоскости. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2011. – 164 с.

42. Рогановский Н.М. Геометрия. 9 класс. Многообразие идей и методов / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Минск: Аверсэв, 2011. – 144 с.

43. Смирнова, Е.С. Планиметрия: виды задач и методы их решения. Элективный курс для учащихся 9–11 классов / Е.С. Смирнова. – М.: МЦНМО, 2017. – 416 с.

44. Смирнова, И.М. Геометрия. Задачи на доказательство / И.М. Смирнов, В.А. Смирнов. – М.: МЦНМО, 2015. – 309 с.

45. Смирнова, И.М. Материалы курса «Геометрия на профильном уровне»: лекции 1–4 / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2006. – 76 с.

46. Ткачук, В.В. Математика – абитуриенту / В.В. Ткачук. – 14-е изд., испр. и допол. – М.: МЦНМО, 2007. – 976 с.

47. Толстопятов, В.П. Геометрические величины / В.П. Толстопятов. – Екатеринбург: Изд-во УГПУ, 2005. – 22 с.

48. Фарков, А.В. Математические олимпиады. 5–6 классы / А.В. Фарков. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во «Экзамен», 2013. – 190 с.

49. Фарков, А.В. Учимся решать олимпиадные задачи. Геометрия. 5–11 классы / А.В. Фарков. – 2-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 128 с.

50. Фискович, Т.Т. Геометрия без репетитора / Т.Т. Фискович. – М.: Издат. отдел УНЦ ДО МГУ, 1998. – 152 с.

51. Фисунов, П.А. Элементарная геометрия: планиметрия / П.А. Фисунов. – Чебоксары: ЧГПУ, 2003. – 88 с.

52. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

53. Черкасов, О.Ю. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену / О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 432 с.

54. Шабанова, О.В. Методологические аспекты обучения решению планиметрических задач / О.В. Шабанова // Азимут научных

исследований: педагогика и психология. – 2018. Т.7. № 1 (11). С. 277–230.

55. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 7–9 классы / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2012. – 464 с.

56. Шарыгин, И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 1999. – 304 с.

57. Шарыгин, И.Ф. Стандарт по математике: 500 геометрических задач/ И.Ф. Шарыгин. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2007. – 205 с.

58. Шахно, К.У. Сборник конкурсных задач по математике с решениями / К.У. Шахно. – 2-е изд., испр. и дополн. – Ленинград: Изд-во Ленингр. гос. ордена Ленина университета им. А.А. Жданова, 1953. – 235 с.

59. Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия) / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2000. – 336 с.

60. Юзбашев, А.В. Свойства геометрических фигур – ключ к решению любых задач по планиметрии / А.В. Юзбашев. – М.: МАТИ, 2005. – 210 с.

61. Ященко, И.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 го по математике / И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов. – М.: ФИПИ, 2019. – 25 с.

62. Ященко, И.В. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Геометрия / И.В. Ященко, С.А. Шестаков. – М.: МЦНМО, 2018. – 120 с.

63. https://mathvox.ru

64. https://ege.sdamgia.ru

65. http://zadachi.mccme.ru

66. https://vasmirnov.ru

67. https://problems.ru/

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ... 3
ЧАСТЬ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА ... 6
Раздел 1. Начальные геометрические сведения ... 6
1.1. Аксиоматика планиметрии ... 8
1.2. Основные понятия планиметрии ... 12
1.3. Измерение геометрических величин ... 17
1.4. Преобразование плоскости ... 27
Задания для практических занятий ... 30
Раздел 2. Треугольники ... 34
Предварительные замечания ... 34
2.1. Признаки равенства треугольников ... 35
2.2. Равнобедренный треугольник ... 40
2.3. Прямоугольные треугольники ... 42
2.4. Подобие треугольников ... 46
2.5. Соотношения в треугольнике ... 53
2.6. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника ... 58
2.7. Площадь треугольника ... 66
2.8. «Расчет треугольников» ... 71
Задания для практических занятий ... 75
Раздел 3. Многоугольники ... 81
3.1. Четырехугольники ... 81
3.2. Параллелограмм ... 83
3.3. Трапеция ... 89
3.4. «Расчет четырехугольников» ... 93
Задания для практических занятий ... 96
Раздел 4. Окружность ... 102
4.1. Углы, ассоциированные с окружностью ... 104
4.2. Хорды, касательные и секущие ... 107
4.3. Две окружности ... 110
4.4. Вписанные и описанные окружности ... 118

4.5. Длина окружности и площадь круга 132
4.6. «Расчет окружностей» 136
Задания для практических занятий 140
ЧАСТЬ 2. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ 154
Что значит решить планиметрическую задачу? 154
Раздел 5. Алгебраический метод решения задач 159
5.1. Метод вспомогательного параметра 159
5.2. Метод площадей 161
Раздел 6. Геометрический метод решения планиметрических задач 165
6.1. Метод дополнительных построений 165
6.2. Метод подобия 168
6.3. Метод вспомогательной окружности 171
6.4. Разные методы решения одной задачи 174
Задания для практических занятий 178
ЧАСТЬ 3. НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ 182
Раздел 7. Задачи на принадлежность 182
Задания для практических занятий 191
Раздел 8. Задачи на наименьшее и наибольшее значение 194
Задания для практических занятий 198
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 199
Приложения 230
Векторно-координатный метод решения задач 230
Планиметрия в ЕГЭ 234
Темы курсовых работ 242
Библиографический список 243

Учебное издание

Кислякова Мария Андреевна

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПЛАНИМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Отпечатано с авторского оригинал-макета
Дизайнер обложки *А. О. Меньшикова*

Подписано в печать 01.02.2022. Формат 60х84$^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 14,64. Тираж 100 экз. Заказ 22.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Отдел оперативной полиграфии издательства Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.