МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тихоокеанский государственный университет»

М. А. Кислякова

Вводный курс математики

*Утверждено издательско-библиотечным советом университета
в качестве учебного пособия*

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2018

УДК 519.6 (075.8)
ББК В19я73
К445

Р е ц е н з е н т ы:
канд. пед. наук, доцент кафедры математических методов и информационных технологий Дальневосточного института управления – филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при президенте Российской Федерации *О. Е. Мачкарина*;
канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Вычислительного центра ДВО РАН *Н. Е. Ершов*

Н а у ч н ы й р е д а к т о р
канд. физ.-мат. наук, д-р. пед. наук, профессор *А. Е. Поличка*

Кислякова, М.А.
К445 Вводный курс математики: учебное пособие / М. А. Кислякова; [науч. ред. А. Е. Поличка]. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2018. – 100 с.
ISBN

Учебное пособие предназначено для проведения семинарских, практических и лабораторных работ по математическим дисциплинам для студентов очного и заочного отделений социогуманитарных направлений подготовки «Психология», «Педагогическое образование», «Социология», «Социальная работа», «Реклама и связи с общественностью» и др.

Предназначено для студентов социогуманитарных профилей и преподавателей математических дисциплин.

УДК 519.6 (075.8)
ББК В19я73

ISBN

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

«Видеть во множестве предметов уникальность единичного – это гуманитарный подход, видеть то общее, что присуще всем остальным, это – математический подход»
М.А. Невзорова

Математика в образовательных программах будущих специалистов гуманитарного профиля введена с целью развития общекультурных и профессиональных компетенций. Возможность этого обеспечивается педагогическим потенциалом математических дисциплин, сформировавшимся за многолетний опыт преподавания математики студентам социогуманитарных направлений подготовки.

Образовательный потенциал математических дисциплин. Необходимость изучения математических дисциплин на всех этапах обучения состоит в особой роли математики в науке, технике, культуре и практической жизни. Принято считать, что «математика – это наука, исторически основанная на решении задач о количественных и пространственных соотношениях реального мира путём идеализации необходимых для этого свойств объектов и формализации этих задач», поэтому применение математических методов в физике, химии, биологии, экологии, компьютерным техническим наукам не вызывает вопросов. Непонимание у многих возникает тогда, когда встречаются исследования гуманитарных процессов и явлений с применением математических методов и принципов математического моделирования. Попытки применить математический аппарат, хорошо зарекомендовавший себя в естественнонаучных и технических науках, объясняется стремлением сделать разделы гуманитарных наук более точными и формализованными. Задача высшего образования – познакомить студентов с такими исследованиями, показать их научную ценность и возможности использования в своей профессиональной деятельности. Таким образом, изучение математических дисциплин в гуманитарном образовании направлено на освоение студентами элементов высшей математики, как основы для последующего изучения существующих исследований математических моделей гуманитарных объектов.

Мировоззренческий потенциал математических дисциплин заключается в направленности математики на формирование у студентов математико-мировоззренческих ориентиров. Представители гуманитарной сферы изучают общество и человека, поэтому они не могут игнорировать в своей профессиональной деятельности мировоззренческие проблемы, связанные с экономической деятельностью человека (тарифы ЖКХ, вклады и кредиты), со сферой развлечений (выигрыш и проигрыш в казино), с последствиями аварий и катастроф (оценка вероятностей попасть в аварию), с политической жизнью и ее влияние на жизнь каждого человека (понятие бюджета государства, инфляции, курса валют, прогнозы выборов) и т.д.

Математико-мировоззренческие ориентиры – способы саморазвития человека путем математического познания и преобразования мира.

Они заключаются в следующем:

1. В том, что математика оперирует идеальными объектами, т.е. существует возможность отвлечься от естественных свойств объекта и тем самым упростить задачу исследования.

2. В том, что математика ориентируется на предельные (универсальные) истины.

3. В том, что верным способом идеального познания и преобразования служит мышление человека.

4. В том, что в математике исторически сложились надежные способы фиксирования и обоснования результатов видения мира и стилем его познания (символизация, математический язык, опора на понятия, алгоритмизация).

5. В том, что к настоящему времени накопились различные виды математических моделей, как оправдавшие себя средствами познания; благодаря математике появилась возможность «сводить под одну крышу» совершенно разные объекты, упрощая сложные исследования.

6. В том, что математика и ее аппарат лежит в основе переработки информации, что является первостепенной задачей для современного информационного общества

Развивающий потенциал математических дисциплин направлен на развитие культуры мышления, на формирование у учащихся усердия, целеустремленности и интеллектуальной воспитанности. В современных социально-экономических условиях в целях саморазвития личности необходимо функционирование ряда способностей и умений, таких как, например, умение критически относиться к поступающей информации, осознание возможности множества разнообразных взглядов на одно и то же явление, обоснование своего собственного взгляда на различные события. Развитая культура мышления не позволяют превратиться человеку «в сосуд, в который другие заливают информацию».

«Математика – самая честная и творческая из наук. Она воспитывает не только правдивость, критичность, самостоятельность, справедливость, благородство, трудолюбие и дисциплинированность, но и учит «свободному полету мысли», несмотря на заданность строгих логических правил» [4].

Особенно это важно для будущего специалиста гуманитарного направления, профессионально важным качеством которого является способность объективно интерпретировать информацию, распространенную в различных источниках: книгах, СМИ, журналах, авторитетных мнениях, традициях и т.д. Именно поэтому для бакалавров гуманитарных направлений особо важно умелое сочетание гуманитарного и математического мышления.

Зачастую специалисты с гуманитарным образованием занимают руководящие должности, поэтому одним из профессионально важных качеств личности гуманитария является умение решать проблемы, умения выбирать оптимальные решения, которые в свою очередь могут быть основаны только на рефлексии, саморегуляции и контроле. Как отмечает Д.Д. Мордухай-Болтовской «главное педагогическое значение математики состоит в том, что в математике, преимущественно перед другими предметами, учащемуся предоставляется самостоятельная умственная работа. В других предметах ему главным образом приходится понимать мысли других, в математике при решении задач ему приходится мыслить самостоятельно». Именно эта самостоятельность в математике и приводит к развитию интеллектуальных умений.

ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели и задачи курса

Уважаемый студент, Вы начинаете изучать курс математических дисциплин с курса «Математики», который является продолжением всех тем, которые Вы учили в школе: числовая линия, линия уравнений и неравенств, функциональная линия, элементы теории вероятности и математической статистики.

В результате изучения курса математики, Вы будете обладать следующими компетенциями:

- ✓ способностью к самоорганизации и самообразованию;
- ✓ способностью использовать в познавательной и профессиональной деятельности элементы математического знания;
- ✓ способностью применять методы обработки результатов исследований с использованием методов математической статистики, информационных технологий, формулировать и представлять обобщения и выводы.

Другими словами, результатом изучения курса математики у вас будут сформированные знания, умения и навыки.

Знать	1. Обобщенный алгоритм решения математической задачи. 2. Свой интеллектуальный потенциал в области математической дисциплины, знать способы преодоления затруднений при изучении математической дисциплины. 3. Проблемные ситуации, требующие применения математического аппарата. 4. Основные математические понятия, теоремы и методы основ высшей математики.
Уметь	1. Последовательно выполнять ряд математических действий и получать верный результат при решении математических задач. 2. Преодолевать познавательные затруднения и использовать знания о собственных интеллектуальных ресурсах в решении математических задач. 3. Определять необходимость применения математики к анализу ситуаций, содержащих количественные данные. 4. Решать типовые математические задачи.
Владеть	1. Опытом применения обобщенного умения решать задачи в типовых ситуациях. 2. Опытом преодоления познавательных затруднений при решении математических задач. 3. Опытом определения необходимости применения математического аппарата к анализу разнообразных ситуаций. 5. Опытом применения математических методов: арифметический (вычислительный), алгебраический (решение текстовых и сюжетных задач), функциональный (понятие функции для установления зависимости между двумя переменными), вероятностный (понятие вероятности для объективной оценки событий, статистический (простейший количественный анализ) и сможете соотносить их с качественной оценкой информации.

Методический материал (учебники и справочники).

1) Справочник по элементарной математике / под ред. М.Я. Выгодского. – М.: АСТ Астрель, 2006. – 509 с.

2) Справочник по высшей математике / под ред. М.Я. Выгодского. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.

3) Математический словарь высшей школы / под ред. Богданова. – 2-е изд. – М.: Изд-во МПИ, 1989. – 527 с.

4) Дорофеева А.В. Высшая математика. Гуманитарные специальности / А.В. Дорофеева. – М.: МГУ, 2004. – 399 с.

5) Салий В.Н. Математические основы гуманитарных знаний: уч. пособие / В.Н. Салий. – М.: Высш. шк., 2009. – 304 с.

6) Вечмотов, Е.М. Метафизика математики: монография / Е.М. Вечмотов. – Киров: Из-во ВятГГУ, 2006. – 508 с.

7) Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Н.Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573 с.

8) Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов: учебник / О.Ю. Ермолаев. – 5-е изд. – М.: НОУ ВПО «МПСИ»: Флинта, 2011. – 336 с.

9) Краткий курс высшей математики : учебник / К.В. Балдин, Ф.К. Балдин, В.И. Джеффаль, Е.Л. Макриденко, А.В. Рукосуев. - 2-е изд. – М.: Изд-во «Дашков и К°», 2017. – 512 с.

10) Шапкин А. С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию: учебное пособие / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 8-е изд. – М.: Изд-во «Дашков и К°», 2017. – 432 с.

Список Интернет-Ресурсов по математике

Информационные ресурсы Интернета	Электронный адрес
Учебная литература в электронном формате (pdf, djvu, docx)	http://webmath.exponenta.ru
	http://www.twirpx.com
	http://www.alleng.ru
	http://eek.diary.ru
	http://math-helper.ru
	http://nashol.com
	http://en.bookfi.net
Онлайн калькуляторы: решение пределов, интегралов, построение графиков функций, задачи по аналитической геометрии и др.	http://o-math.com
	http://rytex.ru
	https://math.semestr.ru
Форумы: примеры решений задач по курсу высшей математики с комментариями пользователей и авторов решений	http://eek.diary.ru
	http://www.matburo.ru
	http://bankzadach.ru
Сайты по математике, содержащие разнообразную информацию по математическим дисциплинам	http://mathhelpplanet.com
	http://www.mathnet.ru
	http://mathserfer.com
	http://www.mathprofi.ru

Мониторинг Ваших учебных достижений

Диагностический лист

Ф.И.____

Дата выполнения	Контрольно-оценочные мероприятия	Баллы

<table>
<tr><td colspan="20" align="center">Посещение занятий</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

№	Контрольно-оценочное мероприятие	Баллы
1	Посещение занятий (0,5)	5
2	Работа у доски (1 балл)	10
3	Индивидуальные задания (по 5 баллов)	50
4	Самостоятельные работы (5 баллов)	15
5	Итоговая работа	20
	Итого	100 баллов

Качество результата обучения определяет относительным коэффициентом его сформированности $C = \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i}{\sum_{i=1}^{m} Z_i}$, где q_i-балльная оценка учебной работы студента за выполнение i-го контрольно-оценочного мероприятия (КОМ),

Z_i – максимальная бальная стоимость i-го КОМ, m – количество КОМ.

Уровни качества Вашей образовательной деятельности:

<table>
<tr><td>$0 < C < 0{,}33$</td><td>критический</td><td>0-55</td><td>не зачтено</td></tr>
<tr><td>$0{,}33 < C < 0{,}66$</td><td>допустимый</td><td rowspan="2">> 55</td><td rowspan="2">зачтено</td></tr>
<tr><td>$0{,}66 < C < 1$</td><td>оптимальный</td></tr>
</table>

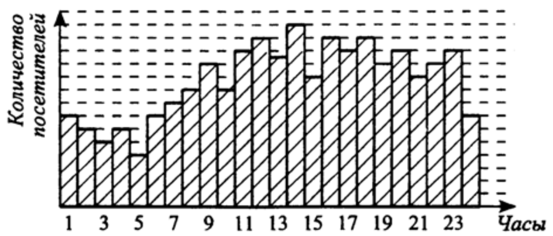
ЗАНЯТИЕ 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ДИСЦИПЛИНУ

Входная диагностическая работа

1.1. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{пок} - \dfrac{r_{пок} - r_{экс}}{(K+1)\dfrac{0,02K}{r_{пок}+0,1}}$, где $r_{пок}$ – средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{экс}$ – оценка магазина экспертами (от 0 до 0,9) и K – число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет магазина, если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, а средняя оценка равна 0,6, а оценка экспертов равна 0,45.

1.2. В школе работают три учителя: Воронов, Соколов и Коршунов. Каждый из них преподаёт два предмета, поэтому в расписании есть математика, физика, химия, история, литература и английский язык. Коршунов – самый молодой из преподавателей. Учитель химии старше учителя истории. Все трое – учитель химии, физики и Соколов – занимаются спортом. Когда между учителем литературы и английского языка возникает спор, Коршунов тоже принимает участие в споре. Соколов не преподаёт ни английский язык, ни математику. Кто из них какой предмет преподаёт?

1.3. На диаграмме показано количество посетителей сайта информационного агентства в течение каждого часа 6 февраля 2010 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали – количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, за какой час на данном сайте побывало максимальное количество посетителей.



1.4. Население города составляет 60 тыс. человек. За последние годы наблюдается прирост населения на 2 %. Каким будет население города через 5 лет, если эта тенденция сохранится?

1.5. Компания студентов филологов купила билеты на представление «Мастер и Маргарита» за 12 000 рублей на выходную премьеру. Если бы они потратили эти деньги на билеты в рабочие дни, то смогли бы купить на два билетов больше, т.к. они стоят на 500 рублей дешевле. Сколько человек собирается идти на спектакль?

1.6. Вы планируете продавать предметы ручной работы по 600 руб. за штуку, затраты на покупку материала составляют 300 рублей, постоянные расходы на материал составляют 13 000 руб. в месяц. Ежемесячная прибыль вычисляется по формуле $S(q)=q\cdot\alpha-\beta$, где α – чистый доход, β – ежемесячные расходы. Определите наименьший месячный объем производства товаров ручной работы, при которой прибыль будет не меньше 20 000 руб.

1.7. Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
План «500»	550 руб. за 500 Мб	2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб
план «800»	700 руб. за 800 Мб	1,5 руб. за 1 МБ сверх 800

Рассчитайте, какой тарифный план подходит для каждого случая, если трафик составит 250 Мб, 650, 1000 Мб в месяц?

1.8. Учащихся одиннадцатых классов, собирающихся поступать на социогуманитарные специальности, опросили об их намерениях поступить в высшие учебные заведения: 1 – Технический университет, 2 – Гуманитарный университет, 3 - Институт культуры, 4 – Железнодорожный университет. По данным опроса учащихся получены следующие данные: 1, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 4, 2, 3, 3, 1, 1, 1. Составить статистический ряд данных. Представить графически. Найти среднее, моду, размах. Сделать вывод.

1.9. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 50 докладов – первые три дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

1.10. На столе лежит 25 спичек. Двое по очереди берут 1, 2 или 4 спички. Проигрывает тот, кому спичек не осталось. Кто выигрывает при правильной игре?

Оценка результатов: *за правильно выполненное задание студент получает 1 балл. Если студент набрал менее 7 баллов, то уровень готовности к изучению математических дисциплин можно считать критическим.*

Дополнительные задания

1) Дайте определения математическим понятиям: число, уравнение, вероятность, доказательство, функция, аксиома, теорема, процент, предел, неравенство.

2) Расшифруйте следующие математические символы:

$$\leq,\ \geq,\ \equiv,\ \forall,\ \varnothing,\ \int,\ \sum,\ \sqrt{x},\ \notin,\ \in,\ \infty,\ \pi,\ \vec{a},\ \perp, n!$$

3) Найти значение выражения, при x=4, y=9: $\left|\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right|+0,44(x-y)^3-\dfrac{1}{(2x-y)(-2)}$.

4) Исследовать функцию (указать все свойства) и построить ее график $y=x^3-3x^2+4$.

Задания для повторения

1.1. Найдите значение выражения: $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{2}$.

1.2. Выразите из формул: а) $b = ?, \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{g}{k+a}$; b) $r = ?,\ \ S = \pi l(R+r)$.

1.3. Решите уравнения и системы:

$$\text{а) } 4^{|x-1|} = 8\,,\ \ \text{б) } \log_4(\sqrt{x} - 3) = 2\,,\ \ \text{в) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

1.4. Определите вид неравенств в системах, выберете подходящий метод решения, решите систему неравенств, запишите несколькими способами ответ:

$$a)\begin{cases} 2x + 7 > 4x - 8, \\ 10 + 4x \le 0. \end{cases} \quad b)\begin{cases} x^2 - 10x + 9 < 0 \\ 6x - 12 > 9 \end{cases}.$$

1.5. Каждый из двух сотрудников может выполнять заказ за 8 часовой рабочий день. Через 2 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй сотрудник, и работу над заказом они делают уже вместе. За сколько был выполнен заказ?

1.6. Банковский вклад увеличился на 10 %, а в следующем месяце уменьшился на 10 %, после чего на счету оказалось 10890 руб. Найдите первоначальную сумму вклада.

1.7. Исследовать свойства функции и построить ее график: а) $y = -(\text{x}-2)^3 - 1$,

б) $y = \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + 3x}\right)^2}{x}$.

1.8. Сумма двух чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

1.9. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 11 % пациента, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего с подозрением на гепатит, будет положительным.

1.10. 1 апреля 2018 года близнецы Саша и Паша планируют взять в кредит одинаковые суммы денег на покупку автомобилей. Саша хочет оформить кредит в банке «ВТБ» под 20 % годовых, а Паша – в банке «Альфа-банк» под 10 % годовых. Схема выплаты у каждого банка следующая: 1 апреля каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем клиент переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. кто из братьев должен будет в итоге заплатить своему банку больше денег, если известно, что Саша планирует выплатить долг двумя равными платежами, а Паша – пятью равными платежами.

Индивидуальное задание № 1

1.	1. Вычислить: $\left(-18\frac{3}{5}-20{,}1\right)^2:(-0{,}3)$. 2. Упростить: $\frac{x\sqrt[5]{x^2}}{\left(\sqrt[10]{x}\right)^2}$. 3. Найти решение: $x^3+4x^2-9x-36=0$.
2.	1. Вычислить: $64^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{324}$. 2. Упростить: $\frac{4pq(p-q)}{2p^2(q^2-p^2)}$. 3. Найти решение: $x^3+2x^2-x-2=0$.
3.	1. Вычислить: $\frac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[5]{-27}}{4^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-0{,}4}}$. 2. Упростить: $\frac{6\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}}-\frac{5\sqrt{x}}{x}+3x-6$. 3. Найти решение: $\frac{(x-1)\cdot(2+x)}{x}\le 0$.
4.	1. Вычислить: $\frac{\sqrt[3]{243}\cdot\sqrt[5]{16}}{3^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{-0{,}6}}$. 2. Упростить: $\frac{8x^2y^2}{x^2-y^2}:\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right)$. 3. Найти решение: $\frac{(x-2)\cdot(3+x)}{(x-1)}\ge 0$
5.	1. Вычислить: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}-\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{-64}}$. 2. Упростить: $\frac{75^n}{5^{2n-1}\cdot 3^{n-2}}$. 3. Найти решение: $x^2-6x+\sqrt{x-4}\ge\sqrt{x-4}-5$
6.	1. Вычислить: $3\frac{1}{3}+\left(7\frac{1}{2}-4{,}25\right):\frac{9}{20}$. 2. Упростить: $\frac{2a^2c^2}{a^2-c^2}:\left(\frac{a}{a-c}-\frac{a}{a+c}\right)$. 3. Найти решение: $\frac{(4x-4)\cdot(4-x)}{5-x}>0$.
7.	1. Вычислить: $\left(0{,}4-\frac{11}{15}\right)\cdot 1\frac{2}{7}-\left(\frac{7}{18}-0{,}5\right):1\frac{1}{16}$. 2. Упростить: $\frac{80^n}{4^{2n-1}\cdot 5^{n-2}}$. 3. Найти решение: $x^2-5x+\sqrt{2-x}\le 6+\sqrt{2-x}$.
8.	1. Вычислить: $\frac{\left(5^{\frac{4}{7}}\cdot 11^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{55^{12}}$. 2. Упростить: $\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}\right):\frac{a}{a^2-b^2}$. 3. Найти решение: $\sqrt{x^2-6}=\sqrt{-5x}$.
9.	1. Вычислить: $\left(\frac{\sqrt{125}\cdot\sqrt[5]{32}-5^{-\frac{1}{2}}}{10}\right)^2$ .2. Упростить: $\left(\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{x}\right)^2$. 3. Найти решение: $\frac{x^2-16}{1+4x-5x^2}\ge 0$
10.	1. Вычислить: $2^{3-7\sqrt{2}}\cdot 8^{\frac{7\sqrt{2}}{3}}$. 2. Упростить: $\frac{x^2+2xy+y^2}{(x^2-y^2)}:(x^3+y^3)$ 3. Найти решение: $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{4x}$.

ЗАНЯТИЕ 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Математическая задача

Математическая задача (В.И. Крупич) представляет собой замкнутую систему, в которой можно выделить:

- ✓ условие задачи, то есть данные и отношения между ними;
- ✓ требование задачи, то есть искомые и отношения между ними;
- ✓ основные отношения между данными и искомыми;
- ✓ способ, определяющий процесс решения задачи, то есть способ действия по преобразованию условия задачи для нахождения искомого;
- ✓ базис решения задачи, то есть теоретические основы, необходимые для обоснования решения.

Существует много разных типов математических задач. Наиболее часто математические задачи классифицируются по следующим основаниям.

по характеру требования	**по отношению к способу решения**	**по характеру объектов**	**по числу объектов в условии задачи и связей между ними**	**по методам решения**
на вычисление или нахождение	стандартные	математические	простые	арифметические
на доказательство или объяснение	нестандартные	реальные (или с практическим содержанием)	сложные	алгебраические функциональные

Классификация задач помогает в поиске решения математической задачи.

Что значит решить математическую задачу?

Вы имеете большой опыт в решении математических задач, даже не представляете, но Вы прорешали не менее двух тысяч задач за свою жизнь!

«Если приглядеться к любой задаче, то увидим, что она представляет собой требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче. ***Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче, – ее ответ»*** (Л.М. Фридман).

Приступая к решению какой-либо задачи, надо ее внимательно изучить, установить, в чем состоят ее требования. Для того чтобы приступить к анализу задачи, необходимо расчленить формулировку задачи на условия и требования. Производя анализ задачи, вычленяя из формулировки задачи ее условия, мы все время должны соотносить этот анализ с требованием задачи, как бы постоянно оглядываться на требование. Иными словами, анализ задачи всегда направлен на требования задачи.

Результаты предварительного анализа задач надо как-то зафиксировать, записать. Такой формой является схематическая запись задачи. Первой отличительной особенностью схематической записи задач является широкое использование в ней различного рода обозначений, символов, букв, рисунков, чертежей. Второй особенностью является то, что в ней четко выделены все условия и требования задачи, а в записи каждого условия указаны объекты и их характеристики, наконец, в схематической записи фиксируется лишь то, что необходимо для решения задачи; все другие подробности, имеющиеся в задаче, при схематической записи отбрасываются.

Весь процесс решения любой математической задачи можно разделить на следующие этапы:

I. Анализ задачи. Необходимо выяснить, к какому разделу математики относится задача: арифметика, алгебраические дроби, уравнения и неравенства, тригонометрия и т.д. Если это возможно, определить какие элементы задачи известны, как математически они описываются. Определить, что надо найти и конкретизировать вопрос. Записать задачу с помощью схемы и математического языка.

II. Поиск способа решения задачи. Решали ли Вы задачу ранее? Какую теорию необходимо знать, чтобы решить задачу? Составить список вопросов по данным условия. Вот этот этап самый важный, т.к. большую роль играет Ваш опыт в решении задач.

III. Осуществление плана решения. Когда у вас появляется идея, Вы составляете некоторый план – алгоритм своих действий. На этом этапе необходимо грамотно выполнить все математические преобразования и избежать ошибок.

IV. Проверка решения и ее анализ. Очень важный этап в решении задачи, который заключается в обосновании правильности полученного ответа, анализе выбранного методов решения и главное – запоминании идеи решения такого типа задач.

Другими словами, непосредственное решение задачи состоит из последовательности шагов (действий), каждый из которых есть применение некоторого общего положения математики к условиям и к их следствиям. Поэтому отыскание этой последовательности шагов есть самое главное, что нужно сделать для того, чтобы решить задачу. Математика и занимается тем, что она устанавливает для многих видов задач правила, пользуясь которыми можно найти указанную последовательность шагов для решения любой задачи данного вида. Для многих видов задач такие правила уже давно найдены, и вы их изучали их в школьном курсе математики.

Правила, пользуясь которыми можно найти последовательность шагов для решения любой задачи некоторого вида, в математике излагаются в различных формах. Приведем некоторые примеры таких правил: ***словесное правило, правило-формула, правило-тождество, правило-теорема, правило-определение***.

Каждое правило позволяет составлять алгоритм – последовательность шагов для решения любой задачи. Приведите примеры применения таких правил.

Пример № 2.1. Клиент взял в банке 12 000 000 рублей в кредит под 20 % годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем клиент переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами? (Ответ округлите до целого числа).

Решение.

Этап I. Анализ задачи. Тип задачи – задача на проценты. Известна исходная сумма, известен процент, известен план начисления процентов. Неизвестна фиксированная сумма ежегодного платежа, она же и является искомой величиной.

Этап II. Поиск способа решения задачи. Очевидно, готовой формулы для нахождения величины ежегодного платежа нет. Необходимо вывести математическую зависимость между начислениями процентов и ежегодной фиксированной суммой. Для этого математически опишем данные условия задачи, введя буквенные обозначения.

Этап III. Осуществление плана решения.

1) Введем вспомогательные обозначения.

Пусть *a=12 000 000* рублей – сумма кредита, x – ежегодный платеж,

m = 20 % - годовой процент, $t=\left(1+\frac{m}{100}\right)=1,2$ – процент, на который каждый год умножается оставшаяся сумма.

2) После первой выплаты сумма долга составит $a_1 = at - x$.

После второй выплаты сумма долга составит $a_2 = a_1 t - x$.

После третьей выплаты сумма долга составит $a_3 = a_2 t - x$.

После преобразований, получим: $a_3 = at^3 - \frac{t^3-1}{t-1}x$.

3) По условию задачи за три выплаты клиент оплатил кредит полностью

$at^3 - \frac{t^3-1}{t-1}x = 0$. Выразим *x*: $x = \frac{at^3(t-1)}{(t^3-1)}$.

4) Подставим известные из условия данные:

$$x = \frac{at^3(t-1)}{(t^3-1)} = \frac{12000000\cdot 1,2^3\cdot 0,2}{(1,2^3-1)} \approx 5696703,3.$$

Ответ: Сумма ежегодного платежа должна быть 5 696 703,3 руб.

Этап IV. Проверка решения и ее анализ.

4.1. Проведем проверку ответа, подставив полученную сумму в условие задачи:

1 год: $12000000\cdot 1,2 - 5696703,3 = 8703296,7$;

2 год: $8703296,7\cdot 1,2 - 5696703,3 = 4747252,74$;

3 год: $4747252,74\cdot 1,2 - 5696703,3 \approx 0$.

4.2. Выясним есть ли еще один способ решения задачи.

Пусть *S=12 000 000* –величина кредита, *x* – искомая величина ежегодного платежа.

Первый год: долг – *1,2 S*, платеж – *x*, остаток – *(1,2 S – x)*.

Второй год: долг – *1,2(1,2 S – x)*, платеж – *x*, остаток – *1,2(1,2 S – x) – x*.

Третий год: *1,2(1,2(1,2 S – x) – x)*, платеж – *x*, остаток – нуль.

Единственное уравнение: *1,2(1,2(1,2 S – x) – x) – x =0.*

$$1,728S=3.64x \rightarrow x= 5\ 696\ 703,3.$$

Задание № 2.1. Решите следующую задачу, выделяя все этапы в решении.

Вы хотите взять в кредит 1 миллион рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. ставка процента 10 % годовых. На какое максимальное количество лет Вы можете взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 240 000 руб.?

Методы решения математических задач

Рассмотрим три метода решения задач: арифметический, алгебраический, геометрический.

Пример № 2.2. Вы составляете отчет о физкультурной деятельности студентов: «Всего 45 студентов. Из них в футбольной секции состоят 25 человек, в баскетбольной – 30 и в шахматной – 28. Известно, что 16 человек занимаются и в футбольной, и в баскетбольной секциях, 18 человек одновременно занимаются и в футбольной и шахматной секциях, 17 – в баскетбольной и шахматной. А 15 человек ходят во все три секции». Как понять, верно ли составлен отчет?

Решение. Судя по условию задачи, студенты, которые ходят на несколько секций, посчитаны несколько раз. Как же выяснить, сколько на самом деле человек? Будем считать:

15 человек ходят во все три секции	**15 человек** надо вычесть из остальных списков
16 человек занимаются в футбольной в баскетбольной секциях	16 – 15 = **1 человек** ходит только футбольную и в баскетбольную секции
17- в баскетбольной и шахматной	17 – 15 = **2 человека** ходят только в баскетбольную и шахматную секцию
18 человек одновременно занимаются и в футбольной и шахматной секциях	18 – 15 = **3 человека** ходит только в футбольную и шахматную секцию
в футбольной секции состоят 25 человек	25–15–3–1 = **6 человек** ходят только в футбольную секцию
в баскетбольной – 30 человек	30–15–2–1 = **12 человек** ходят в баскетбольную секцию
в шахматной – 28 человек	28 – 15 – 2 – 3 = **8 человек** ходят в шахматную секцию
Подсчитаем количество человек	15+1+2+3+8+6+12=46 человек

Вывод: При подсчете Вы допустили ошибку.

Пример № 2.3. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Математически опишем каждое условие задачи.

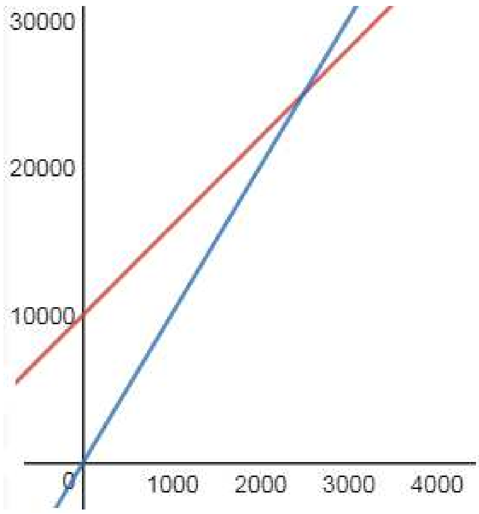
Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта	Зная скорость и время, можем найти расстояние первого автомобиля, предварительно переведя минуты в часы $80 \cdot \frac{40}{60} = \frac{160}{3}$ км

Он опережал второй автомобиль на один круг трассы, длина которой равна 14 км	Зная сколько проехал первый автомобиль за 40 минут и то, что второй проехал на один круг меньше, можем найти сколько километров проехал второй $\frac{160}{3} - 14 = \frac{118}{3}$ км
Зная расстояние, которое проехал второй автомобиль за 40 минут, можем найти его скорость	$\frac{118}{3} : \frac{40}{60} = 59$ км/ч

Ответ: Скорость второго автомобиля 59 км/ч.

Пример № 2.4. Фирма выпускает кофемолки, которые она предполагает реализовать по 10 ден. ед. за штуку. Фирма платит 6 ден. ед. за приобретенные детали для каждой кофемолки. Все прочие расходы (аренда помещения, транспортные издержки, реклама и др.) составляют ежегодно 10 000 ден. ед. Какое минимальное количество кофемолок должна ежегодно реализовывать фирма, чтобы не нести убытков?

Решение.



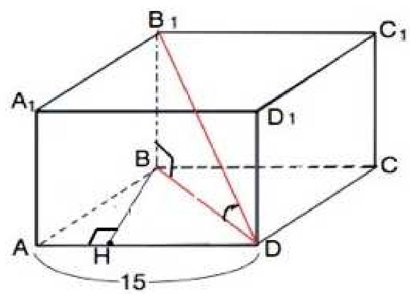
Пусть x – наименьшее число кофемолок, которое должна реализовать фирма, чтобы не нести убытков. Тогда выручка от их реализации составит $y_1 = 10x$. А общие издержки фирмы $y_2 = 6x + 10000$. Фирма не будет нести убытков тогда, когда выручка y_1 от реализации кофемолок станет не меньше общих затрат y_2. Поэтому строим функции y_1 и y_2.

Они пересекутся в точке А (2500; 25000). Таким образом, при реализации 2500 кофемолок фирма не несет убытков, но и не получает прибыли.

Пример № 2.5. В прямой призме основанием служит параллелограмм со сторонами 8 м и 15 м, которые образуют угол в 60^0. Меньшая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол в 30^0. Найти объем призмы.

Такого типа задачи можно назвать текстовыми задачами с геометрическим содержанием, которые также решаются алгебраическим методом. Обратите внимание, что в решении задачи не совершается никаких геометрических преобразований. Из геометрии тут указан лишь геометрический объект, исследование же ведется алгебраическим методом.

Дано: Прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, AB= V 8, AD=15, $\angle BAD=60^0$, $\angle$ $B_1DB=30^0$. Найти: -?



Решение:

1. Для того чтобы найти объем, выпишем формулу $V = S_{осн} \cdot H = S_{осн} \cdot BB_1$.

2. Для того чтобы найти площадь параллелограмма, воспользуемся формулой

$$S_{осн} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = 8 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}.$$

3. Для того чтобы найти BB_1, найдем BD. Для этого рассмотрим $\triangle ABD$. Зная две стороны и угол между ними, по теореме косинусов можем найти

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD.$$

$$BD^2 = 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 0{,}5 = 169 \to BD = 13.$$

4. Из прямоугольного $\triangle B_1BD$ находим:

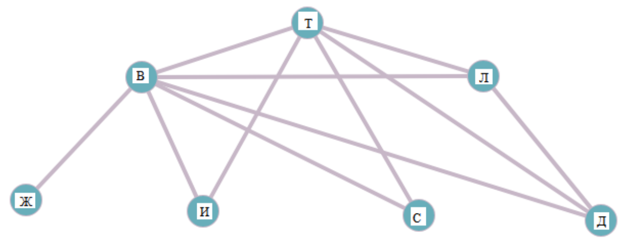
$$tg\angle B_1DB = \frac{B_1B}{BD} \to B_1B = BD \cdot tg\angle B_1DB = \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

5. Подставляем в формулу объема $V = S_{осн} \cdot BB_1 = \dfrac{60\sqrt{3} \cdot 13\sqrt{3}}{3} = 780$.

Пример № 2.6. В шахматном турнире по круговой системе участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя – пять, Леша и Дима – по три, Семен и Илья – по две, Женя одну. С кем сыграл Леша?

Такую задачу решим способом, который иногда предшествует алгебраическому и арифметическому – с помощью построения графа.

Решение. Нарисуем граф, обозначив точками «мальчиков», ребра будут обозначать «партию». Таким образом, видим, что Леша сыграл партии с Толей, Ваней и Димой.



Задание № 2.2. Решите следующие задачи, обосновав метод решения.

1) Расстояние в 30 км один из лыжников прошел на 20 минут быстрее другого. Какова скорость каждого лыжника (в км/ч), если известно, что расстояние в 45 км первый лыжник проходит за то же время, за которое второй лыжник проходит 54 км?

2) В теннисном турнире каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных». Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. «Синие» выиграли в четыре раза больше встреч, чем «красные». Сколько человек в каждой из команд?

3) Вы планируете время работы двух сотрудников, известно, что сотрудник Андрей может работать 7 часов, сотрудник Владимир 4 часа. Оказалось, что, работая так, будет выполнено 5/9 всей работы. Если они проработают совместно дополнительных 4 часа, останется выполнить 1/18 всей работы. За какой промежуток времени всю работу выполнил бы сотрудник Владимир?

Индивидуальное задание № 2

Определите тип задачи. Выберите метод решения. Решите задачи, подробно описывая каждый этап решения и свои рассуждения.

№	Задание
1.	1. В банк помещен вклад в размере 3900 тысяч рублей под 50 % годовых. В конце каждого из первых четырех лет после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же сумму. К концу пятого года после начисления процентов размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725 %. Какую сумму вкладчик добавлял ежегодно? 2. Утверждают, что в одной компании из пяти человек каждый знаком с двумя другими. Возможна ли такая компания?
2.	1. Двое сотрудников за месяц вместе выполнили 72 проекта. После того как первый сотрудник повысил производительность труда на 15 %, а второй – на 25 %, вместе за месяц они стали выполнять 86 проектов. Сколько проектов выполняет каждый сотрудник за месяц после повышения производительности труда? 2. Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с каждым из остальных по одному разу). Верно ли, что найдутся двое участников, закончившие одинаковое число партий?
3.	1. Куплены канцелярские скрепки двух видов на 15 рублей 20 коп. Если бы цена первого вида была выше, а второго – ниже на одно и тоже число процентов, то первый вид скобок стоил бы 15 р., а второго – 2 р. 40 коп. Сколько стоили скрепки первого вида в действительности? 2. Может ли так случиться, что в одной компании из шести человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими?
4.	1. Цену на гречку подняли на 75 %. Для того чтобы поменять ценник, продавец поменял местами цифры прежней стоимости 1 кг гречки. Цена гречки выражалась двузначным числом рублей, кратным 9. Сколько стоил 1 кг гречки до подорожания? 2. В некотором городе 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими ?
5.	1. Варе надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и тоже число открыток больше по сравнению с предыдущем днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней? 2. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 человек имеют по 3 друга, 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей ?
6.	1. Холдинг «Вертолёты России» планирует выпустить в первом квартале 20 % годового плана, во втором – увеличить производство в 1,5 раза, в четвёртом выпустить 102 вертолёта. В третьем квартале, во время отпусков, как показывает статистика, выпускается половина от среднего арифметического количества выпускаемых вертолётов во втором и

	четвёртом кварталах. Какое количество вертолётов планируется выпустить холдингом в третьем квартале? 2. Пятеро ученых, участвовавших в научной конференции, обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?
7.	1. Турист идет из одного города в другой, каждый день, проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и тоже расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за один третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров. 2. Семеро сотрудников фирмы договорились, что каждый из них пошлет файлы трем остальным. Может ли оказаться, что каждый получит файлы именно от тех коллег, которым напишет сам?
8.	1. Катя мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 миллиона рублей. Катя может купит ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Кате придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ей придется выплатить сумму, на 180 % превышающую исходную. Вместо этого, Катя может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды – 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от ее возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За какое время в этом случае Катя сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость квартиры не измениться? 2. В одной компании из пяти человек утверждают, что каждый подарил подарок двум другим. Верно ли это?
9.	1. В магазин поступил товар I и II сортов на общую сумму 4,5 млн руб. Если весь товар продать по цене II сорта, то убытки составят 0,5 млн руб., а если весь товар реализовать по цене I сорта, то будет полечена прибыль 0,3 млн руб. На какую сумму был приобретен товар I и II сортов в отдельности? 2. Семеро школьников, разъезжаясь на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем остальным. Может ли оказаться, что каждый получит открытки именно от тех друзей, которым напишет сам?
10.	1. Автомобиль прошел за 4 часа 180 км. В первый час он прошел 4/15 всего пути, во второй – 5/8 того, что прошел в первый час, в третий – вдвое меньше пройденного пути за первые два вместе, а в четвертый – остальной путь. Сколько километров прошел автомобиль за четвертый час? 2. На участке 3 дома и 3 колодца. От каждого дома к каждому колодцу ведет тропинка. Когда владельцы домов поссорились, они задумали проложить дороги от каждого дома к каждому колодцу так, чтобы не встречаться на пути к колодцам. Осуществиться ли их намерение?

ЗАНЯТИЕ 3. ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

В школьном курсе математики Вы познакомились с такими множествами, как множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел. Для элементов каждого числового множества были определены операции сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень, извлечение корня и их свойства.

На этом занятии Вы познакомитесь еще с одним множеством – множеством комплексных чисел.

Также в школьном курсе Вы познакомились с элементами комбинаторики и теории чисел. На этом же уроке рассмотрим несколько задач, обобщающих Ваши знания по комбинаторике.

П.3.1. Комплексные числа

При решении квадратных и кубических уравнений математики начиная с XVI века «подозревали», что есть мнимое число (мнимое – значит несуществующее в реальной действительности). Так, например, при решении уравнения $x^2+1=0$ возникает два корня $\pm\sqrt{-1}$. Леонард Эйлер, великий математик XVIII века, предложил называть это число буквой *"i"*. Так, в математику вошло новое множество чисел $\mathbb{C}$, элементами которого являются числа вида $a+ib,\ i=\sqrt{-1},\ i^2=-1$. Число a называется действительной частью числа, число b – его мнимой частью.

Два комплексных числа $z=a+ib$ и $\overline{z}=a-ib$ называются сопряженными.

В области комплексных чисел определены следующие операции: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратного корня. Рассмотрим первые четыре операции.

Пример № 3.1. Решите уравнение и запишите ответ в виде комплексного числа:

1) $x^2+4=0 \to x^2=-4 \to x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i;$

2) $x^2+2x+6=0 \to x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 6}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-20}}{2}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{5}i}{2}=-1\pm 2\sqrt{5}i.$

Задание № 3.1. Решите уравнение и запишите ответ в виде комплексного числа $x^2+9=0$, $x^2+x+2=0$.

Пример № 3.2. Выполните действия с комплексными числами:

Действия с комплексными числами очень похожи на действия с многочленами и подчиняются тем же правилам.

При сложении/вычитании двух комплексных чисел складываются / вычитаются их действительные и мнимые части.

1) $(3+7i)+(5-2i)=(8+5i)$.

При умножении двух комплексных чисел каждую часть одного комплексного числа надо перемножить с каждой частью другого комплексного числа, затем привести подобные.

2) $(3+7i)\cdot(5-2i)=15+35i-6i-14i^2=29+29i$.

При делении двух комплексных чисел нужно и числитель, и знаменатель умножить на сопряженное делителя.

3) $\dfrac{3+7i}{5-2i} = \dfrac{(3+7i)\cdot(5+2i)}{(5-2i)\cdot(5+2i)} = \dfrac{1}{29} + \dfrac{41}{29}i$.

Задание № 3.2. Выполнить действия с комплексными числами:

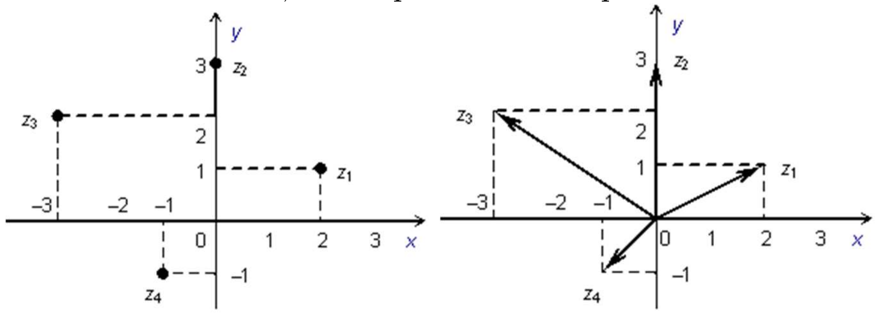
$$1)\ 2-5i+(2+5i)(1-i);\ 2)\ \frac{1+3i}{2-i}.$$

Как же изобразить комплексное число? На координатной прямой «все занято». Комплексные числа изображаются в декартовой системе координат одним из следующих способов.

Первый способ изображения числа $z=a+ib$, как точка A с координатами a и b.

Второй способ изображения числа $z=a+ib$, как вектор $\overrightarrow{OA}$ с началом в начале координат и концом в точке $A(a,b)$.

Пример № 3.3. Изобразить на плоскости комплексные числа $z_1 = 2+i, z_2 = 3i, z_3 = -3+2i, z_4 = -1-i$ означает изобразить точки с координатами (2, 1), (0, 3), (-3 ,2), (-1, -1). На первом рисунке изображены комплексные числа как точки, на втором как векторы.



Задание № 3.3. Изобразить на плоскости комплексные числа

$$z_1 = i-3,\ z_2 = 5i-1,\ z_3 = -2i,\ z_4 = 3+3i.$$

Во многих формулах высшей математики встречается **тригонометрическая форма комплексного числа** $z=a+ib$:

$$z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ |z| = \sqrt{a^2+b^2},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

где угол φ называется аргументом числа z, это угол между вектором и положительным направлением оси Ox.

Пример № 3.4. Записать число $z=2+2i$ в тригонометрической форме.

Найдем угол φ и подставим его формулу $z=|z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2},$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \to \varphi = 45^0$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos 45^0 + i\sin 45^0\right).$$

Задание № 3.4. Записать число $z=i-1$ в тригонометрической форме.

Комбинаторные задачи

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Например, сколькими способами из 30 человек можно составить группы из трех человек, сколько пин-кодов можно составить из четырех цифр, сколько существует способов составить телефонные номера и т.д.

Для решения комбинаторных задач введем обозначения и алгоритмы.

Пусть задано конечное множество $X = \{x_1, .., x_n\}$ содержащее n-переменных.

Выборкой будем называть совокупность элементов множества, отобранной по некоторому правилу.

Выборка называется упорядоченной, если от перестановки элементов в выборке качественно меняется сама выборка. Выборка называется неупорядоченной, если от перестановки элементов выборки выборка не меняется.

Выборка называется с повторением, если в выборку один и тот же элемент множества входит более двух раз. Выборка называется без повторения, если в выборку один и тот же элемент множества входит не более одного раза.

Пример № 3.5. Охарактеризовать выборку.

1. Сколькими способами можно составить различные пин-коды для пластиковых карт, так чтобы цифры не повторялись?

Задано множество $X = \{0, .., 9\}$, содержащее 10 элементов. Выборка будет собой представлять четыре различные цифры. Выборка будет упорядоченной, т.к. пин-код $1234 \neq 2134$. Выборка будет без повторения, т.к. это указано в условии задачи.

2. На ипподроме 15 лошадей. Сколькими способами можно выбрать 5 лошадей для первого забега?

Задано множество $X = \{1, .., 15\}$ лошадей (как будто у каждой свой номер). Выборка будет представлять собой пять чисел. Выборка будет неупорядоченной, т.к. для забега неважно как расположены номера лошадей в списке. Выборка будет без повторения, т.е. одна и та же лошадь не может войти в список дважды.

3. Сколько трехбуквенных слов можно составить из букв русского алфавита?

Задано множество X, содержащее 33 элемента. Выборка будет упорядоченной $\{авп \neq апв\}$. Выборка будет с повторением, т.к. по условию не сказано обратного.

4. В цветочном магазине продаются шесть видов цветов. Сколько различных букетов можно составить из десяти цветов в каждом?

Задано множество $X = \{1_{тип}, 2_{тип}, ..., 10_{тип}\}$, в котором, вообще говоря, бесконечное число элементов. Выборка будет неупорядоченная, т.к. не имеет значения как переставлять цветы в одном букете, букет останется тем же. Будет может состоять из одного вида цветов, поэтому выборка с повторением.

Задание № 3.5. Приведите примеры упорядоченных, неупорядоченных, с повторением и без повторения выборок.

В таблице представлены основные комбинаторные формулы, имеющие в математике название – комбинаторные соединения.

Комбинаторные соединения

Размещение с повторениями длины m из множества n	Размещение без повторения длины m из множества n	Перестановки без повторения из n элементов	Перестановки с повторениями или перестановки данного состава	Сочетание без повторения длины m из элементов n - множества	Сочетание с повторениями длины m из элементов n – множества
Характер выборки 1) упорядоченная 2) с повторениями	Характер выборки 1)упорядоченная 2) без повторений 3) m<n	Характер выборки 1)упорядоченная 2) без повторений 3) n=m	Характер выборки 1) упорядоченная 2) с повторениями 3) дан состав	Характер выборки 1) неупорядоченная 2) без повторений	Характер выборки 1) неупорядоченная 2) с повторениями
$\tilde{A}_n^m = n^m$	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$P_n = n!$	$\tilde{P}_m(m_1..m_k) = \dfrac{m!}{m_1!\cdot\ldots\cdot m_k!}$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$	$\tilde{C}_n^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$

Алгоритм решения комбинаторной задачи[1]:

Задача называется комбинаторной, если требуется подсчитать число возможных вариантов осуществления некоторого действия, т.е. ответить на вопрос «сколькими способами?».

1. Определить, к какому типу (сложная или простая) относится комбинаторная задача.
2. Если задача сложная, то разбить ее на несколько более простых задач.
3. Решить каждую из простых задач по алгоритму:
   - 3.1. определить n – число элементов в множестве;
   - 3.2. определить m – длину выборки;
   - 3.3. определить характер выборки;
   - 3.4. по характеру определить комбинаторное соединение;
   - 3.5. выписать соответствующую формулу и произвести вычисления.
4. Определить, какой принцип необходимо применить в задаче.
5. Вычислить, используя соответствующий принцип суммы или произведения.

[1] Алгоритм решения комбинаторных задач заимствован из лекционных материалов И.В. Карповой

Принцип умножения: если из некоторого конечного множества первый элемент x можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй элемент y можно выбрать n_2 способами, то оба элемента x и y в указанном порядке можно выбрать $(n_1 \cdot n_2)$ способами.

Пример № 3.6. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 если: а) цифры не повторяются? б) цифры могут повторятся?

Решение.

1. Задано множество X={1,2,3,4,5}. Осуществляем последовательную выборку элементов.

а) трёхзначные числа – это, например, 123, 234, 543 и т.д.

Имеется: 5 различных способов выбора цифры для первого места;

4 оставшихся способа выбора цифры для второго места;

3 оставшихся способа выбора цифры для первого места.

Следовательно, согласно принципу умножения, имеется 5·4·3 = 60 способов расстановки цифр, т. е. искомое количество трехзначных чисел есть 60.

б) трехзначные числа, цифры которых повторяются – это 255, 333 и т.д. Понятно, что если цифры могут повторяться, то трехзначных чисел 5·5·5 = 125.

Принцип суммы. Если некоторый элемент x можно выбрать n_1 способами, а элемент y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y), можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Эти правила распространяется на любое конечное число элементов.

Пример № 3.7. В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать для выполнения различных заданий двух студентов одного пола?

Решение. По принцип умножения двух девушек можно выбрать 14·13 = 182 способами, а двух юношей – 6·5 = 30 способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух студенток или двух юношей. Согласно принципу сложения, таких способов выбора будет 182 + 30 = 212.

Рассмотрим примеры решения комбинаторных задач.

Пример № 3.8. На железнодорожной станции имеются 10 светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: «красный», «желтый», «зеленый»?

Решение. Ответьте самостоятельно на вопросы в правом столбце таблицы.

1.	Какое множество задано? Сколько в нем элементов?	множество цветов X = {красный, желтый, зеленый}, n=3
2.	Сколько элементов множества идет в выборку?	m=10 (10 светофоров «раскрашиваем» разными цветами)
3.	Какой характер имеет выборка (упор. / неупор.; с повтор / без повтор.)	Упорядоченная, т.к. имеет значение у какого светофора какой цвет. С повторением, т.к. на разных светофорах могут быть одинаковые цвета.
4.	Какое комбинаторное соединение подходит?	Размещение с повторением
5.	Вычислите количество способов по формуле	$\tilde{A}_n^m = n^m = 3^{10}$

Пример № 3.9. Сколько словарей необходимо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, китайского, английского, немецкого, итальянского?

Решение. *Закройте правую часть таблицы и ответьте самостоятельно на вопросы.*

1.	Какое множество задано? Сколько в нем элементов?	Множество из пяти языков X={русс., кит., англ., немец., итал.}, n=5
2.	Простая или сложная задача?	Простая, т.к. один вопрос, одно множество
3.	Сколько элементов множества идет в выборку?	m=2
4.	Какой характер имеет выборка (упор. / неупор.; с повтор / без повтор.)	Упорядоченная, т.к. русско-английский и англо-русский это два разных словаря Без повторения, т.к. словарь русско-русский нам не нужен
5.	Какое комбинаторное соединение подходит?	Размещение без повторения
6.	Вычислите количество способов по формуле	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$
7.	Записать ответ	20 словарей нужно издать

Пример № 3.10. Сколькими способами можно составить новогодний подарок из десяти конфет, если в наличии четыре вида конфет (предположим, что конфет каждого вида в достатке)?

Решение. *Закройте правую часть таблицы и ответьте самостоятельно на вопросы.*

1.	Какое множество задано? Сколько в нем элементов?	Множество из десяти видов конфет X={1 вид, 2 вид, 3 вид, 4 вид}, n=4
2.	Простая или сложная задача?	Простая, т.к. один вопрос, одно множество
3.	Сколько элементов множества идет в выборку?	m=10
4.	Какой характер имеет выборка (упор. / неупор.; с повтор / без повтор.)	Неупорядоченная, т.к. неважно в каком порядке лежат конфеты в коробке С повторением, т.к. можно положить хоть все конфеты одного вида
5.	Какое комбинаторное соединение подходит?	Сочетания с повторениями
6.	Вычислите количество способов по формуле	$\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = \frac{(4+10-1)!}{10!(4-1)!} = \frac{13!}{10!3!} = 572$
7.	Записать ответ	Существует 572 способа

Пример № 3.11. В неделю Вам необходимо съесть 2 яблока, 3 апельсина и 2 киви. Каждый день по одному плоду. Сколькими способами Вы можете это сделать?

Решение. *Закройте правую часть таблицы и ответьте самостоятельно на вопросы.*

1.	Какое множество задано? Сколько в нем элементов?	Множество из семи фруктов X={2 яб., 3 ап., 2 к.}, n=7
2.	Простая или сложная задача?	Простая, т.к. один вопрос и одно множество
3.	Сколько элементов множества идет в выборку?	m=7
4.	Какой характер имеет выборка (упор. / неупор.; с повтор / безповтор.)	Упорядоченная, т.к. важно в какой день какой фрукт С повторением, т.к. фрукты повторяются
5.	Какое комбинаторное соединение подходит?	Перестановки с повторениями
6.	Вычислите количество способов по формуле	$\tilde{P}_m(m_1..m_k)=\dfrac{m!}{m_1!\cdot..\cdot m_k!}=\dfrac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=210$
7.	Записать ответ	Существует 210 способов

Пример № 3.12. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть 3 строительные фирмы, куда берут только юношей, два салона красоты, куда приглашаются только девушки и две торговые фирмы, куда требуются и юноши, и девушки?

Решение. *Закройте правую часть таблицы и ответьте самостоятельно на вопросы.*

<table>
<tr><td>1.</td><td>Прочитайте внимательно задачу. Какое множество задано? Одно ли оно? Сколько в нем элементов?</td><td colspan="2">Задано два множества рабочих мест для
– девушек X_1={2 салона красоты, 2 торговые фирмы}, $n_1=4$;
– юношей X_2={3 строит. ф., 2 торговые фирмы}, $n_2=5$.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Простая или сложная задача?</td><td colspan="2">Задача сложная, т.к. задано два множества</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Сформулируйте простые задачи и охарактеризуйте выборку в каждом случае.</td><td>Сколькими способами можно устроить на работу двух девушек?
Выборка: из четырех мест нужно выбрать два: упорядоченная, с повторением (т.к. важно какая девушек на какую работу устроится): $n_1=4$, $m=2$;</td><td>Сколькими способами можно устроить на работу трех юношей?
Выборка: из пяти мест нужно выбрать три: упорядоченная, с повторением (т.к. важно какой юноша на какую работу устроится): $n_2=5$, $m=3$;</td></tr>
</table>

5.	Какое комбинаторное соединение подходит? Вычислите количество способов по формуле	Размещение с повторением: $\tilde{A}_n^m = n^m$ $\tilde{A}_{n_1}^m = n^m = 4^2 = 16$ $\tilde{A}_{n_2}^m = n^m = 5^3 = 125$
6.	Какой принцип (суммы или произведения) необходимо использовать?	По условию задачи устроить надо «И» юношей, «И» девушек, поэтому принцип произведения: $16 \cdot 125 = 2000$
7.	Записать ответ	Существует 2000 способов

Пример № 3.13. Сколькими способами из 36 человек из четырех коллективов (в каждом коллективе по 9 человек: директор, его заместитель, бухгалтер, менеджер, и обычные специалисты) можно выбрать пять человек случайным образом, так, чтобы среди них было бы точно два директора, один заместитель, и один человек из первого отдела?

Решение. Так как задача нестандартная, будем рассуждать.

Прочитайте внимательно требование задачи. Надо рассмотреть три возможных случая.

1. Если среди пяти человек заместитель будет из первого отдела. Тогда выбор пяти человек будет осуществляться следующими способами:

Заместитель из первого отдела – 1 способ.

Два директора – 3 способа (перебираем отделы: 2+3, 2+4, 3+4 отдел).

Остальные два специалиста, не являющиеся заместителями и директорами, и не работающие в первом отделе – всего 21 человек. Сколькими способами можно из 21 человека выбрать два.

Выборка без повторения, неупорядоченная – Сочетания без повторения.

Произведем подсчет по формуле: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{21!}{2!19!} = 210$ способов.

По принципу произведения: $1 \cdot 3 \cdot 210 = 630$.

2. Среди пяти выбранных человек есть директор из первого отдела.

Директор из первого отдела – 1 способ.

Второй директор – 3 способа (из трех любых отделов).

Заместитель – 3 способа (из трех любых отделов).

Остальные два специалиста, не являющиеся заместителями и директорами, и не работающие в первом отделе (всего 21 человек) – 210 способов.

По принципу произведения: $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 210 = 1890$.

3. Среди пяти выбранных человек нет директора и его заместителя из первого отдела.

Два директора выбираются 3-мя способами.

Один заместитель – 3 способа.

Сотрудника первого отдела – 7 способов (он не директор и не его заместитель).

Сотрудник любого отдела, не являющийся заместителем или директором, и не работающий в первом отделе – 21 способ.

По принципу произведения: $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 21 = 1323$.

4. Общее число выбора пяти сотрудников, удовлетворяющих заявленным требованиям, по принципу суммы, составит: 630+1890+1323=3843.

Задание № 3.6. Решить следующие задачи, подробно комментируя решения.

1. Сколькими способами можно распределить поровну 12 различных подарков между четырьмя сотрудниками?
2. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найдите число таких номеров, если используются 24 буквы русского алфавита и 10 цифр.
3. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «огород» так, чтобы три буквы «о» не стояли рядом?
4. В магазине продаются 100 книг, в том числе 5 бракованных, куплено 5 книг. Сколько может быть таких покупок, в которых содержаться 3 бракованные книги?
5. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 5 можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6?
6. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 5 юношей и 5 девушке так, чтобы они чередовались?
7. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?
8. В кондитерской имеется 4 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 8 пирожных?
9. Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?
10. Сколькими способами можно разложить 9 книг на 4 бандероли по 2 книги и 1 бандероль в 1 книгу?

Индивидуальное задание № 3

№	**Решить следующие задачи, подробно описывая каждый этап решения.**
1.	1. Сколькими способами можно переставить буквы слова «факультет», таким образом, чтобы две буквы «т» шли подряд? 2. Имеются 48 задач по теории вероятностей. Сколькими способами их можно распределить между 13 студентами для самостоятельного решения по 4 задачи каждому?
2.	1. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «интернирование», так чтобы согласные и гласные чередовались и гласные шли в алфавитном порядке? 2. Для участия в эстафете выбраны пять девушек и трое юношей. Необходимо разбить их на 2 команды по 4 человека так, чтобы в каждой команде было хотя бы по одному юноше. Сколькими способами это можно сделать?

3.	1. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «парламент», согласные идут в алфавитном порядке, гласные – в порядке, обратном данному? 2. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдцев и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки разные). Сколькими способами можно накрыть стол для чаепития, если каждый получит одну чашку, блюдце и ложку?
4.	1. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «диктатура», чтобы как гласные, так и согласные идут в алфавитном порядке? 2. Для шести менеджеров проводится психологический тренинг в течение нескольких дней. Каждый день их объединяют в группы по три человека. Сколькими способами можно сделать так, чтобы состав группы не повторялся?
5.	1. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «передел», так чтобы в начале и конце слова стояла согласная буква? 2. Сколькими способами можно расставить 8 спортсменов на трех дорожках бассейна?
6.	1. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «белиберда», так чтобы между буквами «б» стоит блок из четырех гласных? 2. Сколькими способами 10 пассажиров можно разместить на 20 местах автобуса?
7.	1. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт, так чтобы в этом наборе было точно 1 король, 2 дамы, 1 пиковая карта? 2. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 4?
8.	1. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт, так чтобы в этом наборе было точно 1 крестовая карта, 2 дамы, нет червей? 2. Сколько трехцветных узоров можно составить из цветов радуги?
9.	1. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт, так чтобы в этом наборе было точно 2 дамы, 1 бубновая, 1 пиковая дама? 2. Сколькими способами 85 студентов-первокурсников могут быть распределены по трем группам?
10.	1. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт, так чтобы в этом наборе было точно 1 туз, 3 дамы, не больше 2 карт красной масти? 2. Сколькими способами 8 команд могут разыграть комплект медалей?

ЗАНЯТИЕ 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В школьном курсе Вы познакомились с различными методами решения уравнений и неравенств. На этом занятии мы познакомимся с отдельным классом уравнений и неравенств, которые часто встречаются в математических моделях социогуманитарных объектов – системой линейных уравнений и системой линейных неравенств.

Введем некоторые обозначения и сокращения.

Матрицей размера $m \times n$ называется *прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов.* Обозначается

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, или $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$, где a_{ij} - элемент матрицы A, стоящий в i-ой строке и j-м столбце $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \right)$. Каждый элемент матрицы однозначно определяется своими индексами.

Пример № 4.1. Предположим, Вам надо математически описать следующую ситуацию. В трех разных центрах ведут прием психологи, оказывающие одноименные услуги. Удобно представить их в виде таблицы.

Услуга / Центр	Психолого-педагогическая диагностика готовности к школе	Нейропсихологическая диагностика состояния высших психических функций на данный момент и потенциал развития	Диагностика эмоциональной сферы ребенка (тревожность, страхи, агрессия)	Комплексная психодиагностика нарушений развития
«Здоровье»	500	750	1000	1000
«Гармония»	700	800	750	750
«Эврика»	1000	1000	850	850

Для проведения математических расчетов, таблицу с данными необходимо представить, как математический объект, допускающий арифметические, алгебраические или геометрические преобразования.

Такой объект и называется матрицей, в данном примере матрица выглядит вот так $A = \begin{pmatrix} 500 & 750 & 1000 & 1000 \\ 700 & 800 & 750 & 750 \\ 1000 & 1000 & 850 & 850 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$

Матрицы бывают квадратные, диагональные, ступенчатые, единичные, треугольные.

Над матрицами можно выполнять действия сложения, вычитания, умножения, транспонирования по определенным правилам[2].

Пример № 4.2. В двух городах имеется, соответственно, 5 и 6 тонны товара, который необходимо доставить в две торговые точки. Известно, что в первую торговую точку необходимо перевезти 3 тонны, а во вторую - 7 тонн груза. Определить план перевозок (количество товара, перевезенного из каждого города в каждую торговую точку).

---

[22] Подробнее действия с матрицами рассмотрим на последнем занятии

Решение.

Обозначим через x – количество товара, перевезенного из первого города в первую торговую точку, y - количество товара, перевезенного из первого города во вторую торговую точку, z - количество груза, перевезенного из второго города в первую торговую точку и t - количество груза, перевезенного из второго города во вторую торговую точку. Данные запишем в таблицу:

Город	Торговая точка		Запас товара в городе
	A	B	
I	x	y	5
II	z	t	6
Потребность в товаре	3	7	

Составим систему уравнений, учитывая, что весь груз должен быть вывезен со складов, и потребности в грузе каждой торговой точки удовлетворены:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ z + t = 6, \\ x + z = 3, \\ y + t = 7. \end{cases}$$

Таким образом, решение этой задачи свелось к решению системы четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Такие системы Вы еще не решали. Как думаете сколько решений имеет такая система?

На практике встречаются системы с большим количеством уравнений и переменных. Разработана математическая теория решения таких систем. В общем виде *система m линейных уравнений с n неизвестными* имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1j} \cdot x_j + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2j} \cdot x_j + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ij} \cdot x_j + \ldots + a_{in} \cdot x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mj} \cdot x_j + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \end{cases}$$

Система линейных уравнений может быть представлена в матричной форме, для этого введем обозначения.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

где A – матрица, составленная из коэффициентов при переменных, называемая *матрицей системы*,

B – *вектор-столбец свободных членов* (правых частей системы),

X – *вектор-столбец переменных*,

$\tilde{A}$ - *расширенная матрица системы*, состоящая из коэффициентов при неизвестных и правых частей уравнений системы.

Так как число столбцов матрицы системы $A_{m\times n}$ равно числу строк вектора неизвестных $X_{n\times 1}$, то их произведение есть вектор - столбец:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Элементами полученной матрицы являются правые части вектора–столбца свободных членов B системы уравнений. На основании определения равенства векторов систему линейных уравнений можно записать в виде: $A \cdot X = B$.

Решением системы линейных уравнений называется такая совокупность n чисел $x_1, x_2, ... x_n$, при подстановке которых в каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система линейных уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной,*** если она не имеет решений.

Система линейных уравнений называется ***определенной***, если она имеет ровно одно решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Существует несколько основных методов решения систем линейных уравнений, которые мы не будем рассматривать в нашем курсе.

Пример № 4.3.

1. Распишите систему уравнений, записанной в свернутом виде

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad (i = \overline{1,3}). \qquad \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + a_{14} \cdot x_4 = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 = b_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 = b_3. \end{cases}$$

2. Напишите систему уравнений в матричной форме: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_3 = 7, \\ -7x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \textit{матрица коэффициентов}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \textit{матрица неизвестных}; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \textit{столбец свободных членов}$$

3. Система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ является совместной и определенной, так как она имеет единственное решение $x_1 = 1, x_2 = 1$.

4. Система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ является совместной и неопределенной, так как она имеет более одного (а точнее, множество) решений $x_1 = 2 - t, x_2 = t$, где t – любое действительное число.

5. Система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ является несовместной, так как она не имеет решений.

6. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ методом подстановки.

Решение. Давайте выразим из первого уравнения одну переменную и подставим ее во второе и третье уравнение, должна получиться система из двух уравнений, которую Вы решать умеете. Проследите внимательно за преобразованиями в системе.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 + x_3, \\ -(2 - 2x_2 + x_3) + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 4(2 - 2x_2 + x_3) - x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 + x_3, \\ 3x_2 + 2x_3 = 12, \\ -9x_2 + 3x_3 = -9. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 + x_3, \\ 3x_2 + 2x_3 = 12 & |\cdot(-3) \\ -9x_2 + 3x_3 = -9 & |\cdot(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 + x_3, \\ x_3 = \dfrac{12 - 3x_2}{2}, \\ -9x_2 - 18x_2 = -36 - 18. \end{cases} \to \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_3 = \dfrac{12 - 3x_2}{2} = 3, \\ x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 - 2 \cdot 2 + 3 = 1. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Сделайте проверку.

Задание № 4.1.

1. Распишите систему уравнений $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad (i = \overline{1,4})$.

2. Напишите систему уравнений в матричной форме: $\begin{cases} 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 0,2x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_3 = 10. \end{cases}$

3. Определите является ли система уравнений совместной / несовместной, определённой / неопределённой:

$$a)\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}; \quad b)\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}y = 0 \end{cases}; \quad c)\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 5y = -8 \end{cases}.$$

4. Решить методом подстановки систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Для понимания необходимости привлечения систем линейных уравнений обратимся к следующей, всем хорошо известной, ситуации.

Пример № 4.4. В магазине продавались пирожки за 5 руб., бублики за 6 руб., булки за 7 руб., слойки за 8 руб., коржики 10 руб. Группа ребят купила на 100 руб. 14 изделий разных сортов. Сумма цен изделий равна 21 рубль. Сколько каких изделий куплено, если известно, что никаких изделий не было куплено больше 7 и никаких не было куплено поровну?

Решение.

1. Поиск решения: Введем переменные, обозначающие количество каждого изделия. Необходимо составить несколько систем уравнений.

2. Условие «Сумма цен изделий равна 21 рубль» обозначает, что всего возможно два случая:

а) были куплены только пирожки, бублики и коржики;

б) были куплены только бублики, булки и слойки.

3. Обозначим:

x – количество пирожков,
y – количество бубликов,

z – количество булок,
u – количество слоек,
v – количество коржиков.

4. Из условий «группа ребят купила 14 изделий по 100 рублей» при условиях, что никакого изделия не было куплено поровну и каждого куплено не больше семи, составим уравнения и неравенства для случаев а) и б).

$$(a)\begin{cases} x+y+v=14 \\ 5x+6y+10v=100 \\ x\le 7, y\le 7, v\le 7 \\ x\ne y\ne v \end{cases} \qquad (б)\begin{cases} y+z+u=14 \\ 6y+7z+8u=100 \\ z\le 7, y\le 7, u\le 7 \\ z\ne y\ne u \end{cases}.$$

5. Рассмотрим первую систему. Методом исключения неизвестной получим:

$$\begin{cases} x+y+v=14 \\ 5x+6y+10v=100 \end{cases} \to y+5v=30 \to y=30-5v.$$

Методом подбора найдем возможные наборы x, y, v:

v	y	
1	25	не удовлетворяет условиям
2	20	
3	15	
4	10	
5	5	

Таким образом, первая система не имеет решения.

6. Рассмотрим вторую систему.

$$\begin{cases} y+z+u=14 \\ 6y+7z+8u=100 \end{cases} \to \ z+2u=16 \ \to \begin{cases} z=16-2u \\ y=14-z-u \end{cases}.$$

Методом подбора найдем возможные наборы y, z, u:

u	z	y	
1	14	1	не удовлетворяет условиям
2	12	0	
3	10	1	
4	8	2	
5	6	3	+
6	4	4	–
7	2	5	+

Ответ. Таким образом задача имеет два решения: было куплено либо 3 бублика, 6 булок, 5 слоек, либо 5 бубликов, 2 булки и 7 слоек.

Задание № 4.2. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4» и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делилось на 10, а число «пятерок» было четным. Определить, сколько каких оценка получила группа.

Пример № 4.5. Саша и Костя вместе работают над проектом 35 часов. Костя и Наталья вместе могут выполнить этот же проект за 63 рабочих часа. Саша и Наталья выполнят этот проект за 45 рабочих часов. Сколько дней им понадобится, чтобы завершить проект, работая всем вместе?

Решение. 1) Для того, чтобы математически описать ситуацию, введем обозначения. Пусть x_i - объем работы который выполняет каждый за 1 час, т.е.

x_1 - объем работы, которую выполняет Саша за 1 час;

x_2 - объем работы, которую выполняет Костя за 1 час;

x_3 - объем работы, которую выполняет Наталья за 1 час.

Весь объем работы по проекту мы обозначим за 1.

2) По формуле $A = Pt$ (согласно которой вся работа есть произведение производительности (сколько выполняется работы в час), на время, затрачиваемое для выполнения всей работы) запишем данные в задаче.

"Саша и Костя вместе работают над проектом 35 часов" означает, что $(x_1 + x_2) \cdot 35 = 1$.

"Костя и Наталья вместе могут выполнить этот же проект за 63 рабочих часа" записывается как $(x_2 + x_3) \cdot 63 = 1$.

"Саша и Наталья выполнят этот проект за 45 рабочих часов" – $(x_1 + x_3) \cdot 45 = 1$.

3) Таким образом, получаем систему уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) \cdot 35 = 1 \\ (x_2 + x_3) \cdot 63 = 1. \\ (x_1 + x_3) \cdot 45 = 1 \end{cases}$$

4) Решим ее разными методами на 10 занятии, а пока используем хитрый прием. Обратите внимание на условие задачи: "чтобы завершить проект, работая всем вместе", очевидно не нужно находить x_1, x_2, x_3, а нужно найти их сумму, что мы и сделаем. Следите внимательно за преобразованиями.

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) \cdot 35 = 1 \\ (x_2 + x_3) \cdot 63 = 1 \\ (x_1 + x_3) \cdot 45 = 1 \end{cases} \to \left.\begin{cases} (x_1 + x_2) = \dfrac{1}{35} \\ (x_2 + x_3) = \dfrac{1}{63} \\ (x_1 + x_3) = \dfrac{1}{45} \end{cases}\right| + \to x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_1 + x_3 = \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{45}.$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{15} \to (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{30} \to (x_1 + x_2 + x_3) \cdot 30 = 1.$$

Таким образом втроем за 30 рабочих часов они вместе выполнят проект. Но вопрос задачи стоит несколько иначе. Сколько дней сотрудникам понадобится на выполнение проекта? Естественно у Вас возникает сомнение, что понимать под «днем»? В этом случае Вы можете дать свой ответ. Например, при восьмичасовом рабочем дне, сотрудникам понадобится 4 рабочих дня для выполнения проекта.

Задание № 4.3. Семья состоит из мужа, жены и их сына-студента. Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 37,5 %. Если бы зарплата мужа уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 39 %. Опишите математически эту ситуацию.

Индивидуальное задание № 4

1.Что такое матрица? Могут ли все элементы матрицы равняться нулю? Приведите примеры разных видов матриц.

2. Верно ли что единичная матрица – это такая матрица, у которой все элементы равны 1?

3. Какие действия над матрицами можно выполнять? Приведите примеры.

4. Запишите в матричной форме систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 0,5x_4 = -24, \\ 5x_5 - x_2 - x_4 - 2x_3 - 1,5x_1 = 4, \\ \sqrt{3}x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10, \\ 3x_5 - 2,5x_4 + x_1 = 14, \\ x_2 + x_1 - x_3 + x_5 = -5. \end{cases}$$

5. Какая система уравнений называется совместной?

6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие совместности системы линейных уравнений?

7. При каком условии квадратная система линейных уравнений имеет единственное решение?

8. Может ли однородная система уравнений быть несовместной?

9. Какой из наборов является решением системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_1 = 10,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1 \\ x_1 = 8,\ x_2 = 5,\ x_3 = 2 \\ x_1 = 3,\ x_2 = -4,\ x_3 = 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 21, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -9, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Методом исключения неизвестных решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

11. Составить систему линейных уравнений по условиям следующей задачи. Загадали три числа и попросили трех человек выполнить с этими числами арифметические действия. Сергей умножил первое число на два, вычел утроенное второе число и прибавил третье число, умноженное на 4, получив в ответе пять. Анна от первого числа отняла второе и прибавила удвоенное третье, получив в ответе тройку. Петр умножил первое число на 7, прибавил удвоенное второе число и вычел третье, получив в итоге 0.

ЗАНЯТИЕ 5. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Настоящее занятие будет посвящено самому важному понятию математики «функция». Вы уже знаете элементарные и трансцендентные функции, знаете их свойства и схемы построения графиков функций.

На занятии мы рассмотрим несколько важных понятий, которые тесно связаны с понятием функции, такие как предел функции, непрерывность функции, точки разрыва, производная функции. Рассмотрим общий алгоритм для построения графиков функций.

Пусть заданы два множества X и Y и каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, который обозначается через $f(x)$. Тогда говорят о том, что на множестве X задана **функция одной переменной** $f(x)$ и пишут: $f : X \to Y \left(y = f\left(x\right)\right)$.

Под **графиком функции** будем понимать геометрическое место точек плоскости, декартовы прямоугольные координаты которых, удовлетворяют соотношению $y = f\left(x\right)$.

Пример № 5.1. Зададим функцию между множествами в каждом случае.

1) Пусть задано множество натуральных чисел X и множество квадратов натуральных чисел Y. Для того чтобы каждому элементу одного множества поставить в соответствие элементы другого множества, введем вот такое правило: каждый элемент x множества X возведем в квадрат и запишем функцию $f : X \to Y$ следующим образом: $y = x^2$.

2) Магазин получил 32 пачки учебников русского языка, по 8 штук в каждой, и десять пачек учебников математики. Сколько учебников в магазине. Очевидно, что дать привычный однозначный ответ не получится, поэтому рассмотрим два множества – множество учебников по математике X и множество учебников в магазине Y. Тогда функция, выражающая количество учебников в магазине будет задаваться следующим образом: $y = 32 \cdot 8 + 10 \cdot x$, где x – количество учебников в одной пачке.

Как Вы знаете существует три способа задания функции: аналитический, табличный и графический. Полезно уметь переходить от одного способа к другому.

Задание № 5.1. Построить графики функций:

$$a)\ y = 1 - 2x,\ \ b)\ y = x^2 - 5x + 6,\ \ c)\ y = 2^x,\ \ d)\ y = \frac{1}{x-1}.$$

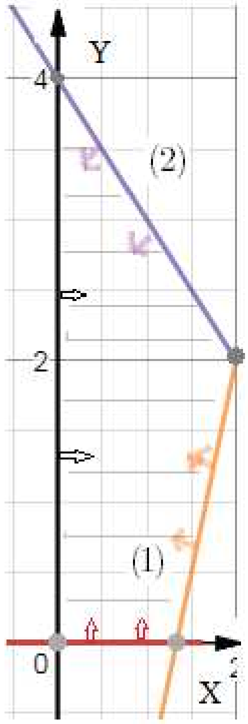
Пример № 5.2.

В некоторых задачах прикладного характера бывает необходимо найти множество точек, удовлетворяющее системе линейных неравенств. Это удобно сделать с помощью построения графиков функций. Рассмотрим пример.

Решить систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} y \ge 3x - 4 & (1) \\ y \le 4 - x & (2) \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

1) Сначала разбираемся с простейшими неравенствами. Неравенства $x \geq 0, y \geq 0$ определяют первую координатную четверть, включая границу из координатных осей. На чертеже сразу отмечаем стрелочками соответствующие полуплоскости.



2) Для нахождения решения неравенства $y \geq 3x-4$, построим прямую $y = 3x-4$, на рисунке она обозначена (1). Какая полуплоскость удовлетворяет неравенству $y \geq 3x-4$ легко проверить подставив в неравенство две точки следующим образом.

$A(0,0) \to y \geq 3x-4 \;\to\; 0 \geq 0-4 \;\to\; 0 \geq -4$ – верное неравенство. Решением неравенства будет левая полуплоскость от прямой (1). Обращаю внимание, что при подстановке координат точки $B(4,0) \to y \geq 3x-4 \;\to\; 0 \geq 12-4 \;\to\; 0 \geq 8$ получается неверное неравенство, что говорит о том, что «правая полуплоскость» не является решением неравенства.

3) Для нахождения решения неравенства $y \leq 4-x$, построим прямую $y = 4-x$, на рисунке она обозначена (2). Какая полуплоскость удовлетворяет неравенству $y \leq 4-x$ легко проверить подставив в неравенство две точки следующим образом.

$D(0,0) \to y \leq 4-x \;\to\; 0 \leq 4-0 \;\to\; 0 \leq 4$ – верное неравенство. Решением неравенства будет левая полуплоскость от прямой (2). Убедимся, что при подстановке координат точки $\mathrm{D}(3,4) \to y \geq 4-x \;\to\; 4 \geq 4-3 \;\to\; 4 \geq 1$ получается неверное неравенство, что говорит о том, что «правая полуплоскость» не является решением неравенства.

Область решений системы представляет собой четырехугольник, на чертеже он обведён жирными линиями. Любая точка данного многоугольника удовлетворяет КАЖДОМУ неравенству системы (проверьте).

Задание № 5.2. Решить систему неравенств $\begin{cases} x \geq 0, \quad x \leq 4, \\ 2y-8+x \leq 0, \\ 2y+8-x \geq 0. \end{cases}$

В изучении функций и их приложений важное место занимает понятие «предела», означающее что какая-то переменная, зависящая от другой переменной, при определенном изменении последней, неограниченно приближается к некоторому постоянному значению.

Для того, чтобы было понятно, что такое предел функции, рассмотрим несколько примеров.

Пример № 5.3. Пусть заданы функции, построим таблицы их значений.

1) $y = \dfrac{1}{x}$

Чем больше становится значение x, тем меньше – значения y.

Математически это записывается так: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

x	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
y	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001

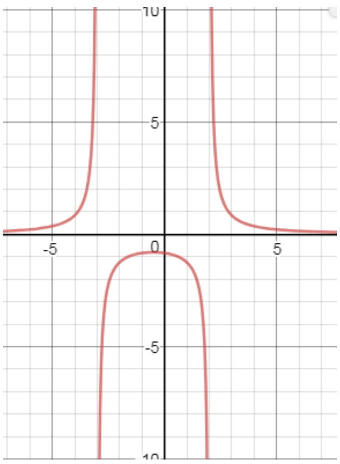
Чем меньше становится значение x, тем больше – значения y.

Математически это записывается так: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
y	1	10	100	1000	10000	100000	1000000

2) $y=\frac{5}{x^2+x-6}$. Функция не определена в точках $x_1=-3$, $x_2=2$, но определена «вблизи» этих точек. Математически это записывается следующим образом.

x	-4	-3,5	-3,1	-2,9	-2	0	1	1,5	1,9	2,2
y	0,8	1,8	9,8	-4,51	-1,2	-0,83	-1,2	-2,2	-4,51	4,8



$\lim\limits_{x\to -3-0}\frac{5}{x^2+x-6}=+\infty$, если функция стремится к точке $x_1=-3$ «со стороны минус бесконечности», то значения функции будут стремится к «плюс бесконечности», т.е. чем ближе х «подходит к -3», тем больше становится значение y.

$\lim\limits_{x\to -3+0}\frac{5}{x^2+x-6}=-\infty$, если функция стремится к точке $x_1=-3$ «со стороны нуля», то значения функции будут стремится к «минус бесконечности», т.е. чем ближе х «подходит к -3 со сторону нуля», тем меньше становится значение y.

Таким образом говорят об односторонних пределах и обозначают их математически так: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(\mathrm{x})$ - правосторонний предел, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(\mathrm{x})$ - левосторонний предел.

Примечание: строго говоря, такой подход с построением последовательностей из нескольких чисел некорректен, но для понимания простейших примеров вполне подойдет. Также обратите внимание на следующее замечание. Даже если дан предел с большим числом вверху (с миллионом, например): $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000000}{x}$, то все равно $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000000}{x}=0$, так как рано или поздно «икс» примет такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними будет самым настоящим микробом.

Ряд пределов функций можно найти с помощью небольших алгебраических преобразований функций способом простой подстановки.

Пример № 5.4. Найти пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(3-1)}=\frac{1}{2}$;

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2x-3}{x^2}}{\frac{x^2+2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=0\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0+0}{1+0}=1$$

Задание № 5.3. Найти пределы функций:

$$1)\ \lim_{x\to -5}\frac{x+5}{x^2-x-20};\qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{x^2-1}.$$

В школьном курсе Вы имели дело с непрерывными функциями, т.е. такими график которой можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги. Однако таких функций не много и интерес представляют функции, имеющие разрывы.

Под ***непрерывной функцией*** в точке x_0 будем понимать такую функцию, предел которой в данной точке равен значению функции в этой точке $\lim_{x\to x_0} f(\mathrm{x}) = f(x_0)$.

Определение детализируется в следующих условия:

1) Функция должна быть определена в точке x_0, то есть должно существовать значение $f(x_0)$.

2) Должен существовать общий предел функции $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim_{x\to x_0} f(\mathrm{x}) = f(x_0)$.

Если нарушено хотя бы одно из трех условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке x_0 и говорят, что функция терпит разрыв в этой точке.

Пример № 5.5. Выяснить, непрерывна ли функция $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ в точке $x_0=3$.

Проверим выполнение всех трех условий.

1. Функция не определена в точке $x_0=3$, т.к. знаменатель обращается в ноль.

Следовательно, функция не является непрерывной в точке $x_0=3$.

Задание № 5.4. Выяснить, непрерывна ли функция $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+15}$ в точке $x_0=5$.

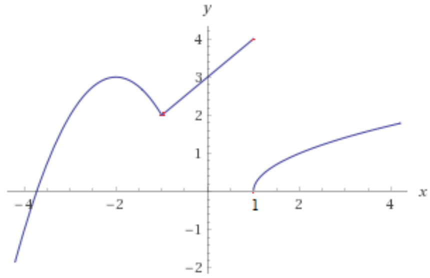
Пример № 5.6. Рассмотрим кусочную функцию и построим ее график:

$$f(x)=\begin{cases}-(x+2)^2+3, & x\le -1,\\ x+3, & -1<x<1,\\ \sqrt{x-1}, & x\ge 1.\end{cases}$$

Определим непрерывна ли функция в точках $x=-1$ и $x=1$, проверив три условия. Сначала возьмем точку $x=-1$.

1) $f(-1)=2$ – функция определена в точке $x=-1$.

2) Вычислим односторонние пределы (слева у нас парабола, справа – прямая линия): $\lim_{x\to -1-0}\left(-(x+2)^2+3\right)=2, \lim_{x\to -1-0}\left(x+3\right)=2$, т.е. общий предел существует и он равен значению этой функции в точке $x=-1$.следовательно, функция непрерывная в точке $x=-1$.



Рассмотрим поведение функции в точке $x=1$.

1) $f(1)=0$ – функция определена в точке $x=1$.

2) Вычислим односторонние пределы (слева задана – прямая линия, справа- график корня степени два): $\lim\limits_{x\to 1-0}(x+3)=4$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\sqrt{x}-1\right)=0$, т.е. пределы существуют, но они не равны между собой. Следовательно, функция терпит разрыв в точке $x=1$.

Задание № 5.5. Определить, является ли функция непрерывной и построить ее график:

$$1)\ y=3-\frac{x^2+3x}{x+3},\quad 2)\ y=\begin{cases}x^2-2x+1, x\ge 0\\ x-1, x<0\end{cases}.$$

Пример № 5.7. Схема полного исследования функции $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ и построения ее графика.

Обобщим Ваши знания и умения по теме функции, их свойства и графики.

I. Найдем область определения функции, то множество допустимых значений аргументов, для которых формула дает действительное значение для функции. В задание функции входит дробь, а, следовательно, знаменатель отличен от нуля: $1-x^2\ne 0\to x\ne \pm 1$.

Таким образом функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, кроме точек $x=-1$, $x=1$.

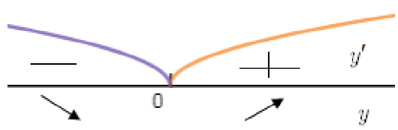
II. Проверим, является ли функция четной или нечетной: $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{1-(-x)^2}=\dfrac{x^2}{1-x^2}=y(x)$. Функция четная, следовательно, ее график будет симметричен относительно оси OY.

III. Найдем промежутки возрастания и убывания функции с помощью производной: $y'=\dfrac{2x(1-\mathrm{x}^2)-\mathrm{x}^2(-2\,\mathrm{x})}{\left(1-x^2\right)^2}=\dfrac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$. Приравняем к нулю и получим единственную критическую точку: $y'=0\ \to\ 2x=0\ \to\ x=0$.

Функция убывает на промежутке $x\in(-\infty,0)$.

Функция возрастает на промежутке $x\in(0,+\infty)$.

В точке $x=0$ функция равна нулю.



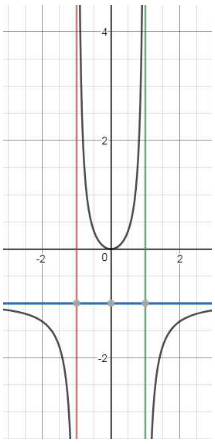
IV. Определим поведение функции вблизи точек $x=-1$, $x=1$. Как видно из задания, функция в этих точках не определена, а, следовательно, терпит разрыв. Но вблизи этих точек, она принимает вполне конкретные значения. Посчитаем односторонние пределы для каждой точки.

$$\lim_{x\to -1-0}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to -1+0}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)=-\infty.$$

V. Найдем дополнительные точки, принадлежащие графику функции.

x	-2	-1,5	-1,1	-0,9	-0,5
y	-1,33	-1,8	-5,7	4,2	0,33

VI. Построим график функций по всем его найденным свойствам:



1) На интервале $x \in (-\infty, -1)$ функция убывает тем быстрее, чем ближе x «подходит» к -1.

2) На интервале $x \in (-1, 0]$ функция убывает до нуля включительно.

3) Пользуясь свойствами симметричности графика относительно оси ОУ, делаем вывод, что функция возрастает на интервале $x \in [0,1)$, значения функции тем больше, чем ближе x «подходит» к 1. На интервале $x \in (1, +\infty)$ функция возрастает. По мере увеличения x функция приближается к значению 1, но никогда его не достигнет.

4) Обратим внимание, что $y \neq -1$ (Подумайте почему!?)

С учетом дополнительных точек, получаем вот такой замечательный график функции $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

Задание № 5.6. Исследовать функцию и построить ее график $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Индивидуальное задание № 5

Решить следующие задачи, подробно описывая каждый этап решения.

Вариант	Задание № 1. Исследовать функцию и построить ее график.		
1.	$y = \dfrac{1 - x^2}{x - 2}$	2.	$y = x + \dfrac{1}{x}$
3.	$y = \dfrac{4 - x^2}{x + 3}$	4.	$y = x^2 + \dfrac{1}{x}$
5.	$y = \dfrac{x}{x - 1}$	6.	$y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
7.	$y = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$	8.	$y = \dfrac{1}{x} - x$
9.	$y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$	10.	$y = \dfrac{x}{4 - x^2}$

ЗАНЯТИЕ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

В исследовании гуманитарных объектов часто возникает необходимость найти наилучшее решение. Рассмотрим серию задач, в которых составление функции и ее применение помогает в поиске ответа на вопрос задачи. Начнем с простого примера применения функции и ее свойств.

Пример. В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом – 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение.

I. Анализ. По условию задачи, задано два множества – множество девочек в первом классе и во втором. Введем переменную x – девочек попало в меньший класс, тогда (25 – x) девочек – в больший класс. Речь идет о проценте девочек, т.е. об отношении количества девочек в каждом классе к общему количеству человек. Надо описать сумму этих процентов.

II. Решение. Суммарная доля девочек в двух классах равна

$$f(x)=\frac{x}{22}+\frac{25-x}{23}\rightarrow f(x)=\frac{x}{506}+\frac{25}{23},\quad 2\le x\le 22\,.$$

Составленная функция $f(x)$ есть линейная возрастающая функция.

Своего наибольшего значения она достигает на правом конце промежутка, т.е. при $x=22$.

III. Ответ. Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из девочек, а в большем классе должно быть 3 девочки и 20 мальчиков.

п. 1. Задачи, решаемые с помощью нахождения производной функции одной переменной

Пример № 6.1. Сумма двух целых чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

Решение.

1) Пусть x – первое число. (24-x) – второе число. Произведение обозначим за переменную $y=x\cdot(x-24)$.

2) Найдем наименьшее значение функции $y=x\cdot(x-24)=x^2-24x$.

$$y'=2x-24\ \rightarrow\ 2x-24=0\ \rightarrow\ x=12\,.$$

3) Произведение двух чисел будет наибольшим, если эти числа равны 12.

$12\cdot 12=144$,

4) Сделаем проверку: $13\cdot 11=143$,

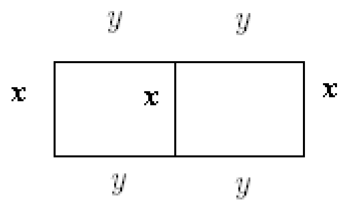
$14\cdot 10=140$...

Задание № 6.1. Разность двух чисел равна 98. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

Пример № 6.2. Вы строите два дома на одном участке площадью 294 м^2, требуется сначала огородить участок забором, а затем разделить этот участок на две равные части. Вы же хотите сэкономить, поэтому узнайте, при каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

Решение:

I. Анализ условия. Участок прямоугольный, разделенный на две равные части. Введем обозначения как на рисунке. Пусть х – ширина, 2у – длина участка. Необходимо найти наименьшее значение периметра получившейся фигуры (прямоугольников с одной границей).



II. Поиск решения. Выразим периметр фигуры через переменные x и y, а затем выразим через формулу площади прямоугольника переменную x через переменную y. Так, чтобы появилась зависимость между периметром фигуры и его шириной.

III. Решение.

1. Периметр фигуры $P = x + x + x + y + y + y + y = 3x + 4y$.

2. Площадь прямоугольника $S = x \cdot 2y = 294 \to y = \dfrac{294}{2x} = \dfrac{147}{x}$.

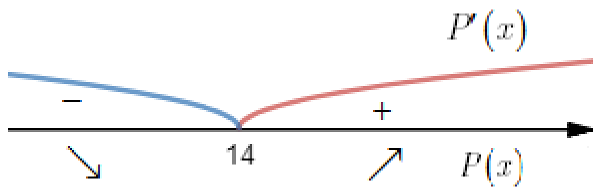
3. Подставим y в формулу периметра и преобразуем получившиеся выражение $P = 3x + 4 \cdot \dfrac{147}{x} = \dfrac{3x^2 + 588}{x} \to P(x) = \dfrac{3x^2 + 588}{x}$.

4. Получили функцию одной переменной $P(x)$. Найдем при каком х, функция принимает наименьшее значение.

4.1. Находим производную функции $P'(x) = \dfrac{6x \cdot x - (3x^2 + 588)}{x} = \dfrac{3x^2 - 588}{x}$.

4.2. Приравниваем производную функции к нулю и решаем получившиеся уравнение $\dfrac{3x^2 - 588}{x} = 0 \to x^2 - 196 = 0 \to x_{1,2} = \pm 14$.

4.3. Корень $x = -14$ не подходит по условию задачи.



Определим, принимает ли функция наименьшее значение при $x = 14$. Подставим точки $x = 10$ и $x = 15$ в производную, получим

$$P'(10) = \frac{3 \cdot 10^2 - 588}{10} = -28{,}8 < 0, \quad P'(15) = \frac{3 \cdot 15^2 - 588}{15} = 5{,}8 > 0.$$

В точке $x = 14$ функция принимает свое наименьшее значение.

4.4. Найдем значение функции в точке $x = 14$: $P(14) = \dfrac{3 \cdot 14^2 + 588}{14} = 84$.

5. Найдем длину участка $2y = \dfrac{294}{14} = 21$.

IV. Ответ. При размерах участка 14×21 длина забора будет минимальной.

Задание № 6.2. Нужно огородить спортивную площадку прямоугольной формы забором 200 м^2. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наименьшей?

Пример № 6.3. Вы являетесь владельцем двух фирм в разных городах (например, рекламное агентство). Фирмы выполняют абсолютно одинаковые услуги, однако в фирме, расположенной во втором городе, используются более совершенное оборудование для печати.

В результате, если сотрудники первой фирмы трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они выполняют t заказов, если сотрудники второй фирмы трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они так же выполняют t заказов.

За каждый час работы Вы платите сотруднику 1000 руб. Необходимо, чтобы за неделю суммарно выполнялось 20 заказов. Какую наименьшую сумму в неделю придется Вам тратить на оплату труда сотрудников?

Решение.

I. Анализ условия. Речь идет о двух переменных: количество заказов в одной фирме и количество заказов в другой фирме. Оплата зависит от количества выполненных заказов. Очевидно, надо составить функцию, по которой можно вычислить оплату труда сотрудников в зависимости от количества выполненных заказов.

II. Поиск решения. 1) Введем переменные и математически опишем связывающие их условия. Пусть $x \in N$ заказов выполняет первая фирма; $y \in N$ – вторая.

Всего должно выполняться 20 заказов: $x + y = 20$.

2) Доля человеко-часов в первой фирме $4x^3$, во второй – y^3.

3) В неделю Вы будете тратить $S = 1 \cdot (4x^3 + y^3)$ тыс. руб.

Необходимо путем подстановки получить функцию одной переменной и исследовать ее на наименьшее значение.

III. Решение.

1. Выразим y через x и подставим в выражение для S следующим образом:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ S = 1 \cdot (4x^3 + y^3) \end{cases} \to \begin{cases} y = 20 - x, \quad 0 \le x \le 22 \\ S = 4x^3 + (20 - x)^3 \end{cases}.$$

2. Найдем наименьшее значение функции $S = 4x^3 + (20 - x)^3$ на отрезке [0,20].

$$S'(x) = 12x^2 - 3(20 - x)^2 = 9x^2 + 120x - 1200 \to S'(x) = 0$$

$$9x^2 + 120x - 1200 = 0 \leftrightarrow 3x^2 + 40x - 400 = 0 \leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{3} = \frac{-20 \pm 40}{3}.$$

Определим, принимает ли функция наименьшее значение при $x = \frac{20}{3}$. Подставим точки $x = 6$ и $x = 7$ в производную, получим

$$S'(x) = 9 \cdot 36 + 120 \cdot 6 - 1200 = -156 < 0; \; S'(x) = 9 \cdot 49 + 120 \cdot 7 - 1200 = 81 > 0.$$

3. Точка $x = \frac{20}{3}$ является точкой минимума функции. Однако, x – это натуральное число, поэтому подставим в $S(x) = 1 \cdot (4x^3 + y^3)$ два значения $x = 6$ и $x = 7$.

$S(6) = (4 \cdot 6^3 + (20-6)^3) = 864 + 2744 = 3608$ (тысяч рублей);

$S(7) = (4 \cdot 7^3 + (20-7)^3) = 1372 + 2197 = 3569$ (тысяч рублей).

IV. Ответ. Искомая сумма 3569 000 рублей.

Задание № 6.3. Вам поручается исследование 100 анкет детей и выделяется на это 10000 рублей. Но из этой суммы вычитается 400 рублей за каждый час исследования. Вы заключаете договор с образовательным центром, по которому они получают премию в $100v$ рублей, где $v = \dfrac{кол-во\ \ анкет}{час}$ – скорость исследования. При какой скорости Вы получите максимальную прибыль, и какова величина этой прибыли?

п.2. Задачи, решаемые с помощью линейных неравенств

Пример № 6.4. Вы купили здание и собираетесь открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 м^2 и номера «люкс» площадью 45 м^2. Общая площадь, которую можно отвести под номера составляет 981 м^2. Вы можете распределить эту площадь под номера, как хотите. Обычный номер будет приносить отелю 2000 руб. / сутки, а номер «люкс» – 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму Вы сможете заработать в своем отеле?

I. Анализ условия и поиск решения.

1. В условии задачи речь идет о двух объектах – «стандартные номера» и «номера люкс», которые связаны суммарной площадью. Введем переменные:

x – количество номеров площадью 27 м^2,

y – количество номеров площадью 45 м^2.

2. По условию, x номеров площадью 27 м^2, и y номеров площадью 45 м^2, не должны превышать 981 м^2. Математически это запишется так:

$$27x + 45y \le 981 \to 3x + 5y \le 109.$$

3. Общая прибыль будет складываться из суммы $2000x + 4000y$. Прибыль будет наибольшей и при значении $s = (x + 2y)$

Необходимо найти при каких x и y эта сумма будет максимальной.

II. Решение. *{Такой тип задачи решается с помощью специальных методов и относится к разделу «линейное программирование»}.*

1) Рассмотрим систему $\begin{cases} 3x + 5y \le 109, \\ s = x + 2y. \end{cases}$ Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = s - 2y \\ 3(s - 2y) + 5y \le 109 \end{cases} \to \begin{cases} x = s - 2y, \\ 3s \le y + 109. \end{cases}$$

2) Анализируя последнее неравенство $3s \le y + 109$ можно сделать вывод, что чем больше y, тем больше s.

3) Сколько останется свободного пространства, если все номера сделать «люксами»? Поделим 981 м^2 на 45 м^2, получим $981 = 45 \cdot 21 + 36$, для получения наибольшей прибыли необходимо открыть 21 номер «люкс» и один стандартный, которые будут приносить Вам доход $2000 \cdot (1 + 2 \cdot 21) = 86$ тыс. руб. в сутки. При этом останется 9 м^2 незанятого пространства.

4) Уменьшим на 1 количество номеров «люкс»: $981 = 45 \cdot 20 + 27 \cdot 3$. Подсчитаем Вашу прибыль в сутки, если в отеле 20 номеров «люкс» и три стандартных номера, незанятого пространства не остается: $2000 \cdot 3 + 4000 \cdot 20 = 86$ тыс. руб.

5) Уменьшим еще на один количество номеров «люкс»: $981 = 45 \cdot 19 + 27 \cdot 4 + 18$. Как видим, незанятого пространства осталось 18. Ожидаемая прибыль: $2000 \cdot 4 + 4000 \cdot 19 = 84000$ руб. соответственно меньше.

IV. Ответ. В отеле должно быть как можно больше номеров «люкс» и тогда ожидаемая прибыль будет 86 000 руб.

Задание № 6.5. В коллективе 46 человек: 34 мужчины и 12 женщин. Их необходимо распределить по двум группам численностью 22 и 24 человека, так чтобы в каждой группе была хотя бы одна женщина. Каким должно быть распределение по группам, чтобы сумма чисел, равных процентным долям женщин в первой и второй группах, была наибольшей?

Пример № 6.6. Мебельная фабрика выпускает три вида мягкой мебели – диваны, кресла и пуфики. Производственные мощности фабрики позволяют выпускать в день 60 диванов или 150 кресел, или 350 пуфиков. По требованиям к ассортименту, которые предъявляют торговые сети, диванов должно выпускаться не менее 25 шт., пуфиков не менее 40 шт., а кресел ровно в два раза больше, чем диванов. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена фабрики за единицу изделия каждого вида.

Вид изделия	Себестоимость, 1 шт.	Отпускная цена, за 1 шт.
диван	9000 руб.	12600 руб.
кресло	4000 руб.	5950 руб.
пуфик	1250 руб.	2000 руб.

Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), определите, сколько изделий каждого вида следует выпускать фабрике ежедневно, чтобы ее прибыль была как можно больше?

Решение.

I. Анализ условия и поиск решения.

1. По условию задачи речь идет о трех взаимосвязанных объектах: количестве каждого вида мягкой мебели, производственные мощности фабрики на выпуск одной продукции, прибыль от реализации каждого вида продукции.

2. Введем обозначения:

x – число выпускаемых фабрикой диванов ($x \geq 25$);

y – число выпускаемых фабрикой пуфиков ($y \geq 40$).

$2x$ – число выпускаемых фабрикой кресел.

3. Опишем математически производственные мощности фабрики:

На выпуск одного дивана затрачивается $\frac{1}{60}$ производственной мощности;

на выпуск одного пуфика – $\frac{1}{150}$; на выпуск одного кресла – $\frac{1}{350}$.

Сумма производственных мощностей, затрачиваемых на выпуск x диванов, 2x кресел и y пуфиков не может превосходить полной мощности фабрики, т.е.

$$\frac{x}{60} + \frac{2x}{150} + \frac{y}{350} \leq 1.$$

4. Прибыль всей фабрики будет вычисляться как сумма прибыли от каждой единицы товара. Опишем математически прибыль фирмы от реализации каждого вида товаров.

$(12600-9000)\cdot x = 3600x$ – прибыль от реализации диванов,

$(5950-4000)\cdot 2x = 3900x$ – прибыль от реализации кресел,

$(2000-1250)\cdot y = 750y$ – прибыль от реализации пуфиков.

Прибыль от всей продукции будет вычисляться по формуле:

$$S = 3600x + 3900x + 750y \;\to\; S = 750\cdot(10x+y).$$

Задача свелась к нахождению натуральных x и y, удовлетворяющие системе условий:

$$\begin{cases} S = 750\cdot(10x+y) \to \max \\ \dfrac{x}{60} + \dfrac{2x}{150} + \dfrac{y}{350} \le 1, \\ x \ge 25,\ y \ge 40. \end{cases}$$

II. Решение.

1. Преобразуем правую часть второго неравенства:

$$\frac{x}{60} + \frac{2x}{150} + \frac{m}{350} = \frac{3x}{100} + \frac{y}{350} = \frac{105x+10y}{3500}.$$

2. Упростим второе неравенство и выразим y через x:

$$\frac{x}{60} + \frac{2x}{150} + \frac{m}{350} \le 1 \;\to\; 105x + 10y \le 3500 \;\to\; y \le \frac{3500-105x}{10}.$$

3. Из условия $y \ge 40$ найдем область допустимых значений переменной x:

$$\frac{3500-105x}{10} \ge 40 \to 3500 - 105x \ge 400 \to -105x \ge -3100 \to x \le 29{,}52.$$

4. Переменная x принимает только целые положительные значения, т.е.

$$25 \le x \le 29.$$

5. По формуле $y \le \dfrac{3500-105x}{10}$ можем найти соответствующие значения y.

6. По формуле $S = 750\cdot(10x+y)$ можем найти прибыль. Без потери смысла можем находить прибыль по более упрощенной формуле $\tilde{S} = 10x + y$.

7. Представим в таблице расчеты

x	$y = \left[\dfrac{3500-105x}{10}\right]$ - целая часть числа	$\tilde{S} = 10x+y$ ожидаемая прибыль
$x_1 = 25$	$y = \left[\dfrac{3500-105x}{10}\right] = \left[\dfrac{3500-105\cdot 25}{10}\right] = [87{,}5] = 87$	$\tilde{S}_1 = 10\cdot 25 + 87 = 337$
$x_2 = 26$	$y = \left[\dfrac{3500-105x}{10}\right] = \left[\dfrac{3500-105\cdot 26}{10}\right] = [77] = 77$	$\tilde{S}_1 = 10\cdot 26 + 77 = 337$
$x_3 = 27$	$y = \left[\dfrac{3500-105x}{10}\right] = \left[\dfrac{3500-105\cdot 27}{10}\right] = [66{,}5] = 66$	$\tilde{S}_3 = 10\cdot 27 + 66 = 336$
$x_4 = 28$	$y = \left[\dfrac{3500-105x}{10}\right] = \left[\dfrac{3500-105\cdot 28}{10}\right] = [56] = 56$	$\tilde{S}_4 = 10\cdot 28 + 56 = 336$
$x_5 = 29$	$y = \left[\dfrac{3500-105x}{10}\right] = \left[\dfrac{3500-105\cdot 29}{10}\right] = [45{,}5] = 45$	$\tilde{S}_5 = 10\cdot 29 + 45 = 335$

5. Сравнивая между собой значения $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{S}_4, \tilde{S}_5$, видим, что наибольшее возможное значение равно 337 и достигается при x=25, y=87 и x=26, y=77.

III. Ответ. Оптимальных производственных планов два:

– диванов 25 штук, пуфиков 87 штук, кресел 50 штук;

– диванов 26 штук, пуфиков 77 штук, кресел 52 штуки.

Задание № 6.6. Средство для очистки пола оценивают по следующим трем показателям: очищающие свойства, дезинфицирующие свойства, раздражающее воздействие на кожу. Каждый из этих показателей оценивается по шкале от 0 до 100 единиц. Фирма планирует выпуск на рынок новой марки очистителя, который будет является смесью трех компонент – A, B, C. В данной ниже таблице приведены характеристики каждой из этих компонент. Вы хотите, чтобы новый очиститель по каждому из показателей имел не менее 70 единиц. В какой пропорции следует смешать компоненты A, B, C, чтобы раздражающее воздействие на кожу такого очистителя было минимальным?

Вид компоненты	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие
A	90	60	60
B	70	80	50
C	50	40	30

Индивидуальное задание № 6

Решить следующие задачи, подробно описывая каждый этап решения

Вариант № 1. Накануне Нового года Деды Морозы раскладывали равными количествами конфеты в подарочные пакеты, а эти пакеты складывали в мешки, по 2 пакета в один мешок. Те же самые конфеты они могли разложить в пакеты так, что в каждом из них было бы на 5 конфет меньше, чем раньше, но тогда в каждом мешке стало бы лежать по 3 пакета, а мешков при этом потребовалось бы на 2 меньше. Какое наибольшее количество конфет могли раскладывать Деды Морозы?

Вариант № 2. В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом – 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Вариант № 3. Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Какого будет это наименьшее расстоянию?

Вариант № 4. Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние.

Вариант № 5. Предприятию поручается погрузка 100 стаканов и выделяется на это 1000 рублей. Но из этой суммы вычитается 40 рублей за каждый час погрузки. Предприятие заключает договор с бригадой грузчиков, по которому они получают премию в 10 v рублей, – $v = \dfrac{кол-во\ стаканов}{час}$ скорость погрузки. При какой скорости предприятие получит максимальную прибыль, и какова величина этой прибыли?

Вариант № 6. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в стуки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Вариант № 7. Жительница деревни выращивает огурцы на собственном приусадебном участке. Затем весь урожай огурцов она реализует на городском рынке. Известно, что рыночная цена на огурцы установилась на уровне 20 рублей за 1 кг. Зависимость общих издержек выращивания огурцов (C) от количества выращенных огурцов (Q) задается следующей функцией: $C(Q) = 4 + 12Q + \frac{1}{5}Q^2$. Сколько килограмм огурцов нужно собрать с участка, чтобы получить максимальную прибыль?

Вариант № 8. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Вариант № 9. Допустим, что все затраты фирмы определяются только расходами на оплату труда работников. Все остальные ресурсы остаются постоянными. Еженедельный выпуск продукции Q(шт.) зависит от количества нанятых рабочих L (чел.) следующим образом: $Q(L) = -3L^2 + 606L$. Недельная ставка заработной платы каждого нанятого рабочего равна 120$. Производимый товар фирма реализует на конкурентном рынке по цене 20$ за единицу товара. Если фирма нанимает работников на конкурентном рынке, то сколько рабочих необходимо нанять владельцу, чтобы получить максимальную прибыль? Какое количество продукции в неделю произведут эти работники?

Вариант № 10. Баржа грузоподъемностью 134 тонны перевозит контейнеры типов А и В. Количество загруженных на баржу контейнеров типа В не менее чем на 25 % превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляет 2 тонны и 5 млн руб., контейнера типа В – 5 тонн и 7 млн руб. соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн руб.) всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

ЗАНЯТИЕ 7. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ

В школьном курсе математики Вы познакомились с детерминированным подходом к описанию объектов окружающего мира, согласно которому существуют жесткие связи между явлениями и событиями. Эти связи представлены в форме законов физики, химии, математики, так, что складывается впечатление, что все события предопределены и закономерны. Но окружающий нас мир полон случайностей. Это – землетрясения, ураганы, подъемы и спады экономического развития, войны, болезни, случайные встречи и так далее. Впрочем, мысль о том, что в окружающем мире много случайного, останется очевидной, но бесплодной, если не научиться измерять случайность числом и составлять приближенные прогнозы случайных событий. Вероятность – это числовая характеристика возможности появления некоторого определённого события в цепи событий, могущих повторяться неограниченное число раз.

Парадокс Монти Холла. Вы – участник игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор? «Нет» – отвечает большинство людей. А как думаете Вы?

На занятии рассмотрим несколько алгоритмов решения задач на нахождение вероятности случайных событий.

п.1. Предварительные замечания

Событие называется ***случайным***, если при некотором комплексе условий оно может либо произойти, либо не произойти.

Под словом «*испытание*» будем понимать любое действие, измерение, опыт, при котором случайное событие может произойти или не произойти. Результаты испытания будем называть *исходами*.

Пример № 7.1. В следующих задачных ситуациях сформулируйте испытание и случайные события, которые могут произойти в результате испытания.

1. На клавиатуре телефона 10 цифр (от 0 до 9). Вы случайно называете одну цифру.

Ответ: Случайные события: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Всего случайных событий десять.

2. В случайном эксперименте монета подбрасывается два раза.

Ответ: Случайные события: {орел, орел}, {орел, решка}, {решка, орел}, {решка, решка}.

3. Из колоды, содержащей 36 карт, наугад извлекается одна карта (две карты).

Ответ. Очевидно, исходом является появление одной из карт. Всего случайных событий 36. А вот второй случай интереснее. Сколько различных наборов из двух карт может получится?

На этом этапе нужно научиться распознавать комбинаторную задачу. Переформулируем ее, вспомнив алгоритм решения комбинаторных задач:

Сколькими способами из 36 карт можно выбрать 2 карты?

Решение.

1) Множество n=36.

2) Выборка m=2, неупорядоченная, без повторения → Сочетания б/п

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

3) $C_{36}^2 = \frac{36!}{2!(36-2)!} = \frac{34!\cdot 35\cdot 36}{2!\cdot 34!} = 630$.

4) Таким образом существует 630 случайных событий, обозначающих две карты из 36.

Задание № 7.1. В следующих задачных ситуациях сформулируйте испытание и случайные события, которые могут произойти в результате испытания.

1. В случайном эксперименте монету бросают три раза.
2. Вася, Петя, Коля и Леша для дежурства распределяются по парам.
3. В случайном эксперименте бросают два игральных кубика.
4. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия из нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой.
5. Производится турнирный футбольный матч между двумя командами.
6. Вы наудачу называете два однозначных числа, которые в сумме дают двенадцать.
7. Баскетболист производит два броска мяча в корзину.
8. Наудачу извлеченная буква полного алфавита – гласная.

п.2. Классическое определение вероятности случайного события

Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания; m – количество элементарных исходов, ***благоприятствующих*** событию A.

Пример № 7.2. На четырёх карточках написаны числа 1, 2, 3 и 4. Какова вероятность того, что сумма чисел на трех произвольно выбранных карточках делится на три?

Решение.

1. Сформулируем испытание: из четырёх карточек выбираем три.
2. Сформулируем исходы испытания: наборы из трех карточек (123), (124), (134), (234), всего n=4.
3. Сформулируем событие А: сумма чисел на трех карточка делится на три.
4. Определим благоприятствующие события: число делится на три тогда и только тогда, когда сумма всех его чисел делится на три (123), (234), т.е. m=2.

5. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = 0,5$.

6. Вероятность того, что сумма чисел на трех произвольно выбранных карточках делится на три, равна 0,5.

Задание № 7.2. Из полной игры лото, транслирующийся по первому каналу в 10.00 каждый день, ведущий извлекает один бочонок. На бочонках написаны числа от 1 до 100. Какова вероятность того, что выпадет бочонок с цифрой кратной трем?

Пример № 7.3. Вам надо сформировать из пятнадцати мальчиков и пяти девочек команду в составе четырех человек. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажутся два мальчика и две девочки?

Формулируем испытание	Из 20 человек выбирают четыре человека
Определяем все случайные события и их число	Распознаем комбинаторную задачу: Сколькими способами можно из 20 выбрать 4? 1. Задано множество $\tilde{n}$[3]=20. 2. Выборка $\tilde{m} = 4$ неупорядоченная и без повторения → Сочетания б/п $C_{\tilde{n}}^{\tilde{m}} = \frac{\tilde{n}!}{\tilde{m}!(\tilde{n} - \tilde{m})!}$. 3. $C_{20}^{4} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{16! \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{16! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845$. 4. Количество случайных событий n= 4845.
Проверяем, что испытание одно, все события равновозможные и независимые друг от друга	Один раз формируют группу, в группу может попасть каждый ребенок, следовательно? События независимы и равновозможные.
Сформулируем событие, вероятность которого надо найти	Событие А: В группе две девочки и два мальчика.
Определяем число m благоприятствующих событий	Распознаем комбинаторную задачу: Сколькими способами из 15 мальчиков можно выбрать 2 и из 5 девочек можно выбрать 2? Рассуждения аналогичные первому пункту, приводят к сочетанию без повторения. Заметим, что в условии комбинаторной задачи есть логическое «и», которое мы опишем с помощью произведения. $C_{15}^{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 13!} = 105$, $C_{5}^{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3!} = 10$ $m = C_{15}^{2} \cdot C_{5}^{2} = 1050$

[3] Обращаю внимание, что одной буквой обозначаются разные объекты. Будьте внимательны!!! Для удобства в некоторых задачах на вычисление вероятностей, n и m будем обозначать следующим образом: $\tilde{n}, \tilde{m}$.

Вычислим вероятность по формуле $P(A)=\frac{m}{n}$	$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1050}{4845}=0,217$.
Запишем ответ	Вероятность того, что в составе команды из четырех человек окажутся два мальчика и две девочки равна 0,2.

Задание № 7.3. Группа из 25 человек принимает участие в корпоративном мероприятии. Пять человек умеют петь, четыре – танцевать. На конкурс надо выбрать четыре человека. Какова вероятность того, что в группе из четырех человек будет два «певца» и два «танцора»?

Пример № 7.4. Вы забыли пинкод своей пластиковой карты. Какова вероятность правильно набрать пинкод, если Вы помните, что пинкод – это пятизначное число, составленное из цифр 0,1,2,3,5 и число делится на 4?

Решение.

1. Формулируем испытание: наудачу называем пятизначное число.

2. Пусть $xyzab$ - пятизначное число. Число всех чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 5 будет равно $n=4\cdot 5^4$ (т.к. x может принимать все значения, кроме нуля, а все остальные цифры могут повторяться).

3. Подсчитаем число благоприятствующих событий. Число делится на 4 тогда и только тогда, последние две цифры образуют двузначное число, делящееся на 4. Числа вида: $xyz12, xyz32, xyz52, xyz20, xyz00$. Пятизначных чисел такого вида можно составить $m=5\cdot 4\cdot 5^2$.

4. Вычислим вероятность по формуле $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{500}{2500}=0,2$.

Задание № 7.4. Из 60 вопросов, включенных в собеседование, вы можете ответить на 50. Какова вероятность того, что из трех предложенных Вы ответите точно на два?

п.3. Нахождение вероятности сложного события

Под ***сложным событием*** будем понимать наблюдаемое событие, выраженное через другие наблюдаемые в том же эксперименте события с помощью допустимых алгебраических операций.

Суммой A+B случайных событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из них. Для того, чтобы определить, что речь идет о сумме случайных событий, надо в условии выделить логическое «или».

Произведением AB случайных событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошли оба события.

Противоположными событиями называют два единственно возможных события, сумма вероятностей которых равна 1: $P(A)+P(\overline{A})=1$

Во многих задачах приходится находить вероятность события В при условии, что произошло некоторое другое событие А. Такую вероятность называют ***условной*** и обозначают $P\left(B_{/A}\right)$.

Пример № 7.5. Вы проводите собеседование независимых друг от друга кандидатов на работу в виде теста. Вероятность того, что первый кандидат пройдет собеседование равна 0,4. Для каждого последующего кандидата, вероятность увеличивается на 0,1. Какова вероятность того, что успешно пройдут собеседование два кандидата из трех?

Решение.

1. Формулируем испытание	Три кандидата проходят тестирование
2. Формулируем события из условия задачи	Событие A_1: первый прошел тестирование Событие A_2: второй прошел тестирование Событие A_3: третий прошел тестирование
3. Сформулируем событие В, вероятность которого нужно найти, и составим его формулу	$B = A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2A_3$
4. Определяем, совместны или несовместные события, зависимы или независимы события, входящие в формулу	События независимые и несовместные
5. Составляем формулу для вычисления вероятности искомого события	$P(B) = p(A_1)\cdot p(\overline{A}_2)\cdot p(A_3) +$ $+p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A}_3) + p(\overline{A}_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)$
6. Вычисляем все вероятности, входящие в формулу, и посчитаем вероятность по формуле	$p(A_1) = 0,4, \;\; p(\overline{A}_1) = 0,6$ $p(A_2) = 0,5, \;\; p(\overline{A}_2) = 0,5$ $p(A_3) = 0,6, \;\; p(\overline{A}_3) = 0,4$ $P(B) = 0,4\cdot 0,5\cdot 0,6 + 0,4\cdot 0,5\cdot 0,4 +$ $+0,6\cdot 0,5\cdot 0,4 = 0,32$
7. Сформулируем ответ.	Вероятность того, что два из трех кандидатов получат работу равна 0,38.

Задание № 7.5. В двух коробках лежат карандаши одинаковой величины и формы, но разного цвета. В первой коробке 4 красных и 6 черных, а во второй 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают наугад по одному карандашу. Какова вероятность того, что оба карандаша окажутся красными?

Пример № 7.6. В большой фирме 21 % работников получают высокую зарплату. Известно, что 40 % работников – женщины, а 6,4 % работников – женщины, получающие высокую зарплату. Можем ли мы утверждать, что на фирме существует дискриминация женщин в оплате труда?

Решение.

I. Анализ задачи. Дано: 21% сотрудников с высокой зарплатой, 40% - женщины, 6,4 % – женщины с высокой зарплатой. Требуется установить: Чему равна вероятность того, что случайно выбранный сотрудник будет женщиной с высокой зарплатой?

II. Поиск плана. Задача относится к разделу случайные события. Проводится одно испытание, имеющее сложный исход: выбранный работник женщина, выбранный работник имеет высокую зарплату. Следовательно, задача относится к «Алгебре событий».

III. Осуществление плана.

Испытание: Случайным образом выбирается работник.

Событие А: сотрудник имеет высокую зарплату.

Событие В: сотрудник – женщина.

События А и В зависимы. Составляем формулу: $P(AB) = P(B)P(A / B)$. Определим известные величины из условия: *P(AB)=6,4 %=0,064, P(A)=0,21, P(B)=0,4*. Следовательно, искомой величиной будет *P(A/B).* Найдем ее из формулы: $P(A / B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0,064}{0,4} = 0,16$.

IV. Сформулируем ответ. Поскольку *P(A/B)=0,16* меньше, чем P(A)=0,21, то можно утверждать, что женщины, работающие в фирме, имеют меньше шансов получить высокую зарплату по сравнению с мужчинами.

Задание № 7.6. Какова вероятность того, что Вы отгадаете пинкод не более, чем с третьей попытки?

Пример № 7.7. Вы знаете ответы на 15 экзаменационных билетов из 20. В каком случае вы имеет большую вероятность сдать экзамен: если идете отвечать первым, если – вторым, если третьим?

1. Формулируем испытание	Вам достается один билет из 20.
2. Формулируем события из условия задачи	Событие А: взяли первый билет Событие В: взяли второй билет Событие С: взяли третий билет
3. Посчитаем вероятность события А	$P(A) = \dfrac{15}{20} = 0,75$
4. Посчитаем вероятность события В	Событие *B* зависит от того, какой билет был взят до Вас. Вы не знаете какой билет взяли до Вас, следовательно, нужно рассмотреть два случая: взяли билет, который вы знаете или который не знаете. $P(B) = \dfrac{15}{20} \cdot \dfrac{14}{19} + \dfrac{5}{20} \cdot \dfrac{15}{19} = 0,75$
5. Подсчитаем вероятность события С	До Вас взяли два билета, и Вы не знаете какие. Нужно рассмотреть четыре случая. Введем обозначения и запишем формулу. Событие C_1: взяли первый билет, который Вы знаете. Событие $\overline{C}_1$: взяли первый билет, который Вы не знаете. Событие C_2: взяли второй билет, который Вы знаете. Событие $\overline{C}_2$: взяли второй билет, который Вы не знаете.

	$P(C) = P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P\left(C /_{C_1C_2}\right) + P\left(\bar{C}_1\right) \cdot P(C_2) \cdot P\left(C /_{\bar{C}_1C_2}\right) +$ [4] $+ P(C_1) \cdot P\left(\bar{C}_2\right) \cdot P\left(C /_{C_1\bar{C}_2}\right) + P\left(\bar{C}_1\right) \cdot P\left(\bar{C}_2\right) \cdot P\left(C /_{\bar{C}_1\bar{C}_2}\right)$ $P(C) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} + \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} + \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{14}{18} + \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{15}{18} = 0,05$
5. Ответ.	Как видно из полученных результатов, вероятность идти первым или вторым значительно выше.

Задание № 7.7. В коробке имеются 2 красных карандаша, 3 синих и 2 зеленых карандаша. Из нее наудачу без возращения вынимают один за другим по одному карандашу. Найти вероятность того, что красный карандаш появится раньше синего.

п.4. Нахождение полной вероятности события

Если испытание представимо в виде двух действий, сначала происходит одно действие и за ним следует выполнение другого, и случайное событие следует в результате такой последовательности действий, то речь идет о полной вероятности случайного события. Для распознавания такого типа задач, необходимо испытание сформулировать в виде «сначала ..., потом ...». Для нахождения полной вероятности случайного события используется формула.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) p(A / H_i).$$

Распишем формулу для $i=2$, $i=3$.

$$P(A) = p(H_1)\, p(A / H_1) + p(H_2)\, p(A / H_2).$$

$$P(A) = p(H_1)\, p(A / H_1) + p(H_2)\, p(A / H_2) + p(H_3)\, p(A / H_3).$$

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $P(A) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса: $P(H_i / A) = \frac{P(H_i) P(A / H_i)}{P(A)}$.

Пример № 7.8. В двух коробках находятся лотерейные билеты. В первой коробке 10 билетов, из них 2 выигрышных, во второй коробке 20 билетов, из них четыре – выигрышных. Из каждой коробки был взят один билет, а затем Вы из этих двух выбрали один билет. Найти вероятность того, что этот билет выигрышный.

Решение.

1. Формулируем испытание	**Сначала** выбираем одну коробку, **потом** билет.
2. Формулируем события из первой части испытания	H_1: выбираем первую коробку; H_2: выбираем вторую коробку. $P(H_1) = \frac{1}{2}$, $P(H_2) = \frac{1}{2}$, $P(H_1) + P(H_2) = 1$

[4] Внимательно разберитесь с формулой и входящими в нее слагаемыми.

3. Сформулируем событие, происходящее при второй части испытания, и составим формулу полной вероятности	Событие А: билет выигрышный. Вероятность события А подсчитывается как вероятность того, что выигрышный билет или из первой коробки или из второй. Запишем формулу для вычисления: $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_1)$.
4. Посчитаем вероятность события А	$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{20}=0,2$
5. Ответ.	Вероятность того, что билет выигрышный равна 0,2.

Задание № 7.8. На карточках написаны буквы слова «инстаграмм», но две карточки из этого набора утеряны. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что на ней окажется согласная буква?

Пример № 7.9. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 66% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительны.

1. Формулируем испытание	Сначала пациент заболевает гепатитом, потом он сдает анализ
2. Формулируем события H_i, происходящие при первой части испытания	H_1: пациент болен гепатитом. H_2: пациент не болен гепатитом $P(H_1)=0,66,\quad P(H_2)=0,34$
3. Формулируем событие, вероятность которого нужно найти, и составим формулу	Событие А: анализ дает положительный результат $P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/_{H_1}\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/_{H_2}\right)$
4. Найдем условные вероятности $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$	$P\left(A/_{H_1}\right)=0,9,\ \ P\left(A/_{H_2}\right)=0,02$
5. Посчитаем событие А по формуле полной вероятности.	$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/_{H_1}\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/_{H_2}\right)=$ $=0,66\cdot 0,9+0,34\cdot 0,02=0,6$
5. Запишем ответ	Вероятность получения положительного анализа на гепатит равна 0,6.

Задание № 7.9. Имеются три партии телефонов одинаковой марки, насчитывающих соответственно 20, 30 и 40 штук. Вероятности того, что телефон проработает заданное время, равны соответственно для этих партий 0,7, 0,8 и 0,9.

Известно, что выбранный наудачу комиссией телефон проработал заданное время. Какова вероятность того, что этот телефон принадлежит первой партии?

Пример № 7.10. Психолог тестирует учеников по трем тестам. У него имеется следующая информация по предыдущему тестированию. Из 27 учеников, показавших удовлетворительные результаты, шесть были отличниками, и было трое учеников, являвшихся неуспевающими. Психолог, проводивший тестирование в прошлый раз, полагает, что отличники пройдут все три теста с вероятностью 80 %, остальные успевающие ученики – с вероятностью 60 % и неуспевающие – с вероятностью 20 %. Случайно протестированный ученик успешно прошел все три теста. Какова вероятность того, что он: а) отличник, б) успевающий ученик, в) неуспевающий ученик?

Решение. Проведем анализ условия и сделаем выводы из каждого условия.

1. Сколько человек всего? На сколько групп можно разделить всех учеников?

Всего 30 человек. Распределим их на три группы: «отличники» – 6 учеников; «хорошисты» – 21 ученик; «неуспевающие» – 3 ученика.

2. Сформулируем два испытания по условию задачи.

Испытание № 1 (было ранее): психолог выбирал группу, затем тестировал студента.

Испытание № 2. (сейчас): психолог тестирует студента, потом определяет его группу.

3. Рассмотрим случайные события, происходившие при первом испытании. Сначала выбирают ученика из одной из групп:

Событие H_1: ученик из «отличников».

Событие H_2: ученик из «хорошистов».

Событие H_3: ученик из «неуспевающих».

Вероятности этих событий вычисляются по формуле $P(A)=\frac{m}{n}$:

$$P(H_1)=\frac{6}{30}=0,2,\;\; P(H_2)=\frac{21}{30}=0,7,\;\; P(H_3)=\frac{3}{30}=0,1/$$

Проверим, что сумма найденных вероятностей будет равна 1 (это означает, что ученик либо отличник, либо хорошист, либо неуспевающий, четвертого не дано):

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=0,2+0,7+0,1=1.$$

4. Затем ученик проходит три теста.

Формулируем событие А: ученик успешно выполнил все три теста (нас интересует только это событие). Ученик может быть из первой, или второй, или третьей группы. Математически это запишется с помощью понятия условная вероятность: $P(A/H_1)=0,8,\;\; P(A/H_2)=0,6,\;\; P(A/H_3)=0,2$.

Найдем вероятность события А по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3).$$

$$P(A)=0,2\cdot 0,8+0,7\cdot 0,6+0,1\cdot 0,2=0,6.$$

5. В результате второго испытания, психолога интересует событие: ученик, который успешно прошел три теста из группы «отличников». Математически это будет записано так: $P(H_1/A)$. Найдем вероятность этого события:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,8}{0,6} = 0,26 .$$

6. Найдем вероятность того, что ученик, который успешно прошел тест, из группы «хорошистов»:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot 0,6}{0,6} = 0,7 .$$

7. Найдем вероятность того, что ученик, который успешно прошел тест, из группы «неуспевающих»:

$$P(H_3 / A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A / H_3)}{P(A)} = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,6} = 0,03 .$$

8. Записываем ответ: вероятность того, что ученик, который успешно прошел тестирование из первой группы равна 0,26; из второй – 0,7, из третьей – 0,03.

Задание № 7.10. В коллективе 30 человек: 20 женщин и 10 мужчин. Не сдали вовремя работу 4 женщины и 4 мужчины. Анонимно опрошенный человек не сдал вовремя работу. Какова вероятность, что это был мужчина?

п.5. Вычисление вероятности события в схеме Бернулли

Иногда приходится рассматривать задачи, в которых проводятся повторные, независимые друг от друга испытания, имеющие только два противоположных исхода, вероятность наступления которых постоянна. Например, десять раз кидают мяч в корзину; дают однозначный ответ (да/нет) на двадцать вопросов; проверяют 100 лотерейных билетов; проверяют на испорченность 250 коробок с яблоками; проверяют книгу, содержащую 300 страниц на наличие опечаток.

Будем рассматривать три типа задач, которые подчиняются схеме Бернулли (испытания независимы друг от друга, каждое испытание имеет два исхода, вероятность появления события в каждом испытании постоянна и равна р)[5].

Пример № 7.11. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету лотереи равна 0,2. Какова вероятность того, что из шести приобретенных билетов два билета окажутся выигрышными?

Решение.

1. Формулируем испытание: проводится 6 повторных независимых испытаний, имеющих два исхода - билет выигрышный или билет невыигрышный.

2. Формулируем событие А: билет выигрышный. $P\left(A\right) = 0,2 = p$, $P\left(\overline{A}\right) = 0,8 = q$.

3. Определяем тип задачи по требованию задачи: определить вероятность того, что при n=6 независимых испытаниях событие А произойдет ровно m= 2 раз: $P_4(A = 2) - ?$ (Тип 1).

4. Выпишем формулу и подставим в нее значения из условия задачи

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} .$$

[5] Алгоритмы и формулы для вычисления вероятностей событий, удовлетворяющих Схеме Бернулли приведены на стр.

$$P_6(2)=C_6^2\cdot(0,2)^2\cdot(0,8)^{6-2}=\frac{6!}{2!4!}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4\approx 0,246\,.$$

5. Запишем ответ: вероятность того, что два билета из шести окажутся выигрышными равна 0,246.

Задание № 7.11. Для данного баскетболиста вероятность попасть мячом в корзину равна 0,3. Какова вероятность, что при шести бросках три будут попаданиями, если броски считать независимыми?

Пример № 7.12. Вы отправили 4000 электронных писем. Вероятность того, что Вы ошиблись адресом, равна 0,0005. Какова вероятность неполучения писем тремя адресатами?

Решение.

1. Формулируем испытание: проверяется 4000 электронных писем (доставлены или нет). Испытания повторные, независимые друг от друга.

2. Формулируем событие А: электронное письмо не доставлено. $P(A)=0,0005=p,\quad P(\overline{A})=0,9995=q$.

3. Определяем тип по требованию задачи: определить вероятность того, что при n=4000 независимых испытаниях событие А произойдет ровно m = 3 раз: $P_{4000}(A=3)-?$ (Тип 1).

4. Выпишем формулу и подставим в нее значения из условия задачи

$$n\geq 10\rightarrow\lambda=np=2\leq 10\ \rightarrow P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\,.$$

$$P_{4000}(3)\approx\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0,1804\,.$$

5. Запишем ответ: Вероятность того, что три письма не будут доставлены равна 0,18.

Задание № 7.12. Найдите вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Пример № 7.13. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз?

Решение.

1. Формулируем испытание: проводятся 100 испытаний. Испытания повторные, независимые друг от друга.

2. Вероятность события А: $P(A)=0,8=p,\quad P(\overline{A})=0,2=q$.

3. Тип 2: определить вероятность того, что при n=100 независимых испытаниях событие А произойдет от m = 75 раз до m=90: $P_{4000}(75\leq A\leq 90)-?$

4. Выпишем формулу и подставим в нее значения из условия задачи. Так как промежуток большой $m\subset[75,\,90]$, то $P_{100}(75\leq m\leq 90)=\Phi(t_2)-\Phi(t_1)$.

$$t_2=\frac{b-np}{\sqrt{npq}}=\frac{90-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{10}{4}=2,5,\quad t_1=\frac{a-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{-5}{4}=-1,25\,.$$

По статистической таблице для функции Лапласа, получим, что

$$\Phi(2,5) = 0,4938; \quad \Phi(-1,25) = -0,3944.$$

5. Вычислим искомую вероятность

$$P_{100}(75 \le m \le 90) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

6. Запишем ответ. Вероятность того, что событие А произойдет от 75 до 90 раз равна 0,89.

Задание № 7.13. Рекламной фирмой в типографии было заказано 1000 листовок. Вероятность того, что листовка будет испорчена, равна 0,0001. Вычислить вероятность того, что будет испорчено не более двух процентов листовок.

Пример №7.14. При приеме на работу Вам предлагают пройти тестирование из шестидесяти вопросов, на каждый вопрос приведено четыре ответа, один из которых правильный. Какова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан на 21 вопрос?

Решение. Случай первый.

1. Сформулируем испытание: соискатель отвечает на 60 вопросов.

2. Сформулируем событие А: при простом угадывании, дал правильный ответ.

3. Проверим схему Бернулли: проводится 60 испытаний, каждое испытание имеет два исхода, вероятность появления события в каждом испытании постоянна $P(A) = 0,25$, $P(\bar{A}) = 0,75$.

4. Определим тип задачи: Какова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан на 21 вопрос? (Тип 1)

5. Подставим данные условия задачи в следующие формулы.

$$n \ge 10 \to \lambda = np = 15 \;\to P_n(m) \approx P\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{npq}},$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{21 - 15}{\sqrt{60 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx 2,09,$$

$$P_{60}(A = 21) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{(2,09)^2}{2}}}{\sqrt{11,25}} \approx 0,024.$$

6. Формулируем ответ: вероятность того, что простым угадыванием верный ответ будет дан на 21 вопрос из 40, равна 0,024.

Задание № 7.14. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,01. Проверяется несколько книг, содержащих вместе 2500 страниц. Найдите вероятность того, что с опечатками окажется 10 страниц?

Пример № 7.15. Вы учите группу, состоящую из 50 детей. Вероятность того, что ученик не усваивает учебную информацию равна 0,05. Найдите наиболее вероятное число учеников, которые не усваивают информацию.

Решение. *{Речь идет о наиболее вероятном числе, под которым понимают число* m_0*, для которого вероятность, соответствующая этому числу,* *превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных чисел появления события A}.*

1. Выпишем формулу для нахождения наивероятнейшего числа $np - q \le m_0 \le np + p$. Подставим данные из условия задачи *n=50, p=0,05, q=0,95.*

$$1,55 \le m_0 \le 2,55 \to m_0 = 2 .$$

Таким образом, наиболее вероятно, что два человека из пятидесяти не усваивают информацию.

2. Подсчитаем по формуле Пуассона вероятности события А для разных случаев.

Найдем вероятность того, что один человек из 50 не усваивает информацию:

$$n = 50 \to \lambda = np = 50 \cdot 0,05 \le 2,5 \quad \to P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \to P_{50}(1) \approx \frac{2,5^1}{1!} e^{-2.5} = 0,20 .$$

3. Найдем вероятность того, что два ученика из 50 не усваивают информацию:

$$P_{50}(2) \approx \frac{2,5^2}{2!} e^{-2.5} = 0,26 .$$

4. Найдем вероятность того, что три ученика из 50 не усваивают информацию:

$$P_{50}(3) \approx \frac{2,5^3}{3!} e^{-2.5} = 0,21 .$$

5. Найдем вероятность того, что четыре ученика из 50 не усваивают информацию:

$$P_{50}(4) \approx \frac{2,5^4}{4!} e^{-2.5} = 0,13 .$$

6. Найдем вероятность того, что десять учеников из 50 не усваивают информацию:

$$P_{50}(10) \approx \frac{2,5^{10}}{10!} e^{-2.5} = 0,00013 .$$

Если посчитать все вероятности, то увидим, что вероятность того, что два человека из пятидесяти не усваивают информацию наибольшая.

Задание №7.15. Вероятность попадания мячом в кольцо при одном броске равна 0,85. Вы делаете 25 независимых бросков. Найдите наивероятнейшее число попаданий.

Правила и формулы для вычисления вероятностей случайных событий*

Классическое определение вероятности события	**Нахождение вероятности сложного события**	**Нахождение полной вероятности**
1. Сформулируйте испытание. 2. Определите все случайные события и их число. 3. Проверьте, что испытание одно, все события равно возможны и независимы друг от друга. 4. Сформулируйте событие, вероятность которого надо найти. 5. Определите число m благоприятствующих событий. 6. Вычислите вероятности по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$.	1. Сформулируйте испытание. 2. Сформулируйте события из условия задачи. 3. Сформулируйте событие, вероятность которого нужно найти и составьте его формулу. 4. Если в формуле есть сумма, определите совместны (могут произойти одновременно) или несовместны (ни при каких условиях не произойдут одновременно) слагаемые суммы. Если в формуле есть произведение, определите зависимы/независимы сомножители в произведении. 5. Выберете формулу: – если совместные, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$; – если несовместные, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$; – если зависимые, то $P(AB)=P(A)P(B/A)$; – если независимые, то $P(AB)=P(A)P(B)$. 6. Вычислите все вероятности событий, входящие в формулу, и вероятность искомого события по формуле.	1. Сформулируйте испытание: «сначала..., потом...». 2. Сформулируйте события H_i, происходящие при первой части испытания (попарно несовместные). Найдите вероятности событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ и их сумму, которая должна быть равна единице. 3. Сформулируйте событие, вероятность которого нужно найти. 4. Найдите условные вероятности $P(A/H_1)$, $P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$. 5. Посчитайте событие A по формуле полной вероятности: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)$. 6. Примените формулу Байеса: $P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$.

Вычисление вероятности в схеме Бернулли			
1. Сформулируйте испытание. 2. Сформулируйте событие A. Найдите его вероятность и вероятность противоположного события. 3. Проверьте схему Бернулли: проводится n испытаний, каждое испытание имеет два исхода, вероятность появления события в каждом испытании постоянна. 4. Выпишите данные, которые есть в задаче, определите тип. 5. В зависимости от типа смотрите схему.	**Тип 1.** *Определить вероятность того, что при n независимых испытаниях событие A произойдет ровно m раз:* $P_n(m) - ?$ $n < 10 : P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ – *формула Бернулли* $n \geq 10 :$ $\lambda = np \leq 10$ $\quad \lambda > 10$ $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ $\quad P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{npq}}, x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ *формула Пуассона формула Муавра – Лапласа*	**Тип 2.** *Определить вероятность того, что при n независимых испытаниях событие A произойдет от* m_1 *до* m_2 *раз:* $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) - ?$ – *если* $[m_1, m_2]$ *маленький* $\rightarrow$ $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$ – *если* $[m_1, m_2]$ *большой* $\rightarrow$ $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$ $t_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}, \quad t_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$	**Тип 3.** *Определить наивероятнейшее число появления события A.* *используй неравенство:* $np - q \leq m_0 \leq np + p$

Индивидуальное задание № 7

Решить следующие задачи, подробно описывая каждый этап решения в соответствии с предложенными алгоритмами.

Вариант № 1.

1) В кассе осталось 5 билетов по 100 руб., три – по 300 рублей и два – по 500 руб. Покупатели наугад берут 3 билета. Найти вероятность того, что из этих билетов имеют одинаковую стоимость два билета.

2) Тестирование ребенка при поступлении в школу состоит из трех вопросов. Вероятность, что ребенок ответит правильно на один вопрос равна 0,3. Найти вероятность того, что ребенок ответит хотя бы на два вопроса.

3) К кладу ведут три дороги. Вероятность погибнуть на первой дороге равна 0,4, на второй – 0,7, на третьей – 0,8. Найти вероятность того, что ковбой доберется до клада по одной из них при условии, что дорога выбирается им наудачу.

4) При бросании 100 монет какова вероятность выпадения ровно 50 гербов?

Вариант № 2.

1) В розыгрыше кубка по футболу участвуют 16 команд, среди которых 5 команд первой лиги. Все команды по жребию делятся на две группы по 8 команд. Найти вероятность того, что все команды первой лиги попадут в одну группу.

2) Известно, что при каждом измерении равновероятны как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероятность того, что при трех независимых измерения все ошибки будут положительными?

3) В скачках участвуют три лошади. Первая лошадь выигрывает скачки с вероятностью 0,5, вторая — 0,2, третья — 0,4. Какова вероятность того, что лошадь, на которую поставил игрок, придет на скачках первой, если он выбирает ее наудачу?

4) Вероятность того, что деталь не пройдет проверку на качество, равна 0,2. Какова вероятность того, что из 400 случайно отобранных деталей окажутся бракованными 80 деталей?

Вариант № 3.

1) В группе из 25 человек трое занимаются армрестлингом, 10 – бодибилдингом, 5 – кикбоксингом, остальные — пауэрлифтингом. Какова вероятность того, что среди трех наугад вызванных спортсменов: один занимается армрестлингом, а другие два – кикбоксингом?

2) Вероятность того, что ребенок пройдет первый конкурс отборочного тура в музыкальную школу, равна 0,9, второго конкурса – 0,85 и третьего – 0,8. Какова вероятность того, что ребенок выиграет не менее двух конкурсов?

3) Три студента — Дима, Егор и Максим — на лабораторной работе по физике производят 25, 35 и 40 % всех измерений, допуская ошибки с вероятностями 0,01, 0,03 и 0,02 соответственно. Преподаватель проверяет наугад

выбранное измерение и объявляет его ошибочным. Кто из трех студентов вероятнее всего сделал это измерение?

4) В страховой компании застраховано 10 000 клиентов одного возраста и одной социальной группы. Вероятность наступления страхового случая в течение года составляет 0,006. Найдите вероятность того, что компания за год выплатит страховку 100 клиентам.

Вариант № 4.

1) Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт так, чтобы в этом наборе было бы точно 2 дамы, 1 бубновая карта и 1 пиковая карта?

2) Вероятность сдачи рекламного проекта в срок одной группой специалистов равна 0,9, а второй группы – 0,95. Какова вероятность, что, хотя бы одна группа не выполнит проект в срок, если группы работают независимо друг от друга?

3) В диагностическом центре прием больных ведут три невропатолога: Фридман, Гудман и Шерман, которые ставят правильный диагноз с вероятностью 0,5, 0,7 и 0,6 соответственно. Какова вероятность того, что больному Сидорову будет поставлен неверный диагноз, если он выбирает врача случайным образом?

4) В ящике имеется 5 синих и 50 красных шаров. Какова вероятность того, что при десяти независимых выборах с возвращением три раза будет выниматься синий шар?

Вариант № 5.

1) Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт так, чтобы в этом наборе было бы точно 1 туз, 3 дамы, 2 карты красной масти?

2) Два поэта-песенника предложили по одной песне исполнителю. Известно, что песни первого поэта эстрадный певец включает в свой репертуар с вероятность. 0,6, второго – с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что певец возьмет хотя бы одну песню?

3) В конкурсе на замещение вакантной должности преподавателя математики в Университете путей сообщения приняли участие 10 выпускников омского, 30 — томского и 15 — московского университетов. Вероятность выиграть конкурс для них равна 0,8, 0,9 и 0,7 соответственно. Какова вероятность того, что претендент, случайно познакомившийся с вами, выиграет конкурс?

4) Вероятность выхода из строя во время испытания на надежность любого из однотипных приборов равна 0,001. Найти вероятность того, что в партии из 100 приборов во время испытания выйдут из строя не более двух приборов.

Вариант № 6.

1) В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и один практический. Всего составлено 28 билетов, содержащих разные вопросы и практические задания. Вы можете ответить на 50 теоретических вопросов и выполнить 22 практические работы. Какова вероятность того, что вы сдадите экзамен?

2) В выходные дни Дима любит слушать музыку. Классическую музыку он включает с вероятностью 0,4, современную — с вероятностью 0,7. Какова вероятность, что в эти выходные Дима не станет слушать музыку?

3) В группе пять студентов имеют певческий голос сопрано, семь – меццо-сопрано и три – контральто. Вероятность того, что певцы будут приглашены на гастроли во время экзаменационной сессии, равна 0,1, 0,2 и 0,4 соответственно. На экзамене по математике в этой группе преподавателю сообщили, что студент Басов уже неделю гастролирует на Мальте. Какова вероятность, что Басов поет меццо-сопрано?

4) Среди 1000 человек приблизительно восемь левшей. Какова вероятность того, что среди сотни выбранных наугад человек не окажется ни одного левши?

Вариант № 7.

1) Наугад набирается номер телефона из семи цифр. Найти вероятность того, что все цифры номера различны.

2) При обследовании заболеваний легких проверялось 10 000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4000 человек из этой группы являются постоянными курильщиками. У 1800 из курящих обнаружились серьезные нарушения в легких. Среди некурящих серьезные нарушения в легких имели 1500 человек. Являются ли курение и наличие нарушений в легких независимыми событиями?

3) В киоске продаются 15 газет «Комок», 10 – «Спидинфо» и две «Вестник котлонадзора». Вероятность того, что данные периодические издания правильно отреагируют на главное событие, происходящее в Гондурасе, равна 0,8, 0,6 и 0,4

соответственно. Вы наугад покупаете газету. Какова вероятность того, что вы будете правильно проинформированы о гондурасском событии?

4) Среди выпускаемых деталей бывает в среднем 4 % брака. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание пяти деталей будет 40 % бракованных?

Вариант № 8.

1) Имеется девять лотерейных билетов, среди которых три выигрышных. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу купленных билетов два билета выигрышных.

2) В команде по хоккею 15 человек. Для первой пятерки вероятность забить шайбу равна – 0,6, для второй пятерки (без одного игрока) – 0,5, для остальных - 0,3. Шайба забита. Какова вероятность того, что это сделал хоккеист из первой пятерки?

3) За нарушение правил игроками команды «Паровоз» в их ворота назначается одиннадцатиметровый удар. Лучшие футболисты команды «Тормоз» Иванов, Петров и Сидоров забивают пенальти с вероятностью 0,3, 0,2 и 0,4 соответственно. Найти вероятность того, что одиннадцатиметровый удар будет реализован, если пенальтиста выбирают по жребию.

4) Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,75. В стационаре случайным образом выбрали 100 человек, подвергшихся новому лечению. Какова вероятность того, что среди них окажется ровно 70 выздоровевших

Вариант № 9.

1) Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «криминал», так чтобы пятое и седьмое места были заняты согласными?

2) Экзаменационный билет по психологии содержит три вопроса (по одному из трех разделов). Студент знает три из десяти вопросов первого раздела, девять из пятнадцати – второго и все двадцать вопросов третьего раздела. Преподаватель ставит положительную оценку при ответе хотя бы на два вопроса билета. Какова вероятность того, что студент не сдаст экзамен?

3) В фотоателье работают три оператора, каждый из которых печатает соответственно 35, 40 и 25% всей продукции. Вероятность того, что фотография будет некачественной, для первого оператора равна 0,3, для второго – 0,4, для третьего – 0,2. Вы не знаете, к какому из операторов попала ваша фотопленка с портретом любимой бабушки. Какова вероятность того, что вы, получив снимок,
узнаете на нем свою бабушку?

4) Найти вероятность того, что из 100 случайных прохожих от 25 до 70 — мужчины, если вероятность появления мужчины равна 0,4.

Вариант № 10.

1) В зале имеется 20 белых и 10 синих кресел. Случайным образом места занимают 15 человек. Найти вероятность того, что они займут 5 белых и 10 синих кресел.

2) Три снайпера делают по одному выстрелу по мишени. Известно, что из десяти выстрелов первый попадает шесть раз, второй – девять, третий – семь. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним из стрелков.

3) В студенческом оркестре три духовых инструмента (флейта, фагот и валторна), два ударных (барабан и ксилофон) и четыре струнных (скрипка, гитара, балалайка и клавесин). В комнате, где хранятся музыкальные инструменты, сыро, и вероятность того, что инструмент будет расстроен, для духовых инструментов равна 0,3, для ударных – 0,4, для струнных – 0,6. Перед концертом настройщик берет наугад инструмент, который оказывается в хорошем состоянии. Найти вероятность того, что это была балалайка.

4) Найти вероятность того, что из 100 случайных прохожих 80 женщин.

ЗАНЯТИЕ 8. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вы уже знакомы с понятиями «испытание», «случайное событие», «вероятность». Теперь приступим к рассмотрению важного случая, который характеризуется следующим обстоятельством: будем рассматривать функцию.

Случайной называют ***величину,*** которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Непрерывные случайные величины принимают возможные значения из некоторого промежутка.

п.1. Понятие дискретной случайной величины, законы распределения и основные числовые характеристики

Дискретная случайная величина (ДСВ) определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Говорят, что известен закон распределения случайной величины (СВ), если известна функциональная зависимость между ее значениями и их вероятностями[6].

Числовые характеристики дискретных случайных величин позволяют в сжатой форме выразить наиболее существенные черты распределения.

Пример № 8.1. Определить закон распределения случайных величин, если случайная величина:

– число очков, выпавших на верхней грани игрального кубика;

– число извлеченных красных карандашей из коробки, в которой имеются 7 карандашей, из которых 4 карандаша красные (наудачу извлекаются 3 карандаша);

– число самолетов, отклонившихся от расписания, если по одному и тому же маршруту в один и тот же день совершают полет 3 самолета, каждый самолет с вероятностью 0,7 может произвести посадку по расписанию.

Решение.

Случай первый.

1. Испытание: игральный кубик подбрасывается один раз.
2. Случайная величина X: число очков, выпавших на верхней грани игрального кубика.
3. Множество значений СВ X: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
4. Испытание удовлетворяет Классической схеме испытания, следовательно, имеет место равномерный закон распределения $P_n\left(X = x_i\right) = \dfrac{1}{n}$.

Случай второй.

1. Испытание: извлекается 3 карандаша из 7.
2. Случайная величина X: число извлеченных красных карандашей из коробки.
3. Множество значений СВ X: 0, 1, 2, 3.
4. Испытание удовлетворяет Выборке из множества семи элементов, следовательно, имеет место гипергеометрический закон распределения $P_n\left(X = m\right) = \dfrac{C_s^m \cdot C_{n-s}^{k-m}}{C_n^k}$.

---

[6] Законы распределения дискретных случайных величин приведены на стр. 72

Случай третий

1. Испытание: проверяется количество самолетов, отклонившихся от расписания.

2. Случайная величина X: число самолетов, отклонившихся от расписания.

3. Множество значений СВ X: 0, 1, 2, 3.

4. Испытание удовлетворяет Схеме Бернулли (n=3 - малое), следовательно, имеет место биномиальный закон распределения $P_n(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$.

Задание № 8.1. Определить закон распределения случайных величин, если случайная величина:

– число отличных оценок на экзамене в группе, состоящей из 25 человек;

– число попаданий мяча в баскетбольную корзину при десяти независимых выстрелах;

– число появлений герба при подбрасывании монеты два раза;

– число выздоровевших больных из трех людей, известно, что в результате операции выздоравливают 90 % больных.

Пример № 8.2. Составить таблицу распределения вероятностей числа правильных ответов на три вопроса, если вероятность правильно ответить на вопрос равна 0,2.

Решение.

1. Испытание: дается три ответа на три вопроса.

2. Случайная величина X: число правильных ответов.

3. Выпишем все возможные значения случайной величины:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3.$$

4. Сформулируем испытание: опрашиваемый отвечает на три независимых друг от друга вопроса, вероятность ответа на каждый постоянна. Следовательно, испытание удовлетворяет схеме Бернулли. Случайная величина X удовлетворяет биномиальному распределению вероятностей, для подсчета вероятностей будем использовать формулу $P_n(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$.

5. Найдем вероятности случайно величины при $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3$.

$$P_3(X=0)=C_3^0\cdot(0,2)^0\cdot(0,8)^3=0,512;\ \ P_3(X=1)=C_3^1\cdot(0,2)^1\cdot(0,8)^2=0,384$$

$$P_3(X=2)=C_3^2\cdot(0,2)^2\cdot(0,8)^1=0,096;\ \ P_3(X=3)=C_3^3\cdot(0,2)^3\cdot(0,8)^0=0,008$$

Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины X:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

6. Сделаем проверку $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,512+0,384+0,096+0,008=1$.

Задание № 8.2. В компании шесть начальников отделов. Вероятность опоздания начальника на совещание равна 0,1. Составить таблицу распределения вероятностей числа опоздавших начальников.

Пример № 8.3. Имеются шесть билетов в театр, четыре из которых на места первого ряда. Наудачу берут три билета. Составьте таблицу распределения вероятностей числа билетов первого ряда, оказавшихся в выборке.

Решение.

1. Сформулируем испытание: выбираем три билета из шести, причем 4 билета в первом ряду.

2. Сформулируем случайную величину X: число билетов первого ряда, оказавшихся в выборке.

2. Выпишем все значения случайной величины X: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

3. Случайная величина X удовлетворяет гипергеометрическому распределению вероятностей, для подсчета вероятностей будем использовать формулу $P_n(X = m) = \dfrac{C_s^m \cdot C_{n-s}^{k-m}}{C_n^k}$.

4. Найдем вероятности при $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$:

$$P_6(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} = \frac{\frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{2!}{2!}}{\frac{6!}{3!\cdot 3!}} = 0,2; \qquad P_6(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} = \frac{\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{2!}{1!}}{\frac{6!}{3!\cdot 3!}} = 0,6;$$

$$P_6(X=3) = \frac{C_4^3 \cdot C_2^0}{C_6^3} = \frac{\frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{2!}{2!}}{\frac{6!}{3!\cdot 3!}} = 0,2.$$

5. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины X

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0,2

6. Сделаем проверку $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0,2 + 0,6 + 0,2 = 1$.

Задание № 8.3. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично», наугад извлекаются 3 работы. Составьте таблицу распределения числа работ, оцененных на «отлично» и оказавшихся в выборке.

Пример № 4.8. На собеседовании Вам задают вопросы. Интервьюер прекращает задавать вопросы, как только обнаруживает Ваше незнание заданного вопроса. Вероятность того, что Вы ответите на любой заданный вопрос, равна 0,9. Составьте закон распределения числа дополнительных вопросов.

Решение.

1. Сформулируем испытание: Вам задают вопросы до тех пор, пока Вы не дадите неверный ответ.
2. Сформулируем случайную величину X: число заданных вопросов.
2. Выпишем все возможные значения случайной величины X:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3, \ldots, x_k = k, \ldots$$

3. Случайная величина X удовлетворяет геометрическому распределению вероятностей, для подсчета вероятностей будем использовать формулу $P(X = m) = pq^{m-1}$.
4. Найдем вероятности при $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$:

Величина X примет возможное значение $x = 1$, если Вы не ответите на первый вопрос. Вероятность этого, равна $P(X = 1) = 0,1$.

$$P(X=2) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09, \qquad P(X=3) = 0,9^2 \cdot 0,1 = 0,081,$$

$$P(X=k) = 0,9^{k-1} \cdot 0,1.$$

5. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины X

x_i	1	2	3	...	k	...

p_i	0,1	0,09	0,081		$0,9^{k-1}\cdot 0,1$	$\cdots$

Задание № 8.4. Забрасывается мяч в корзину либо до первого попадания, либо всего пять раз. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа бросков, если вероятность забросить мяч в корзину при каждом попадании постоянная и равна 0,9.

Пример № 8.5. Найти числовые характеристики случайной величины, которая означает число выигрышных лотерейных билетов, если приобретено 100 билетов. Вероятность выигрыша по каждому билету 0,05.

Решение. *{Для того чтобы вычислить числовые характеристики, необходимо либо знать таблицу распределения вероятностей, либо закон распределения. Определим закон распределения случайной величины и воспользуемся формулами}.*

1. Сформулируем испытание: независимо друг от друга проверяются 100 билетов на «выигрыш». Испытания – повторные и независимые, в каждом из которых лишь два исхода – «выигрыш / проигрыш». Испытания удовлетворяют Схеме Бернулли, следовательно, случайная величина X имеет биномиальное распределение.

2. Выпишем формулы $M(X)=np, D(X)=npq$ и подставим данные из условия задачи $M(X)=100\cdot 0,05=5,\ \ D(X)=100\cdot 0,05\cdot 0,95=4,75$.

3. Средне ожидаемое число выигрышных билетов равно пяти.

Задание № 8.5. В школе успеваемость составляет 90 %. Наудачу выбираются 40 учеников. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа успевающих школьников, оказавшихся в выбранной группе.

Пример № 8.6. У тысячи детей проверяют речевое развитие. Вероятность того, что у ребенка определят задержку в речевом развитии равна 0,05. Найти математическое ожидание и дисперсию числа детей, имеющих задержку в речевом развитии.

1. Сформулируем испытание: независимо друг от друга проверяются 1000 детей. Проводится тысяча повторных, независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых лишь два исхода – «есть задержка / нет задержки», вероятность появления в каждом случае постоянна. Испытания удовлетворяют Схеме Бернулли (n=1000 – велико), следовательно, случайная величина X имеет пуассоновское распределение.

2. Выпишем формулы $M(X)=\lambda=np, D(X)=\lambda=np$ и подставим данные из условия задачи $M(X)=1000\cdot 0,05=50,\ \ D(X)=50$.

3. Средне ожидаемое число детей, имеющих задержки в речевом развитии, равно 50.

Задание № 8.6. На культурное мероприятие, посвященное Дню Города подало заявки 100 тыс. человек. Вероятность того, что человек не будет принимать участие равна 0,0001. Найти математическое ожидание и дисперсию числа неявившихся на мероприятие человек.

Алгоритм распознавания закона распределения дискретных случайных величин и вычисления их числовых характеристик

1. Сформулируйте испытание.

2. Сформулируйте случайную величину X.

3. Найдите множество значений случайной величины X: $\{x_1,..,x_n\}$. Установите дискретная или непрерывная случайная величина.

4. Определите схему, которой удовлетворяет данное испытание, и выберите формулу для подсчета значений случайной величины:

✓ Классическая схема испытаний $\to$ равномерное распределение, задается формулой $P_n\left(X = x_i\right) = \dfrac{1}{n}$.

✓ Выборка длинны k из n-элементного множества M, из которых s элементов обладают определенных свойством, а m – число элементов, обладающим этим же свойством и оказавшихся в выборке $\to$ гипергеометрическое распределение вероятностей случайной величины X, задается формулой $P_n\left(X = m\right) = \dfrac{C_s^m \cdot C_{n-s}^{k-m}}{C_n^k}$.

✓ Схема Бернулли, если число испытаний небольшое и случайная величина есть число появлений события A, то $\to$ биномиальный закон, задается формулой $P_n\left(X = m\right) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

✓ Схема Бернулли, если количество испытаний достаточно велико, а вероятность появления события в отдельно взятом испытании весьма мала (0,05-0,1 и меньше), то $\to$ пуассоновский закон, задается формулой $P_n\left(X = m\right) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^m}{m!}$.

✓ Схема Бернулли, если случайная величина есть число проведенных испытаний, то $\to$ геометрический закон, задается формулой $P_n\left(X = m\right) = pq^{m-1}$.

5. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной величины и проверьте, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

6. Вычислите числовые характеристики случайной величины по формулам:

✓ если X имеет биномиальный закон, то $M\left(X\right) = np,\ \ D\left(X\right) = npq$;

✓ если X имеет геометрическое распределение вероятностей, то $M\left(X\right) = \dfrac{1}{p},\ \ D\left(X\right) = \dfrac{q}{p^2}$;

✓ если X имеет пуассоновское распределение веротяностей, то $M\left(X\right) = \lambda,\ \ D\left(X\right) = \lambda$.

7. В общем случае по заданой таблице распределения случайной величины, числовые характеристики случайной величины вычисляются по формулам:

✓ математическое ожидание $M\left(X\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$;

✓ дисперсия $D\left(X\right) = M\left(X^2\right) - \left(M\left(X\right)\right)^2$;

✓ среднее квадратическое отклонение $\sigma\left(X\right) = \sqrt{D\left(X\right)}$.

п.3. Функция распределения вероятностей случайной величины

Функция *F(x)*, определенная равенством $F(x)=P(X<x)$ называется интегральной функцией распределения вероятностей случайной величины X.

Интегральная функция дает общий способ задания как дискретных, так и непрерывных случайных величин.

Пример № 8.7. Монета подбрасывается 3 раза. Для случайного числа появления решки определите закон распределения случайной величины, найдите интегральную функцию распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение.

1. Сформулируем случайную величину X: число появлений решки при четырех подбрасываниях монетки. Возможные значения случайной величины X:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 2,\ \ x_4 = 3.$$

2. Испытание удовлетворяет схеме Бернулли, т.к. происходят повторные независимые испытания, в каждом испытании появление решки равновозможное и равновероятное. Случайная величина подчиняется биномиальному закону распределения $P_n(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$.

3. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины X:

$$P_3(X=0)=C_3^0\cdot(0,5)^0\cdot(0,5)^3=0,125$$

$$P_3(X=1)=C_3^1\cdot(0,5)^1\cdot(0,5)^2=0,375$$

$$P_3(X=2)=C_3^2\cdot(0,5)^2\cdot(0,5)^1=0,375$$

$$P_3(X=3)=C_3^3\cdot(0,5)^3\cdot(0,5)^0=0,125$$

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

Проверим правильность составления таблицы:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,125+0,375+0,375+0,125=1.$$

4. Составим интегральную функцию распределения вероятностей по формуле $F(x)=P(X<x)=\sum_{\{i|\ x_i<x\}} P(X=x_i)$ следующим образом.

если $x \le 0$, *то* $F(x)=0;$

если $0<x\le 1$, *то* $F(x)=0,125;$

если $1<x\le 2$, *то* $F(x)=0,125+0,375=0,5;$

если $2<x\le 3$, *то* $F(x)=0,125+0,375+0,375=0,875;$

если $\text{x}>3$, *то* $F(x)=0,125+0,375+0,375+0,175=1.$

Таким образом, получаем интегральную функцию.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \textit{при}\ \ x\le 0, \\ 0,125, & \textit{при}\ \ 0<x\le 1, \\ 0,5, & \textit{при}\ 1<x\le 2, \\ 0,875, & \textit{при}\ 2<x\le 3, \\ 1, & \textit{при}\ \ x>3. \end{cases}$$

5. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины по формулам $M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ и $D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2$.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 0\cdot 0{,}125+1\cdot 0{,}375+2\cdot 0{,}375+3\cdot 0{,}125=1{,}5.$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=\left(0^2\cdot 0{,}125+1^2\cdot 0{,}375+2^2\cdot 0{,}375+3^2\cdot 0{,}125\right)-1{,}5^2=0{,}75$$

Задание № 8.7. Дискретная случайная величина X задана следующей таблицей распределения вероятностей. Найдите интегральную функцию распределения, постройте ее график, найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

x_i	0	2	4
p_i	0,3	0,5	0,2

Индивидуальное задание № 8

Вариант № 1. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый дано по 5 ответов, среди которых имеется один правильный. составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа X правильных ответов, полученных при простом угадывании, и найдите интегральную функцию распределения вероятности этой случайной величины и ее числовые характеристики.

Вариант № 2. Из 15 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 15, наудачу извлекаются 3 жетона. составьте таблицу распределения вероятностей для числа выбранных жетонов, номера которых кратны 5. Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

Вариант № 3. Мяч бросают в корзину либо до первого попадания, либо 6 раз. Вероятность попадания равна 0,25. Построить график интегральной функции распределения вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа бросков.

Вариант № 4. В лотерее на 1000 билетов разыгрываются три вещи, стоимость которых 2100, 600, 300 руб. Составить ряд распределения суммы выигрыша для лица, имеющего один билет. Построить график интегральной функции распределения вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы выигрыша.

Вариант № 5. Три студента повторно пишут контрольную работу. Вероятность того, что правильно перепишет работу первый студент, равна 0,9; второй – 0,8; третий – 0,75. Составить ряд распределения числа студентов, которые правильно перепишут контрольную работу. Построить график интегральной функции распределения вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

Вариант № 6. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 1000 руб., четыре – по 500 руб., пять – по 400 руб. и десять выигрышей по 100 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Построить график интегральной функции распределения вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

Вариант № 7. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить ряд распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе четыре библиотеки. Построить график интегральной функции распределения вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

Вариант № 8. Контрольное задание состоит из 5 вопросов. На каждый из них дается 4 варианта ответов, только один из которых правильный. Составьте ряд распределения числа правильных ответов для испытуемого, не знающего ответы Построить график интегральной функции распределения вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

Вариант № 9. Из колоды в 36 карт наугад вынимают 5. Составить ряд распределения числа тузов среди вынутых карт. Построить график интегральной функции распределения вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

Вариант № 10. Подсчитано, что треть женщин, посещающих продовольственный магазин, покупает обезжиренный йогурт. Составить ряд распределения числа женщин, купивших обезжиренный йогурт, если магазин посетили 8 женщин. Построить график интегральной функции распределения вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

ЗАНЯТИЕ 9. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Статистика разрабатывает методы сбора, систематизации, анализа, интерпретации и отображения результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью выявления существующих в них закономерностей. Математическая статистика создает математический аппарат анализа массовых социальных явлений. С помощью методов математической статистики можно группировать сведения по какому-либо признаку, выделять обобщающие показатели, переходить от единичного к общему, от случайного к закономерному. Представители обществоведческих наук «должны уметь правильно интерпретировать статистические данные, иметь представление о степени их достоверности и значимости, владеть простейшими методами оценки ситуаций и построения прогнозов» (А.С. Калитвин).

п. 9.1. Первоначальные понятия математической статистики: выборка, числовые характеристики распределений.

Вся подлежащая изучению совокупность объектов называется ***генеральной совокупностью***. Понятие генеральной совокупности в определённом смысле аналогично понятию случайной величины, так как полностью обусловлено определённым комплексом условий. Та часть объектов, которая отобрана для непосредственного изучения из генеральной совокупности, называется ***выборкой***.

Выборка называется независимой (несвязной), если полученные результаты измерения некоторого свойства (признака) у испытуемых одной выборки не оказывает влияния на результаты измерений этого же свойства (признака) у испытуемых другой выборки. И, напротив, выборки называются зависимыми (связными), если процедура одного эксперимента на одной выборке оказывает влияние на другую выборку.

Результаты экспериментов удобно располагать в таблицах, именуемые вариационным или статистическим рядами.

Вариационным рядом распределения называют ранжированный в порядке возрастания (или убывания) двойной ряд чисел, показывающий сколько раз встречается значения признака в выборке. Числа, показывающие, сколько раз встречаются варианты из данного интервала, называются частотами, а отношение их к общему числу наблюдений – относительными частотами.

Первоначальный анализ полученных числовых данных проводят с помощью числовых характеристик.

Мода – это такое числовое значение, которое встречается в выборке наиболее часто.

Медиана – величина, по отношению к которой по крайне мере 50 % выборочных значений меньше нее и по крайней мере 50 % - больше.

Среднее арифметическое ряда из n числовых значений $X_1, X_2, .., X_n$ подсчитывается по формуле $\overline{X} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{X_1 + X_2 + .. + X_n}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i\right)$.

Разброс (размах) – разность между максимальной и минимальной величинами данного конкретного вариационного ряда $R = X_{\max} - X_{\min}$.

Дисперсия – мера рассеяния случайной величины $D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2$.

Для того чтобы приблизить размерность дисперсии к размерности измеряемого признака, применяют операцию извлечения квадратного корня из дисперсии. Полученную величину называют ***стандартным отклонением***.

Степень свободы – число свободно варьирующих единиц в составе выборки. Для ряда статистических методов расчет числа степеней свободы имеет свою специфику.

Пример № 9.1. Пусть нашей задачей является выявление картины успеваемости студентов, сдавших зачет по курсу «Математика». На курсе 50 человек. Полученные студентом оценки представляют собой (в порядке алфавитного списка) следующий набор чисел: 3, 4, 5, 4, 3, 3, 5, 4, 3, 5, 5, 2, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 4, 4, 3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 4, 3, 5, 3, 3, 5, 4, 2, 5, 3, 4, 2, 3, 5. Как видно, числа повторяются и работать с ними не удобно. Постройте полигон, гистограмму, кумуляту.

1. Составим вариационный ряд, для этого запишем в таблицу сколько раз встречаются варианты «2», «3», «4», «5».

Варианты	x_i	2	3	4	5
Частоты	f_i	3	21	13	13
Относительные частоты	$\tilde{f}_i$	0,06	0,42	0,26	0,26

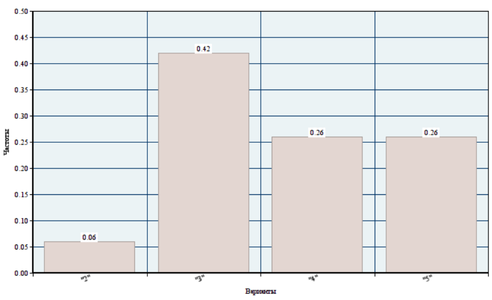
2. Найдем числовые характеристики признака, означающее: баллы, полученные по предмету «Математика».

- ✓ Мода $M_0 = \frac{4+5}{2} = 4,5$.
- ✓ Медиана $M_e = 4$.
- ✓ Среднее арифметическое $\bar{X} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 13 + 5 \cdot 13}{50} = 3,72$.
- ✓ Размах $R = 5 - 2 = 3$.
- ✓ Дисперсия

$$D = \frac{1}{50}\left(3 \cdot (2 - 3,72)^2 + 21 \cdot (3 - 3,72)^2 + 13 \cdot (4 - 3,72)^2 + 13 \cdot (5 - 3,72)^2 \right) = 0,81.$$

- ✓ Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{D} = 0,9$.

3. Построим гистограмму.



Задание № 9.1. Составьте вариационный ряд: 18, 19, 19, 22, 23, 17, 18, 21, 18, 19, 20, 20, 21, 18, 19, 19, 21, 22, 23, 17. Найдите числовые характеристики, постройте полигон, гистограмму, кумуляту.

Важнейшей задачей выборочного метода является оценка параметров (числовых характеристик) генеральной совокупности по данным выборки. ***Интервальной оценкой параметра*** γ называется числовой интервал, который с заданной вероятностью покрывает неизвестное значение параметра γ. Такой интервал носит название «доверительного интервала».

Пример № 9.2. При обследовании выработки 1000 сотрудников в отчетном году по сравнению с предыдущим было отобрано 100 сотрудников. Полученные данные представлены в таблице. Необходимо определить: а) вероятность того, что средняя выработка сотрудников отличается от средней выборочной не более, чем на 1 %; б) границы, в которых с вероятностью 0,9545 заключена средняя выработка сотрудников. Рассмотреть случаи повторной и бесповторной выборки.

i	Выработка в отчетном году в процентах к предыдущему периоду	Частота (количество сотрудников) n_i	Частотность (доля сотрудников) $w_i = \frac{n_i}{n}$	Накопленная частота $n_i^{нак}$	Накопленная частотность $w_i^{нак} = \frac{n_i^{нак}}{n}$
1	94-100	3	0,03	3	0,03
2	100-106	7	0,07	10	0,10
3	106-112	11	0,11	21	0,21
4	112-118	20	0,20	41	0,41
5	118-124	28	0,28	69	0,69
6	124-130	19	0,19	88	0,88
7	130-136	10	0,10	98	0,98
8	136-142	2	0,02	100	1,00
	Σ	100	1,00	-	-

Решение. Из условия имеем N=1000, n=100.

1. Вычислим среднюю арифметическую и дисперсию упрощенным способом, используя не первоначальные варианты, а новые варианты $u_i = \frac{x_i - c}{k}$, где c и k – специально подобранные константы.

Возьмем постоянную k, равную величине интервала, т.е. $k=6$, и постоянную c, равную середине пятого интервала, т.е. $c=121$. Новые варианты $u_i = \frac{x_i - c}{k} = \frac{x_i - 121}{6}$. Составим новую таблицу.

i	Интервалы x	Середина интервала n_i	Новая переменная $u_i = \frac{x_i - 121}{6}$	n_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$	$u_i + 1$	$(u_i + 1)^2 n_i$
1	94-100	97	-4	3	-12	48	-3	27
2	100-106	103	-3	7	-21	63	-2	28
3	106-112	109	-2	11	-22	44	-1	11
4	112-118	115	-1	20	-20	20	0	0
5	118-124	121	0	28	0	0	1	28
6	124-130	127	1	19	19	19	2	76
7	130-136	133	2	10	20	40	3	90
8	136-142	139	3	2	6	18	4	32
	Σ	–	–	100	-30	252	–	292

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i n_i}{n} \cdot k + c = \frac{-30}{100} \cdot 6 + 121 = 119,2\,.$$

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i}{n} \cdot k^2 - \left(\bar{X} - c\right)^2 = \frac{252}{100} \cdot 6^2 - \left(119,2 - 121\right)^2 = 87,48\,.$$

2. Найдем среднюю квадратичную ошибку выборки для средней:

– для повторной выборки по формуле $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \approx \sqrt{\frac{D}{n}} \approx \sqrt{\frac{87,48}{100}} = 0,9354$;

– для бесповторной выборки по формуле

$$\sigma'_{\bar{X}} \approx \sqrt{\frac{D}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} \approx \sqrt{\frac{87,48}{100}\left(1-\frac{100}{1000}\right)} = 0,887\,(\%).$$

Теперь искомую доверительную вероятность находим по формуле $P\left(\left|\bar{X}-\bar{X}_0\right| \le \Delta\right) = \Phi(t) = \gamma \to P\left(\left|\bar{X}-\bar{X}_0\right| \le 1\right) = \Phi\left(\frac{1}{0,935}\right) = \Phi(1,07) = 0,715$.

$$P\left(\left|\bar{X}-\bar{X}_0\right| \le \Delta\right) = \Phi(t) = \gamma \to P\left(\left|\bar{X}-\bar{X}_0\right| \le 1\right) = \Phi\left(\frac{1}{0,887}\right) = \Phi(1,13) = 0,741.$$

Итак, вероятность того, что выборочная средняя отличается от генеральной средней не более чем на 1 %, равна 0,715 для повторной и 0,741 для бесповторной выборки.

3. Найдем предельные ошибки повторной и бесповторной выборок по формуле $\Delta = t\sigma_{\bar{X}}$. Из того, что $\Phi(t) = 0,9545$, согласно статистической таблице, $t = 2$. Доверительный интервал определяем по формуле $\bar{X} - \Delta \le \bar{X}_0 \le \bar{X} + \Delta$. Подставим известные значения:

– $119,2 - 2 \cdot 0,935 \le \bar{X}_0 \le 119,2 + 2 \cdot 0,935$ или $117,33 \le \bar{X}_0 \le 121,07$ для повторной выборки;

– $119,2 - 2 \cdot 0,887 \le \bar{X}_0 \le 119,2 + 2 \cdot 0,887$ или $117,43 \le \bar{X}_0 \le 120,97$ для бесповторной выборки.

4. Таким образом, с надежностью 0,9545 средняя выработка сотрудников заключена в границах от 117,33 % до 121,07 %, если выборка повторная, и от 117,43 % до 120,97 %, если выборка бесповторная.

{Для проведения выборочного наблюдения весьма важно правильно установить объём выборки n, который в значительной степени определяет необходимые при этом временные, трудовые и стоимостные затраты. Объем бесповторной выборки рассчитывается по формуле $n' = \frac{Nt^2\sigma^2}{t^2\sigma^2 + N\Delta^2}$ *}.*

5. По условию примера № 2 определить объем выборки, при котором с вероятностью 0,9973 отклонение средней выработки сотрудников от средней выработки всех сотрудников фирмы не превзойдет 1 %.

Дисперсия – $\sigma^2 = D = 87,48$. По условию $\gamma = \Phi(t) = 0,9973$, согласно статистической таблице $t = 3$. Найдем объем бесповторной выборке по формуле:

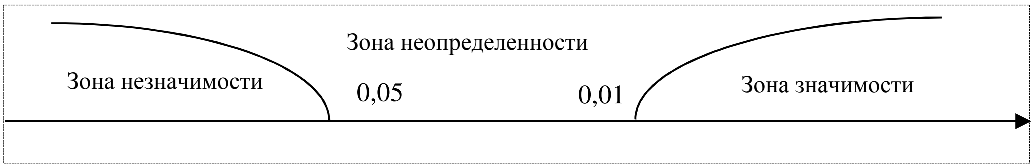
$$n' = \frac{Nt^2\sigma^2}{t^2\sigma^2 + N\Delta^2} = \frac{1000 \cdot 3^2 \cdot 87,48}{3^2 \cdot 87,48 + 1000 \cdot 1} = 440,5 \approx 441.$$

Задание № 9.2. Из коллектива 2000 человек, для тестирования на профпригодность было отобрано 200 человек, среди которых оказалось 184 профпригодных. Найти: а) вероятность того, что доля не профпригодных сотрудников во всем коллективе отличается от полученной доли в выборке не более чем на 0,02; б) границы, в которых с надежностью 0,95 заключена доля непрофпригодных сотрудников во всем коллективе. Каким должен быть объем выборки, чтобы те же границы гарантировать с надежностью 0,9973?

п. 9.2. Общие принципы проверки статистических гипотез.

При проверке статистических гипотез принято использовать два понятия: нулевая гипотеза H_0 (гипотеза о сходстве), альтернативная гипотеза H_1 (гипотеза о различии).

Правило принятия статистического вывода: на основании полученных экспериментальных данных подсчитывается по выбранному статистическому методу эмпирическая статистика, или эмпирическое значение $Ч_{эмп}$ (число). Затем эмпирическая статистика $Ч_{эмп}$ сравнивается с двумя критическими величинами, которые соответствуют уровням значимости в 5 % и в 1 % для выбранного статистического метода и которые обозначаются как $Ч_{кр}^1$ и $Ч_{кр}^2$. Величины $Ч_{эмп}$ находятся для каждого статистического метода по соответствующим таблицам. Для сравнения трех чисел $Ч_{эмп}, Ч_{кр}^1$ и $Ч_{кр}^2$ удобно использовать числовую ось, которую называют «осью значимости» [6, с. 61].



Подсчитанное $Ч_{эмп}$ по какому либо статистическому методу должно обязательно попасть в одну из трех зон.

Таким образом принятие статистического решения осуществляется по следующим этапам [6, с. 63].

1. Формулировка нулевой и альтернативной гипотез.
2. Определение объема выборки N.
3. Выбор соответствующего уровня значимости.
4. Выбор статистического метода, который зависит от типа исследуемого гуманитарного объекта.
5. Вычисление соответствующего эмпирического значения по экспериментальным данным, согласно выбранному критерию.
6. Нахождение по статистической таблице для выбранного статистического метода критических значений, соответствующих уровню значимости для p=0,05 и p=0,01.
7. Построение оси значимости и нанесении на нее табличных критических значений и эмпирического значения $Ч_{эмп}$.
8. Формулировка принятия решения (выбор соответствующей гипотезы H_0 или H_1).

Пример № 9.3. Рекламная компания проводит эксперимент по выяснению мнения покупателей по поводу упаковки товара. Из 150 испытуемых упаковку № 1 предпочли 98 человек, а упаковку № 2 – 52 человека. Можно ли утверждать, что подобный выбор упаковки № 1 или упаковки № 2 обусловлен какой-либо причиной, неизвестной производителю?

Решение. Предполагается, что выбор должен быть равновероятен, т.е. упаковку № 1 и упаковку № 2 должны выбрать одинаковое количество человек (75 человек выбирает упаковку № 1, 75 человек выбирает упаковку № 2).

1. Проверим совпадение эмпирического распределения с теоретическим по критерию *хи*-квадрат, воспользовавшись формулой $\chi^2_{эмп} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_{эмп} - f_{теор}\right)^2}{f_{теор}}$, где $f_{эмп}$ - эмпирическая частота, $f_{теор}$ - теоретическая частота.

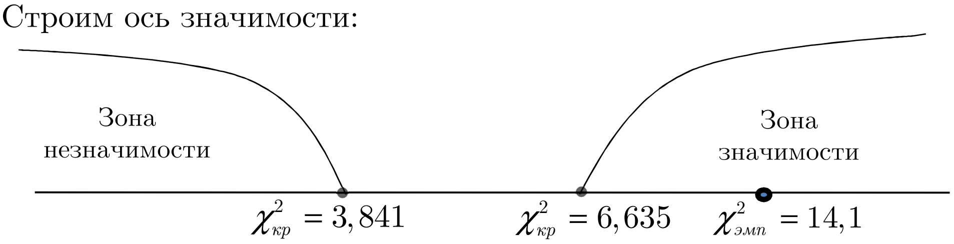
Распишем формулу, подставим числовые значения из условия эксперимента:

$$\chi^2_{эмп} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_{эмп} - f_{теор}\right)^2}{f_{теор}} = \frac{\left(98-75\right)^2}{75} - \frac{\left(52-75\right)^2}{75} = 14{,}1\,.$$

2. По статистической таблице для критерия хи-квадрат найдем критические значения, для этого следует определить число степеней свободы по формуле $v = k - 1 = 2 - 1 = 1$.

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 3{,}841 & для \quad P \le 0{,}05 \\ 6{,}635 & для \quad P \le 0{,}01 \end{cases}$$

3. Строим ось значимости:



4. Полученные результаты оказались значимыми на уровне 1 %. Иными словами, испытуемые статистически значимо предпочитают выбор упаковки № 1. В терминах статистических гипотез этот вывод звучит так: выбор упаковки оказался не случайным, поэтому нулевая гипотеза H_0 отклоняется и на высоком уровне значимости принимается альтернативная гипотеза H_1 о различии. Если специалисту интересны причины подобного выбора, то их следует выяснять в последующих экспериментах.

Задание № 9.3. Было опрошено 210 родителей: «Какие кружки в детском дошкольном учреждении Вы предпочитаете: рисование, танцы, теннис?». Ожидалось, что каждому виду занятий отдадут предпочтение одинаковое количество человек. Однако, в результате опроса – 125 человек выбрали рисование, 50 человек – танцы, 35 родителей – теннис. Можно ли утверждать, что подобный выбор обусловлен какой-либо причиной?

Пример № 9.4. Управление образованием провело эксперимент, в котором выяснилось, что из 30 учащихся лингвистической школы 22 справились с заданиями, а из 35 обычной школы с тем же заданием справились 16 человек. Можно ли считать, что различия в успешности выполнения заданий учащимися спецшколы и обычной достоверны?

Решение. В качестве критерия выберем φ-критерий Фишера, поскольку с его помощью можно оценить различия в любых двух выборках.

1. Переведем данные в условия задачи в проценты:

$$\frac{22}{30} \cdot 100\ \% = 0{,}73, \quad \frac{16}{35} \cdot 100\ \% = 0{,}45.$$

2. По статистической таблице для φ-критерия Фишера найдем величины, соответствующие процентным долям в каждой группе:

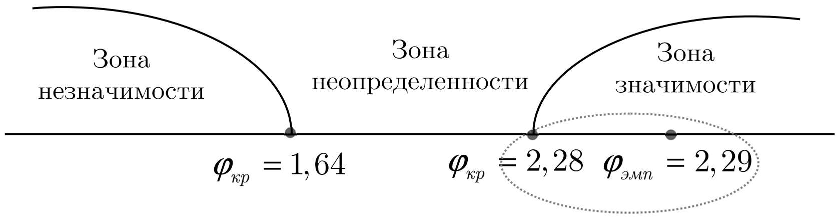
$$0,73 \to \varphi_1 = 2,053$$
$$0,45 \to \varphi_2 = 1,483.$$

3. Вычислим эмпирическое значение φ-критерия Фишера по формуле:

$$\varphi_{эмп} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} = (2,053 - 1,483) \cdot \sqrt{\frac{30 \cdot 35}{30 + 35}} = 2,29.$$

4. По статистической таблице для Критерия Фишера определяем критические значения $\varphi_{кр} = \begin{cases} 1,64 & для \quad P \le 0,05 \\ 2,28 & для \quad P \le 0,01 \end{cases}$.

5. Строим «ось значимости»:



Эмпирическое значение попало на границу зоны значимости и зоны неопределённости, то в терминах статистических гипотез можно принять гипотезу H_1 на уровне значимости 5 % и отклонить ее на 1 % уровне значимости. Можно принять гипотезу о различии между успешностью учащихся на уровне 1 % на усмотрение экспериментатора.

Задание № 9.4. Психологом исследуется уровень дезадаптации студентов к обучению в вузе. Будет ли уровень дезадаптации у абитуриентов из сельской местности более высоким, чем у их сверстников, проживающих в городе? В первой группе из 20 человек очень высокий уровень дезадаптации наблюдался у 13 человек, во второй группе из 15 человек он был обнаружен у 5 испытуемых. Проверьте, можно ли считать подобные различия статистически значимыми?

п. 9.3. Понятие корреляционной связи

При исследовании гуманитарных объектов специалиста интересует, как связаны между собой две или большее количество переменных. Возникает задача выяснить тесноту корреляционной связи, т.е. согласованного изменения двух признаков, отражающее тот факт, что изменчивость одного признака находится в соответствии с изменчивостью другого.

Задача корреляционного анализа сводится к установлению направления (положительного или отрицательного) и формы (линейная, нелинейная) связи между варьирующими признаками, измерению тесноты, и, наконец, к проверке уровня значимости полученных коэффициентов корреляции.

Коэффициент корреляции Пирсона точно устанавливает тесноту связи между признаками. Если коэффициент корреляции по модулю оказывается близким к единице, то это соответствует высокому уровню связи между переменными. Если же получен знак минус, то большей величине одного признака соответствует меньшая величина другого. Расчет коэффициента корреляции Пирсона предполагает, что признаки X и Y распределены нормально и имеют одинаковое количество переменных. Таблицы уровней значимости рассчитаны от $n=5$ до $n=1000$. Оценка уровня значимости по таблицам осуществляется при числе степеней свободы $k = n - 2$.

В общем виде формула для подсчета коэффициента корреляции такова:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum (y_i - \overline{y})^2}}.$$

В модифицированном и более удобном виде на практике используют следующую формулу:

$$r_{xy} = \frac{n \cdot \sum (x_i y_i) - \left(\sum x_i \sum y_i\right)}{\sqrt{\left[n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right]\left[n \cdot \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}}$$

Пример № 9.5. Найти коэффициент корреляции между уровнем стрессоустойчивости *(X)* и способностью принимать решения *(У)* для четырнадцати сотрудников фирмы по следующим данным:

x_i	2,8	2,2	3,0	3,5	3,2	3,7	4,0	4,8	6,0	5,4	5,2	5,4	6,0	9,0
y_i	6,7	6,9	7,2	7,3	8,4	8,8	9,1	9,8	10,6	10,7	11,1	11,8	12,1	12,4

Решение.

1. Вычислим необходимые суммы.

$$\sum_{i=1}^{14} x_i = 2,8 + 2,2 + 3 + 3,5 + 3,2 + 3,7 + 4 + 4,8 + 6 + 5,4 + 5,2 + 5,4 + 6 + 9 = 64,2$$

$$\sum_{i=1}^{14} x_i^2 = 2,8^2 + 2,2^2 + 3^2 + 3,5^2 + 3,2^2 + 3,7^2 + 4^2 + 4,8^2 + 6^2 + 5,4^2 + 5,2^2 + 5,4^2 + 6^2 + 9^2 = 335,26$$

$$\sum_{i=1}^{14} y_i = 6,7 + 6,9 + 7,2 + 7,3 + 8,4 + 8,8 + 9,1 + 9,8 + 10,6 + 10,7 + 11,1 + 11,8 + 12,1 + 12,4 = 132,9$$

$$\sum_{i=1}^{14} y_i^2 = 6,7^2 + 6,9^2 + 7,2^2 + 7,3^2 + 8,4^2 + 8,8^2 + 9,1^2 + 9,8^2 + 10,6^2 + 10,7^2 + 11,1^2 + 11,8^2 + 12,1^2 + 12,4^2 = 1313,95$$

$$\sum_{i=1}^{14} x_i y_i = 2,8 \cdot 6,7 + 2,2 \cdot 6,9 + 3 \cdot 7,2 + 3,5 \cdot 7,3 + 3,2 \cdot 8,4 + 3,7 \cdot 8,8 + 4 \cdot 9,1 +$$

$$+4,8 \cdot 9,8 + 6 \cdot 10,6 + 5,4 \cdot 10,7 + 5,2 \cdot 11,1 + 5,4 \cdot 11,8 + 6 \cdot 12,1 + 9 \cdot 12,4 = 650,99$$

2. Подставим полученные данные в формулу.

$$r_{xy} = \frac{n \cdot \sum (x_i y_i) - \left(\sum x_i \sum y_i\right)}{\sqrt{\left[n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}}$$

$$r_{xy} = \frac{14 \cdot 650,99 - 64,2 \cdot 132,9}{\sqrt{14 \cdot 335,26 - 64,2^2}\sqrt{14 \cdot 1313,95 - 132,4^2}} = 0,898$$

Коэффициент Пирсона близок к 1.

3. Определяем критические значения для полученного коэффициента корреляции по статистической таблице, учитывая что число степеней свободы рассчитывается как $k = n - 2 = 12$:

$$r_{кр} = \begin{cases} 0,53 \text{ } для \text{ } P \le 0,05 \\ 0,66 \text{ } для \text{ } P \le 0,01 \end{cases}.$$

Экспериментальное значение коэффициента корреляции попадает в зону значимости. Связь между стрессоустойчивостью людей и способностью принимать решения статистически значима на уровне 1 % и положительна. Полученная прямо пропорциональная зависимость говорит о том, что чем выше уровень стрессоустойчивости, тем выше уровень способности принимать решения и наоборот.

Задача № 9.5. Имеются следующие данные о связи между социальным статусом подростков и стилями семейного воспитания.

x_i	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
y_i	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Необходимо оценить тесноту связи и направление между переменными с помощью коэффициента корреляции.

Индивидуальное задание № 9. «Элементы математической статистики»

1. Группа учащихся исследовалась на предмет усвоения нового материала. Для этого был предложен тест. В качестве результата регистрировалось время выполнения теста в минутах. Были получены следующие результаты (приведены для каждого варианта). Найти моду, медиану, среднее, размах, дисперсию, стандартное отклонение. Сгруппировать данные и нарисовать полигон и гистограмму распределения сгруппированных относительных частот. Выяснить, удовлетворяют ли экспериментальные данные нормальному закону распределения.

2. Специалиста интересует, эффективна ли его деятельность. Для этого он провел эксперимент и зафиксировал числовые данные. В группе, в которой велась целенаправленная работа, полученные результаты обозначены за Х. В группе, в которой работа велась традиционными методами, полученные результаты обозначены за У. Специалист предполагает, что существуют различия в полученных результатах. Проверить статистическую гипотезу по рекомендуемому критерию хи-квадрат.

3. Специалист хочет доказать влияние своей методики на оптимизацию некоторого процесса. Данные представлены в таблице. Установите, есть ли корреляционная зависимость между двумя признаками.

<table>
<tr><th>№</th><th>Экспериментальные данные</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>К заданию № 1: 17, 15, 29, 25, 22, 27, 34, 37, 38, 40, 45, 56, 57, 53, 54, 65, 66, 77, 79, 74, 75, 85, 83, 85, 86, 17, 15, 40, 25, 22, 27, 40, 40, 38, 40, 45, 56, 40, 53, 54, 65, 66, 77, 79, 74, 75, 85, 83, 85, 86.

К заданию № 2:
<table>
<tr><td>21</td><td>26</td><td>24</td><td>26</td><td>27</td><td>23</td><td>24</td><td>28</td><td>26</td><td>27</td></tr>
<tr><td>17</td><td>21</td><td>22</td><td>19</td><td>21</td><td>15</td><td>18</td><td>25</td><td>14</td><td>20</td></tr>
</table>
К заданию № 3:
<table>
<tr><td>12</td><td>13</td><td>15</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>25</td></tr>
<tr><td>85</td><td>84</td><td>81</td><td>79</td><td>78</td><td>77</td><td>75</td><td>71</td><td>69</td><td>68</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>К заданию № 1: 18, 16, 14, 22, 28, 39, 30, 36, 34, 33, 49, 49, 47, 58, 54, 55, 52, 56, 58, 68, 60, 74, 73 ,75, 76, 82, 49, 16, 14, 22, 49, 39, 30, 49, 49, 33, 42, 45, 47, 58, 54, 55, 52, 56, 58, 68, 60, 74, 49 ,49, 76, 82.

К заданию № 2:
<table>
<tr><td>21</td><td>26</td><td>24</td><td>26</td><td>27</td><td>23</td><td>24</td><td>28</td><td>26</td><td>27</td></tr>
<tr><td>22</td><td>23</td><td>22</td><td>22</td><td>26</td><td>29</td><td>21</td><td>22</td><td>20</td><td>20</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	К заданию № 3: <table><tr><td>16</td><td>19</td><td>15</td><td>15</td><td>17</td><td>16</td><td>19</td><td>14</td><td>15</td><td>19</td></tr><tr><td>19</td><td>19</td><td>15</td><td>19</td><td>19</td><td>18</td><td>15</td><td>20</td><td>21</td><td>21</td></tr></table>
3.	К заданию № 1: 14, 17, 25, 60, 27, 60, 39, 33, 32, 37, 60, 48, 45, 60, 56, 59, 52, 56, 59, 63, 66, 63, 78, 79, 14, 17, 25, 26, 60, 38, 39, 33, 50, 57, 44, 48, 45, 52, 60, 59, 52, 56, 59, 63, 66, 63, 78, 79. К заданию № 2: <table><tr><td>21</td><td>26</td><td>24</td><td>26</td><td>27</td><td>23</td><td>24</td><td>28</td><td>26</td><td>22</td></tr><tr><td>32</td><td>32</td><td>29</td><td>25</td><td>17</td><td>27</td><td>21</td><td>22</td><td>26</td><td>25</td></tr></table> К заданию № 3: <table><tr><td>51</td><td>53</td><td>55</td><td>57</td><td>55</td><td>59</td><td>60</td><td>58</td><td>61</td><td>65</td></tr><tr><td>21</td><td>21</td><td>19</td><td>18</td><td>20</td><td>18</td><td>17</td><td>15</td><td>14</td><td>10</td></tr></table>
4.	18, 11, 14, 10, 18, 21, 24, 27, 33, 36, 40, 48, 45, 43, 41, 55, 57, 58, 59, 64, 66, 62, 67, 64, 78, 73, 11, 14, 10, 18, 21, 24, 60, 33, 61, 40, 48, 45, 63, 41, 65, 60, 68, 59, 60, 60, 60, 67, 60, 78, 73. К заданию № 2: <table><tr><td>21</td><td>26</td><td>24</td><td>26</td><td>27</td><td>23</td><td>24</td><td>28</td><td>26</td><td>22</td></tr><tr><td>17</td><td>18</td><td>17</td><td>17</td><td>16</td><td>18</td><td>18</td><td>17</td><td>17</td><td>18</td></tr></table> К заданию № 3: <table><tr><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>39</td><td>41</td><td>44</td><td>45</td><td>44</td><td>47</td></tr><tr><td>11</td><td>10</td><td>10</td><td>9</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>
5.	К заданию № 1: 18, 15, 15, 15, 18, 22, 23, 27, 33, 36, 45, 48, 45, 43, 45, 45, 45, 58, 59, 64, 46, 45, 45, 64, 45, 45, 11, 24, 20, 18, 41, 24, 50, 33, 61, 45, 45, 45, 63, 41, 45, 60, 45, 45, 60, 45, 60, 45, 60, 78, 73 К заданию № 2: <table><tr><td>21</td><td>26</td><td>24</td><td>26</td><td>27</td><td>23</td><td>24</td><td>28</td><td>26</td><td>22</td></tr><tr><td>15</td><td>20</td><td>20</td><td>15</td><td>16</td><td>20</td><td>21</td><td>21</td><td>15</td><td>15</td></tr></table> К заданию № 3: <table><tr><td>87</td><td>84</td><td>83</td><td>80</td><td>80</td><td>75</td><td>74</td><td>70</td><td>69</td><td>65</td></tr><tr><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>39</td><td>41</td><td>44</td><td>45</td><td>44</td><td>47</td></tr></table>
6.	К заданию № 1: 25, 25, 25, 25, 26, 28, 23, 27, 33, 36, 35, 38, 35, 33, 31, 31, 31, 31, 29, 34, 36, 35, 25, 34, 35, 35, 40, 30, 31, 28, 31, 34, 30, 33, 41, 45, 29, 31, 33, 41, 35, 30, 35, 29, 30, 30, 30, 29, 30, 28, 43 К заданию № 2: <table><tr><td>21</td><td>26</td><td>24</td><td>26</td><td>27</td><td>23</td><td>24</td><td>28</td><td>26</td><td>22</td></tr><tr><td>22</td><td>27</td><td>25</td><td>27</td><td>28</td><td>24</td><td>25</td><td>29</td><td>27</td><td>23</td></tr></table> К заданию № 3: <table><tr><td>2</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>22</td><td>24</td><td>28</td></tr><tr><td>87</td><td>84</td><td>83</td><td>80</td><td>80</td><td>75</td><td>74</td><td>70</td><td>69</td><td>65</td></tr></table>
7.	К заданию № 1: 25, 25, 25, 25, 26, 28, 23, 27, 33, 36, 35, 38, 35, 33, 31, 31, 31, 31, 29, 34, 36, 35, 25, 34, 35, 35, 40, 30, 31, 28, 31, 34, 30, 33, 41, 45, 29, 31, 33, 41, 35, 30, 35, 29, 30, 30, 30, 29, 30, 28, 43

К заданию № 2:

21	26	24	26	27	23	24	28	26	22
16	22	17	23	18	24	19	24	20	25

К заданию № 3:

66	64	63	59	61	58	57	55	55	51
9	11	13	11	15	16	18	20	21	22

8. К заданию № 1: 77, 72, 47, 35, 69, 77, 76, 53, 74, 78, 42, 77, 59, 39, 78, 46, 40, 47, 37, 47, 60, 30, 55, 73, 61, 80, 57, 59, 69, 45, 70, 77, 71, 64, 34, 47, 71, 68, 66, 39, 50, 65, 71, 70, 51, 60, 38, 45, 77, 38

К заданию № 2:

21	26	24	26	27	23	24	28	26	22
25	24	23	22	21	20	19	18	19	18

К заданию № 3:

34	32	31	29	29	28	25	25	20	20
12	13	16	18	23	29	31	32	33	35

9. К заданию № 1: 28, 25, 31, 30, 17, 15, 35, 37, 10, 13, 11, 30, 36, 33, 26, 13, 43, 27, 31, 13, 33, 31, 10, 16, 38, 33, 38, 34, 21, 39, 32, 45, 45, 38, 32, 33, 19, 19, 16, 44, 16, 24, 21, 40, 16, 42, 34, 15, 29, 33

К заданию № 2:

21	26	24	26	27	23	24	28	26	22
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

К заданию № 3:

39	40	41	39	40	41	38	39	40	38
10	11	12	10	11	12	10	11	12	11

10. К заданию № 1: 58, 56, 55, 39, 43, 45, 51, 83, 79, 40, 54, 59, 51, 53, 41, 42, 52, 46, 60, 40, 49, 41, 72, 41, 85, 58, 50, 36, 47, 48, 47, 41, 48, 41, 51, 46, 41, 55, 58, 50, 60, 60, 41, 45, 43, 47, 52, 57, 45, 88

К заданию № 2:

21	26	24	26	27	23	24	28	26	22
19	18	19	18	19	18	19	18	19	18

К заданию № 3:

15	17	18	21	26	19	23	27	28	21
64	31	20	22	34	56	23	39	40	52

ЗАНЯТИЕ № 10. РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На предыдущих занятиях, Вы познакомились с некоторыми примерами решения типовых математических задач. Процесс их решения можно упростить, применяя современные информационные технологии, такие как онлайн-калькуляторы, мобильные приложения, компьютерные программы.

Выполните задания с применением информационных технологий.

Задание № 1. Выполнить задания

№	Задание		
1.	1. Решить уравнение $x^2-4x+5=0$. 2. Вычислить $(2-i)(4-2i)$. 3. Вычислить A_5^3, C_{10}^5, P_6.	2.	1. Решить уравнение $x^2-6x+13=0$. 2. Вычислить $(3-i)(1-2i)$. 3. Вычислить $A_4^3, \tilde{C}_9^6, P_5$.
3.	1. Решить уравнение $x^2+2x+2=0$. 2. Вычислить $(i+5)(6-3i)$. 3. Вычислить $A_{15}^{13}, C_{11}^6, P_7$.	4.	1. Решить уравнение $x^2-4x+5=0$. 2. Вычислить $(2-i)(4-2i)$. 3. Вычислить $\tilde{A}_5^3, C_{12}^{10}, P_5$.
5.	1. Решить уравнение $x^2-2x+5=0$. 2. Вычислить $(1-i)/(5-2i)$. 3. Вычислить $\tilde{A}_9^3, C_6^2, P_4$.	6.	1. Решить уравнение $x^2-9x+10=0$. 2. Вычислить $(i+6)\setminus(2i+5)$. 3. Вычислить $A_{12}^9, C_{20}^{15}, P_5$.
7.	1. Решить уравнение $3x^2-x+15=0$. 2. Вычислить $(1-2i)(1-3i)$. 3. Вычислить $A_6^2, \tilde{C}_{10}^6, P_7$.	8.	1. Решить уравнение $2x^2-x+2=0$. 2. Вычислить $(3i+1)\setminus(1-4i)$. 3. Вычислить $\tilde{A}_8^3, C_8^3, P_8$.
9	1. Решить уравнение $3x^2-4x+3=0$. 2. Вычислить $(2-i)-4i(1-2i)$. 3. Вычислить A_9^5, C_9^5, P_5.	10.	1. Решить уравнение $2x^2-x+8=0$. 2. Вычислить $i(i+5)+i(5-2i)$. 3. Вычислить $\tilde{A}_4^2, \tilde{C}_5^3, P_4$.

Задание № 2: Решить системы линейных уравнений

№	Задание
1.	$a)\begin{cases}3x_1-x_2+7x_3=18,\\2x_1+5x_3=14,\\-4x_1+2x_2+x_3=18;\end{cases}$ $b)\begin{cases}3x_1+x_2-5x_3=4,\\-2x_1+8x_2-x_3=3,\\-x_1-9x_2+6x_3=-7.\end{cases}$
2.	$a)\begin{cases}4x_1+9x_2+3x_3=29,\\3x_1-4x_2+x_3=4,\\-2x_1+x_2+5x_3=-23;\end{cases}$ $b)\begin{cases}x_1+2x_2-4x_3=2,\\4x_1-3x_2-5x_3=8,\\-3x_1+5x_2+3x_3=-6.\end{cases}$

3.	$a)\begin{cases}-3x_1+5x_2+4x_3=26,\\5x_1-2x_2+7x_3=3,\\8x_1-x_2+3x_3=-5;\end{cases}$ $b)\begin{cases}2x_1-6x_2+7x_3=-4,\\x_1+2x_2-3x_3=5,\\3x_1-4x_2+4x_3=1.\end{cases}$
4.	$a)\begin{cases}-2x_1+x_2+3x_3=1,\\4x_1-x_2+5x_3=27,\\3x_1-4x_2+4x_3=34;\end{cases}$ $b)\begin{cases}5x_1-2x_2+x_3=-4,\\-6x_1+x_2+2x_3=3,\\x_1+x_2-3x_3=2.\end{cases}$
5.	$a)\begin{cases}-5x_1+x_2+2x_3=21,\\3x_1-4x_2+3x_3=-22,\\-2x_1-3x_2+x_3=-5;\end{cases}$ $b)\begin{cases}-4x_1-3x_2+2x_3=5,\\3x_1-2x_2+x_3=4,\\x_1+5x_2-3x_3=-8.\end{cases}$
6.	$a)\begin{cases}7x_1-2x_2+3x_3=-4,\\4x_1+x_2-x_3=15,\\5x_1+x_2-2x_3=1;\end{cases}$ $b)\begin{cases}-4x_1+5x_2+x_3=-8,\\-3x_1+4x_2-2x_3=6,\\2x_1-3x_2+5x_3=-20.\end{cases}$
7.	$a)\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=4,\\-5x_1+2x_2+4x_3=31,\\4x_1+4x_2-x_3=3.\end{cases}$ $b)\begin{cases}-2x_1+3x_2+4x_3=-7,\\3x_1+2x_2+13x_3=-8,\\7x_1-4x_2+5x_3=6.\end{cases}$
8.	$a)\begin{cases}-4x_1+x_2+2x_3=14,\\-5x_1-3x_2+x_3=-1,\\6x_1-2x_2+3x_3=-17.\end{cases}$ $b)\begin{cases}5x_1+2x_2-3x_3=6,\\-4x_1+x_2+8x_3=-5,\\-x_1-3x_2-5x_3=-1.\end{cases}$
9.	$a)\begin{cases}3x_1-2x_2+5x_3=0,\\-4x_1+3x_2+x_3=7,\\x_1-x_2+7x_3=6.\end{cases}$ $b)\begin{cases}2x_1-3x_2+5x_3=-4,\\-3x_1+4x_2+x_3=2,\\-8x_1+11x_2-3x_3=7.\end{cases}$
10.	$a)\begin{cases}-3x_1+2x_2+5x_3=-8,\\4x_1-x_2+2x_3=6,\\2x_1-3x_2-12x_3=10.\end{cases}$ $b)\begin{cases}-5x_1+3x_2-x_3=-3,\\4x_1-2x_2+5x_3=1,\\2x_1+13x_3=-2.\end{cases}$

Задание № 3. Построить графики функций, вычислив $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)$

№	Задание	№	Задание
1.	1. $y=\left(x^2-4\right)e^{1-x^2}$ 2. $z=3x^2+y^2-2y$	6.	1. $y=e^{\frac{1}{x^3-3x}}$ 2. $z=\sqrt{1-x^2-2y^2}$
2.	1. $y=\dfrac{\cos^2 x}{2-\cos x}$ 2. $z=x^2-6x-y^2$	7.	1. $y=\dfrac{e^{2x}}{\left(x^2-1\right)}$ 2. $z=xy$
3.	1. $y=\left(1-x^2\right)^3$ 2. $z=x^2-6x+2y^2$	8.	1. $y=e^{-x}\left(x^2+x-5\right)$ 2. $z=3x^2+y^2+y$
4.	1. $y=\ln\left(x^3-3x\right)^2$ 2. $z=2y-x^2+2y^2$	9.	1. $y=\dfrac{\sin x}{\cos 2x}$

			2. $z = x^2 + y$
5.	1. $y = e^{\frac{4-x^2}{x+3}}$ 2. $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$	10.	1. $y = \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x(4-x^2)}$ 2. $z = \sqrt{1 + x^2 + 2y^2}$

Задание № 4. Построить область, ограниченную линейными неравенствами

№	Задание	№	Задание
1.	$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, \\ y - 2x \ge 0, \\ 2x + y - 4 \le 0. \end{cases}$	6.	$\begin{cases} y \ge 0, \\ 5x - 3y - 15 \le 0, \\ 3y - 5x + 15 \ge 0. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 3x + 2y \le 19, \\ x + 2y \le 13, \\ 0 \le x \le 5, \\ 0 \le y \le 6. \end{cases}$	7.	$\begin{cases} 3x - y \le 6, \\ x - y \le 1, \\ x + y \ge -1 \\ -4 \le x \le 8, \\ 0 \le y. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x \ge y, \\ 3x + y \le 0, \\ y + 4 \ge 0, \\ 2y \ge x - 8. \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 2x \le y, \\ 4x + y \ge 0, \\ y \le 3, \\ y \le 3 + 2x. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} y \ge 0, \\ x + y - 4 \le 0, \\ x - y + 2 \ge 0, \\ 2x - y - 2 \ge 0. \end{cases}$	9.	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ 2x_1 - x_2 \ge -2. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3 \ge 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4 \ge 0, \\ x_1 \le 4. \end{cases}$	10.	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2 \le 0, \\ 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 4. \end{cases}$

Задание № 5. Выполнить индивидуальное задание № 9 с использованием информационных технологий.

ИТОГОВАЯ РАБОТА

1. Двух мальчиков и трех девочек распределяют по спортивным секциям. Сколькими способами это можно сделать, если в спортивном клубе есть секция бокса, борьбы и карате (туда принимают лишь мальчиков), бальные танцы и художественная гимнастика (туда принимаются лишь девочки) и секция плаванья и легкой атлетики, куда принимаются и мальчики, и девочки?

2. Вы хотите открыть собственное дело, для этого Вам необходимо взять в банке 1 200 000 рублей в кредит на 10 лет, переплата банку будет на 150% превышающую исходную. Ваши доходы позволяют Вам откладывать по 50 % в месяц от возможного платежа банку. Что выгоднее с точки зрения общей суммы затрат: взять кредит или накопить необходимую сумму?

3. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

4. Исследовать функцию и построить ее график $\dfrac{\left(x^2+1\right)\cdot\left(x-2\right)}{\left(2x-x^2\right)}$.

5. Если начать рекламную компанию некоторой печатной продукции с первой недели января, то двести экземпляров можно будет реализовать по 12 руб. за штуку. Отсрочка рекламной компании на каждую неделю ведет к увеличению количества экземпляров на 50 штук, но цена при этом падает на 2 руб. Когда следует запустить рекламную компанию книжной продукции, чтобы доход от ее реализации был максимальным, если срок рекламной компании составляет пять недель?

6. На склад с трех предприятий поступает продукция первого и второго сорта. В продукции первого предприятия содержится 15% второсортных изделий, в продукции второго предприятия – 25 %, в продукции третьего предприятия – 30 %. Чему равна вероятность того, что среди трех изделий (по одному из продукции каждого предприятия) окажутся первосортными два изделия.

7. Известно, что в больших городах, каждый шестой брак является гражданским. Определить вероятность того, что из случайно отобранных десяти супружеских пар, хотя бы три пары зарегистрированы в браке.

8. Вы покупаете десять билетов, из которые шесть выигрышные. Четыре билет Вы дарите своим друзьям. Составить закон распределения числа выигрышных билетов, оказавшихся в числе подаренных Вами билетов.

9. Вы провели опрос среди случайно отобранных родителей одного из детских садов на предмет удовлетворенности условиями детского сада. Каждому респонденту было предложено оценить условия садика по шкале («о» баллов не доволен/на, «1» – скорее не доволен/на, «2» – скорее доволен/на, «3» – доволен/на). Получены следующие результаты: 3, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 1, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 0, 1, 1, 3. Что можно сказать о среднем значении, какие еще числовые характеристики необходимо найти для того, чтобы наиболее детально описать рассматриваемое явление?

10. Психолог провел эксперимент, в котором выяснилось, что из 23 учащихся специализированной школы 15 справились с заданием, а из 28 обычной школы с тем же заданием справились 11 человек можно ли считать, что различия в успешности решения заданий учащимися спецшколы и обычной школы достоверны?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баврин, И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей: учебник / И.И. Баврин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 328 с.

2. Бараненков, А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике: учебное пособие / А.И. Бараненков, Е.П. Богомолова, И.М. Петрушко. – СПб.: Лань, 2009. – 240 с.

3. Вечмотов, Е.М. Метафизика математики: монография / Е.М. Вечмотов. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. – 508 с.

4. Виленкин, Н.Я. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики: учебное пособие / Н.Я. Виленкин, В.Г. Потапов. – М.: Просвещение, 1979. – 113 с.

5. Дворянкина, Е.К. Теория вероятностей: учебное пособие / Е.К. Дворянкина, И.В. Карпова. – 3-е изд-е, перераб. и доп. – Хабаровск: Изд-во ДВГГУ, 2005. – 116 с.

6. Ермолаев, О.Ю. Математическая статистика для психологов: учебник / О.Ю. Ермолаев. – 5-е изд. – М.: НОУ ВПО «МПСИ»: Флинта, 2011. – 336 с.

7. Кислякова, М.А. Разработка рабочих программ математических дисциплин для социогуманитарных направлений в соответствии с требования ФГОС: учебное пособие / М.А. Кислякова. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. – 136 с.

8. Колегаева, Е.М. Математика для экономических специальностей (линейная алгебра и задачи оптимизации): учеб. пособие / Е.М. Колегаева. – Хабаровск: Изд-во ДВАГС, 2005. – 315 с.

9. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Н.Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573 с.

10. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Ф. Мостеллер. – М.: Наука, 1971. – 103 с.

11. Ниворожкина, Л.П. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: руководство для решения задач / Л.П. Ниворожкина, З.А. Морозова, И.А. Герасимова, И.В. Житников. – Ростов н/Д: Феникс, 1999. – 320 с.

12. Полуэктов, П. Озадачник: 133 вопроса на знание логики, математики и физики / П. Полуэктов, Н. Полуэктов. – М.: Альпина Паблишер, 2017. – 286 с.

13. Практикум и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей (типовые расчеты): учебное пособие / под ред. В.А. Болотюк. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010. – 288 с.

14. Салий, В.Н. Математические основы гуманитарных знаний: уч. пособие / В.Н. Салий. – М.: Высш. шк., 2009. – 304 с.

15. Высшая математика [Электронный ресурс]. – URL: http:// mathprofi.ru. (Дата обращения: 10.10.2018).

16. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. – URL: https://ege.sdamgia.ru (Дата обращения: 10.10.2018).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Аксиома – предложение, принимаемое без доказательства, рассматриваемое как исходное при построении математической теории.

Алгебра – математическая наука, объектом изучения которой являются группы, кольца, поля и структуры; раздел математики, изучающий операции над элементами множества произвольной природы, обобщающие обычные операции сложения и умножения чисел.

Анализ – метод рассуждения, при котором мы отправляемся от неизвестного к известному, от искомому к данному.

Математический анализ – общее название для ряда математических дисциплин, основанных на понятиях функции и предельного перехода.

Аналитическая геометрия – часть математики, в которой исследуются геометрические образы средствами алгебры на основе метода координат.

Арифметическая прогрессия – последовательность чисел, каждое из которых, начиная со второго, получается из предыдущего прибавлением к нему постоянного числа d, называемого разностью.

Бесконечно большая величина – переменная величина α, которая в процессе своего изменения становится и при дальнейшем изменении остается по абсолютной величине больше любого наперед заданного числа $M > 0$.

Бесконечно малая величина - переменная величина α, которая в процессе своего изменения становится и при дальнейшем изменении остается по абсолютной величине меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

Биномиальные коэффициенты – коэффициенты C_n^k бинома Ньютона в формуле $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Большая теорема Ферма – утверждение о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых положительных числах.

Закон больших чисел – теорема, утверждающая, что при $n \to \infty$ стремится к нулю вероятность того, что среднее арифметическое случайных величин отличается от среднего арифметического их математических ожиданий более чем на ε.

Вероятность – числовая характеристика возможности появления некоторого определённого события в цепи событий, могущих повторяться неограниченное число раз.

Взаимно-однозначное соответствие – такое соответствие между элементами двух множеств, при котором каждому элементу первого множества соответствует только один элемент второго множества, и обратно – каждому элементу второго множества соответствует только один элемент первого.

Гармонический ряд – числовой ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n} + ..$, члены которого являются числами, обратными числам натурального ряда.

Геометрическая прогрессия – последовательность чисел, каждое из которых, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной прогрессии число q, называемое знаменателем прогрессии.

График функции $y = f(x)$ – геометрическое место точек плоскости, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют соотношению (равенству) $y = f(x)$. Геометрически график функции обычно представляет некоторую плоскою линию, координаты точек которой есть соответствующие значения аргумента и функции.

Действительные числа – это все рациональные и иррациональные числа (числа, записываемые в виде бесконечной десятичной непериодической дроби).

Дифференциальное исчисление – раздел математики, который занимается исследованием функций при помощи производных и дифференциалов.

Дифференциальные уравнения – уравнения, содержащие искомые функции, их производные любых порядков и независимые переменные.

Доказательство от противного – метод доказательства теоремы, состоящий в том, что доказывают не саму теорему, а ей равносильную, противоположную обратной теорему.

Замечательные пределы – пределы, с помощью которых легко находить численные значения бесконечного множества других пределов: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Индукция – заключение от частного к общему.

Комплексные числа – выражения вида $a+ib$, где a и b – вещественные числа, $i=\sqrt{-1}$.

Линейная функция – функция первой степени относительно всех переменных.

Максимум функции (одной переменной) $y=f(x)$ – значение $f(x_0)$ функции, не меньше значений, принимаемых этой функцией при всех достаточно близких к x_0 значениях аргумента.

Математическая логика – наука, изучающая математические доказательства.

Математическая статистика – наука об общих способах обработки результатов экспериментов.

Матрица – прямоугольная таблица, составленная из элементов любой природы.

Множество – совокупность, объединение некоторых объектов произвольной природы по каким – либо общим для них свойствам.

Неопределенный интеграл – совокупность всех примитивных функций для данной функции $f(x)$, обозначается $\int f(x)\,dx$.

Метод неопределённых коэффициентов – метод, применяемый для нахождения коэффициентов выражения в случае, когда вид этого выражения заранее известен.

Несоизмеримые величины – однородные величины, не имеющие общей меры (например, диаметр квадрата и его сторона).

Неявная функция –

Нормальное распределение – один из наиболее важных типов распределения случайной величины.

Область определения функции – множество значений, принимаемых независимой переменной.

Обратная матрица к квадратной матрице A – такая матрица A^{-1}, что произведение $A\cdot A^{-1}$ равно единичной матрице.

Обратная функция для данной функции $y=f(x)$ – функция $x=\varphi(y)$, задающаяся тем же законом соответствия между переменными x и y, как и данная функция $f(x)$, но в обратном направлении: $y\to x=\varphi(y)$.

Ограниченная величина – переменная, которая в процессе своего изменения остается всегда по абсолютной величине меньше некоторого постоянного числа.

Основная теорема алгебры – теорема, заключающаяся в том, что всякий многочлен степени n: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_n$ имеет в поле комплексных чисел ровно n корней.

Параметр – величина, входящая в формулы и выражения, значение которой является постоянным в пределах рассматриваемой задачи, но в другой задаче меняет свои значения.

Прямое произведение двух множеств Х и У – третье множество Z, элементами которого являются всевозможные пары (x, y).

Ряд – последовательность символов, соединенных знаком +: $a_1 + a_2 + .. + a_n + ..$

Синтез – метод рассуждения, при котором следуют от неизвестного к известному, от искомого к данному.

Сложная функция – если z есть функция от y, а y в свою очередь есть сложная функция от x, то переменная функция $f(x) = z(y(x))$ называется сложной функцией.

Случайный процесс – случайная величина, зависящая от времени.

Теорема – математическое предложение, истинность которого устанавливается при помощи доказательства.

Тождественное преобразование – замена одного алгебраического выражения другим, тождественно равным ему, т.е. приминающим те же значения при всех допустимых значениях букв, входящих в это выражение.

Функция – одно из основных понятий математики. Элемент множества B произвольной природы называется функций элемента x, определённой на множестве A произвольной природы, если каждому элементу x из множества A соответствует единственный элемент y из множества B.

Таблица математических символов			
$\exists$	Квантор существования, читается «существует»	$\forall$	Квантор всеобщности, читается «для каждого»
$\Leftrightarrow$	Символ равносильности, читается «тогда и только тогда»	$\rightarrow$	Символ следования, читается «следует»
$a \in A$	Символ принадлежности, читается «элемент а принадлежит множеству А»	$b \notin B$	Читается «элемент в не принадлежит множеству В»
$B \subset A$	Символ включения, читается «В является подмножеством множества А»	$A \setminus B$	Символ разности двух множеств, читается «Разность множеств А и В»
$A \cap B$	Символ пересечения, читается «Пересечение множеств А и В»	$A \cup B$	Символ объединения, читается «Объединение множеств А и В»
$\varnothing$	Символ пустого множества	$n!$	Символ факториала
$n = \overline{1, N}$	Краткая запись, означающая, что n принимает натуральные значения $n = 1, 2, ..., N$	$\sum$ $\sum_{n=1}^{N} a_n$	Сумма $\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + .. + a_N$
$A: X \rightarrow Y$	Отображение множества Х в множество У	$X \times Y$	Декартово произведение множеств Х и У
$\frac{df}{dx}$	означает «(первая) производная функции f от x по переменной x	$\frac{d^n f}{dx^n}$	Читается «n-ая производная функции f по переменной x»

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ИНТЕРЕСНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧКИ

1. Перемножив 4 простых последовательных числа, Нина получила число, в котором 0 единиц. Какой результат получила Нина?

2. Сколько в ряду от 1 до 100 таких чисел, каждое из которых делится на три, но в своей записи не имеет цифры 3?

3. Человек сказал, что прожил 44 года, 44 месяца, 44 недели, 44 дня и 44 часа. Сколько ему лет?

4. 11 кроликов посадили в 10 ящиков. Докажите, что в каком-то ящике сидит хотя бы 2 кролика.

5. Монета выпадает орлом или решкой с одинаковой вероятностью 50 %. В эксперименте подбросили монету 10 раз и все 10 раз выпал орел. Какова вероятность того, что и на одиннадцатом броске выпадет орел?

6. В коробке лежат 5 белых, 8 красных и 13 черных шаров. Какое минимальное число шаров нужно вытащить (вслепую), чтобы там было по меньшей мере два шара одного цвета?

7. В клетке живут фазаны и кролики. всего у них 19 голов и 62 ноги. Сколько фазанов живет в клетке?

8. В классе учится меньше 50 учащихся. За контрольную работу седьмая часть учащихся получила пятерки, третья – четверки, половина – тройки. Сколько работ было сделано на двойку?

9. Найдите наименьшее число, кратное 36, в записи которого встречаются все 10 цифр по одному разу.

10. В бригаде 7 человек, и их суммарный возраст – 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

11. Семену подарили новый смартфон, и он закачал туда сразу до полутораста игр (определённо, никак не меньше ста). 80 % игр бесплатные, 1/9 – условно платные, остальные платные. Сколько платных игр скачал Семен?

12. Профессионал выполняет работу за 5 часов, стажёр за 10 ч. А за какое время справится специалист, производительность которого – среднее арифметическое от производительности профессионала и стажера?

13. Что больше – десять в пятой или пять в десятой?

14. В ящике лежат красные и черные носки. Если из ящика наудачу вытягиваются два носка, то вероятность того, что они оба красны 0,5. Каково минимальное возможное количество носков в ящике? Каково минимальное возможное число носков в ящике, если число черных носков четное?

15. Сколько в среднем раз надо бросать кость до появления шестерки?

16. Восемь юношей и семь девушке независимо приобрели билеты в одном и том де театральном ряду, насчитывающих 15 мест. Какое среднее число смежных мест занимают в ряду пары?

17. Из хорошо перетасованной колоды на стол последовательно выкладываются карты лицевой стороной наверх, после чего аналогичным образом выкладывается вторая колода, так что каждая карта первой колоды лежит под картой второй колоды. Каково среднее число совпадений нижней и верхней карт?

18. Два мальчика играют в кости. Каждый бросает две кости. Петя выигрывает партию, если при 20 бросках два раза в сумме появляется 11 очков. Саша выиграет, если при десяти бросках два раза в сумме появляется девять очков. Чья удача более вероятна в партии?

19. Три супружеские пары должны перебраться через реку, в их распоряжении одна небольшая лодка, которая вмещает лишь двоих. Все трое мужей крайне ревнивы, ни один из них не готов оставить свою жену с другими мужчинами ни при каких обстоятельствах (даже в присутствии их жен). Сумеют ли они переправиться через реку, и если да, то за сколько рейсов?

20. На столе лежат 25 спичек. Играют двое. Игроки по очереди могут взять от одной до четырех спичек. Кто не может сделать ход (т.к. спичек не осталось), проигрывает. Другими словами, выигрывает взявший последнюю спичку. Выясните, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

21. Двое играют в такую игру: по очереди слева направо пишут цифры 20-значного числа. Задача первого игрока (он записывает 1-ю, 3-ю, 5-ю и т.д. цифры) – сделать так, чтобы итоговое число не делилось на 7, второго – чтобы наоборот, делилось. У кого из игроков больше шансов выиграть?

22. В одной коробке конфет 5 конфет, в другой 7. За один ход можно взять и съесть любое количество конфет, но только из одной коробки. Проигрывает тот, перед ходом которого кончатся конфеты. Кто выигрывает при правильной игре?

23. Игра «Попытай счастья» проводится по таким правилам: вы делаете ставку на какое-то число (от 1 до 6), выбрасываются три игральных кубика, если на одном из них выпало загаданное вами число, вам возвращается первоначальная ставка плюс еще столько же, если на двух кубиках – возвращается ставка плюс выигрыш (удвоенный размер ставки), если сразу на трех кубиках, то вы получаете первоначальную ставку плюс ее утроенный размер. Справедлива ли эта игра?

24. Вы купили три лотерейных билета. Последовательно открываете билеты и смотрите размер выигрыша. По правилам лотереи вам вручат только тот приз, который указан на последнем открытом билете. Как обеспечить себе максимальный выигрыш?

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ЧТО ДЕЛАТЬ, ЕСЛИ НЕ УДАЕТСЯ РЕШИТЬ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ?

«Нелегко искать нужную вещь в темноте. Бывает, и не найдешь. А с фонариком – другое дело. Освоив рекомендации, легче вести поиск решения задачи. Проверено на практике».
В.М. Финкельштейн

(По материалам замечательных книг В.М. Финкельштейна Что делать, когда не задачу не удается. – 4-е изд., перераб. – М.: ИЛЕКСА, 2008. – 74 с., Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий Как научиться решать задачи. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.)

– Что делать, когда решить задачу не удается?

– Не отчаиваться, а проявить настойчивость! Основательно изучить условие задачи, ответив на вопросы: «Какое из условий задачи я не использовал? Верно ли я понимаю каждое условие и требование? Как можно найти конечный результат?». Подумать: «Какие формулы, определения, теоремы, аксиомы я не использовал? Возможно, мне неизвестны какие-то свойства, признаки заданных и искомых объектов».

– А если и это не помогает?

– Вновь и вновь возвращаться к решению этой задачи.

Чтобы научиться решать задачи, их нужно решать. Однако, опыт решения учащимися математических задач позволил педагогам сформулировать четыре группы рекомендаций в соответствии с основными этапами решения задач.

Этап 1: изучите задачу! Для этого рекомендуем:

1. Узнать, что дано: какие заданы математические объекты (элементы), как они связаны между собой. Вспомнить, все что о них известно (их свойства и признаки).
2. Разделить все, что дано, на отдельные части – их называют условиями задачи.
3. Понять, что надо найти или доказать: какие объекты требуется определить, как они связаны между собой, как они связано с данными объектами, какое свойство надо установить. Вспомнить все, что о них известно.
4. Разделить все, что надо найти, на отдельные части – их называют требованиями, или вопросами, задачи.
5. Понять, как выглядит конечный результат, что он собой представляет, от чего зависит. Определить, что КОНКРЕТНО надо найти.
6. Записать условие и требование задачи в математической символике и проверить, все ли они записаны.
7. Убедиться, что поняты каждое слово, каждый термин текста задачи.
8. Если данные или искомые элементы не обозначены, обязательно ввести подходящие обозначения для символической записи всех условий и требований.
9. Построить модель задачи: нарисовать схему, чертеж, составить уравнение.

Этап 2: ищите идею решения задачи! Для этого рекомендуем:

1. Вспомнить, встречалась ли раньше близкая задача. В чем сходство с данной, в чем отличие?
2. Продумать, какие формулы, теоремы, определения могли бы пригодиться.
3. Выдвинуть несколько гипотез о первом, о следующем шаге, о способе решения в целом, а затем оценить, по возможности, перспективность и ценность этих гипотез.
4. Попытаться преобразовать исходные данные, найти следствия из условия задачи.
5. Попытаться решить задачу от начала к концу, т.е. получив следствия из условия задачи, выбрать из них то, которое быстрее даст результат.
6. Преобразовать конечный результат, найти вывод, из которого его можно получить.
7. Решать попеременно от конца и от начала, используя полученные результата.
8. Ввести новые переменные.
9. Сделать дополнительное построение.
10. Решить сначала более простую задачу, или более общую, или похожую задачу с другими условиями.
11. Рассмотреть частные или предельные случаи.
12. Перебрать все возможные случаи.
13. Применить векторно-координатный метод.
14. Применить метод от противного.
15. Использовать метод математической индукции.
16. Переформулировать задачу.

Этап 3: осуществите план решения, обоснуйте его и сделайте проверку! Для этого рекомендуем:

1. Проверить, нет ли явных ошибок в плане, нет ли лишних действий.
2. Попутно с осуществлением плана провести обоснование каждого шага и проверить все вычисления и преобразования, промежуточные результаты.
3. Проверить все ли возможные результаты рассмотрены.
4. Проверить все ли условия использованы, все ли требования выполнены.
5. Не противоречит ли результат здравому смыслу.

Этап 4: проведите анализ решения. Для этого рекомендуем:

1) Исследовать решение, т.е. выяснить при каких условиях решение существует и при каких нет, сколько возможно различных решений.
2) Составить подобную, обратную, более общую задачу.
3) Попытаться найти другие способы решения, сравнить их и выбрать наилучший.
4) Оценить ценность задачи, т.е. определить возможные применения полученного результата, найденного способа решения.

Этап 5: Похвалите себя за успешное решение задачи, насладитесь своим успехом! Запомните эту задачу. Проанализируйте, какие именно Ваши мысли и действия были наиболее удачными? Если были ошибки, то в чем именно они заключались. Дайте себе совет, что делать в будущем, если Вам встретится похожий класс задач. И, еще раз, похвалите себя! **Вы – МОЛОДЕЦ!!!**

Оглавление

Учебное издание
Кислякова Мария Андреевна

Вводный курс математики

Учебное пособие

Дизайнер обложки *Е.И. Саморядова*
Отпечатано с авторского оригинал-макета

Подписано в печать 18.12.18. Формат 60x84 $_{1/8}$. Бумага писчая. Гарнитура «CMU Serif». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 11**,55**. Тираж 100 экз. Заказ

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.