Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тихоокеанский государственный университет»

Ю. В. ЖУЛИДОВА
М. А. КИСЛЯКОВА

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАЦИОННОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ: АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Монография

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2020

УДК 37.016:51
ББК Ч426.221
Ж873

Рецензенты:
канд. пед. наук, доц. кафедры информационных систем и технологий
Ярославского государственного технического университета
А. В. Никитенко;
канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН ДВО РАН
М. Д. Монина

Научный редактор
канд. физ.-мат. наук, д-р пед. наук, проф. *А. Е. Поличка*

Жулидова, Ю. В.
Ж873 Современные проблемы информационного и математического образования: актуальные вопросы методики обучения математике : монография / Ю. В. Жулидова, М. А. Кислякова ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Тихоокеанский государственный университет. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2020. – 127, [1] с.
ISBN 978-5-7389-3208-3

В первой части монографии отражены исследования основных вопросов методики обучения математики, приведены основные разделы методики обучения математики, описан ее научный статус, описаны основные подходы к определению методики и технологии обучения математике, приведен обзор современной литературы по методике обучения математике.

Во второй части монографии описан подход к обучению учащихся решению одного из самых сложных типов задач – задач с параметрами. Выделено три метода решения задач, описаны ключевые примеры, разобраны наиболее сложные случаи. Сделан обзор литературы по проблеме методики обучения решению задач с параметрами.

Предназначено для студентов, преподавателей, аспирантов, всех интересующихся математикой и методикой ее преподавания в среднем образовании.

УДК 37.016:51
ББК Ч426.221

ISBN 978-5-7389-3208-3

ВВЕДЕНИЕ

Обучение математике на всех этапах образования человека занимает важную позицию. Развитие личности учащегося, формирование его мышления, мировоззрения, системы правильных понятий – все это задачи методики обучения математике.

Исторический опыт преподавания математических дисциплин на всех ступенях математического образования показал, что математические дисциплины обладают огромным педагогическим потенциалом для становления личности учащегося. Обучение математике существенным образом влияет на обогащение интеллекта учащегося, на формирование его логических умений, на развитие его творческих способностей.

Целью математического образования является создание условий для развития математически грамотной личности учащегося, который сможет эффективно решать профессионально и личностно значимые задачи с применением математических методов. Важно понимать значение математической деятельности в обогащении ментального опыта учащегося на каждом уровне его образования. Недостаточное внимание к математической подготовке школьника приведет к снижению его интеллектуальной активности, недоразвитости основных психических функций, сужению возможностей выбора будущей профессиональной деятельности.

Однако на пути к реализации педагогического потенциала математических дисциплин стоят сформировавшиеся за многие годы трудности математического образования [16]. Среди политических, экономических, социальных и других трудностей математического образования, можно выделить психолого-педагогические и методические трудности обучения математике.

Психолого-педагогические трудности обучения математике связаны:

– с особенностями мотивационной сферы учащихся (неправильное негативное отношение к математике, отсутствие познавательного интереса);

– с недостатками в развитии познавательной сферы в области математики (интеллектуальная пассивность, познавательные барьеры, плохое усвоение математического учебного материала, непонимание учебного материала);

– с недостаточным включением рефлексивных стратегий в учебную математическую деятельность (неумение настраивать себя на работу, неумение оценивать собственные интеллектуальные ресурсы, незнание своих познавательных особенностей, неумение преодолевать математическую тревожность, проявляющуюся как апатия, неуверенность скованность, беспомощность);

– несформированными общеучебными умениями и навыками (неумение работать с математической книгой, неумение задавать вопросы, неумение самостоятельно организовывать свою деятельность, недисциплинированность).

В реальной действительности при обучении математике наряду с психолого-педагогическими трудностями возникают методические трудности обучения математике, связанные:

– с наличием пробелов в знаниях и умениях учащихся (несформированность основных математических понятий и умений, нет опыта решения разнообразных математических задач, сформированная привычка при решении задач действовать только по указаниям учителя);

– с отбором содержания обучения в соответствии с общедидактическим принципами обучения (систематичность, последовательность, профессиональная направленность, доступность и т.д.);

– с недостаточным количеством времени на индивидуализацию и дифференциацию обучения учащихся в соответствии с их индивидуальными различиями;

– с оптимальным сочетанием традиционных и инновационных подходов к методике обучения разным математическим разделам;

– с организацией самостоятельной работы учащихся по математике;

– с оценкой результатов освоения математики.

Особо выделяются методические трудности обучения решению математических задач, вызванные, как правило, тремя основными факторами. В основе первого фактора, лежит не сформированность у учащихся обобщенного алгоритма решения математических задач, что проявляется в неумениях:

– записывать схематично условие задачи и работать с ним;

– искать аналогии и закономерности в формулировках задач и методах их решения;

– соотносить условия задачи с известными теоретическими положениями (искать и пользоваться формулами, определениями, правилами, теоремами, которые связывают данные в задаче);

– логично рассуждать;

– искать и исправлять собственные ошибки,

– работать с готовыми примерами задач с решениями, позволяющие составлять алгоритмы для решения типовых задач».

Вторым, наиболее частым фактором, препятствующим эффективной методике обучения решения задач является наличие знаниевых пробелов по конкретной математической теме: неумение строить график функции, незнание формул тригонометрии, не умение применять формулы сокращенного умножения для преобразования алгебраических выражений, не знание формул для вычисления площади треугольника и т.д.

Третьим фактором являются недостаточно сформированные математические умения, необходимые для решения задач. Например, неумение выполнять арифметические действия с обыкновенными дробями будет служить причиной неуспеваемости учащегося по теме «Решение текстовых задач арифметическим способом».

Перечисленные трудности существенным образом влияют на процесс обучения математике и препятствуют эффективной реализации педагогического потенциала математики в развитии личности учащегося [16].

Одним из выходов из сложившейся ситуации является эффективная подготовка будущих учителей в высшем образовании и повышение качества работы учителей. Ориентация в первую очередь на методическую подготовку учителей позволит создать условия для роста личности профессионала учителя со своей собственной неповторимой авторской методической системой обучения математике.

Таким образом, возникает необходимость научно-методологического осмысления ***методики обучения математике*** с точки зрения развития современных педагогических технологий, данный этап развития общества характеризуется стремительным возрастанием объема научной информации и высокоинтеллектуальными технологиями общественного производства. В этой ситуации заметно активизировался поиск инновационных моделей математического образования. Разработана национальная доктрина, федеральная программа и концепция содержания математического образования, сформировано новое поколение государственных образовательных стандартов. Однако за стандартными «знать и уметь» мы должны видеть и процесс формирования личности учащихся в математическом образовании.

Настало время осмысления теоретических основ профессионально-методической подготовки педагогических кадров как сложных самоорганизующихся и саморазвивающихся систем, пронизанных идеей развивающего, личностно ориентированного обучения, идеей взаимозависимости и взаимосвязи всех образовательных ступеней.

В первой главе преподавателем М.А. Кисляковой описаны основные вопросы методики обучения математики и пути их решения за счет обращения к психологическим основам обучения математике и зарекомендовавшим себя педагогическим подходам.

Во второй главе преподавателем Ю.В. Жулидовой рассмотрены разные подходы к методике обучения решению задач с параметрами. Автор обосновывает необходимость выделения трех основных методов решения рассматриваемого типа математических задач. Ю.В. Жулидова выделила типовые задачи, методы их решения и привела яркие, демонстрационные примеры с решениями.

ГЛАВА 1
ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

1.1. Предмет теории и методики обучения математике как научной области

Является ли методика обучения математике наукой или искусством?

Почти столетие специалисты в области математического образования задаются вопросом: является ли методика обучения математике наукой или искусством?

В.Н. Садовников, анализируя исторический подход к развитию методики обучения математике на основании трудов Г.И. Саранцева, В.М. Брадиса, Ю.М. Колягина, Р.С. Черкасова, А.А. Столяра, Н.М. Рогановского, А.М. Пышкало, приходит к следующим выводам.

На данном этапе развития методика обучения математике видится специалистами как «сформировавшаяся самостоятельная научная область, предметом исследования которой является методическая система обучения математике, находящаяся под влиянием внешней среды» [27, с. 1018].

Г.И. Саранцев дает более широкое понимание предмета: «предметом методики обучения математике является специальная методическая система (понятие введено А.М. Пышкало), составляемая целями и содержанием математического образования, методами, средствами и формами обучения» [28, с. 31].

Методика обучения математике как научная область включает в себя методологию, теорию и ее приложения. «Методологию методики обучения математике составляют:

– диалектика и теория познания;

– деятельностный подход и системный анализ;

– концепции обучения, развития и воспитания;

– объект и предмет теории обучения математике;

– конструирование методических систем и описание их внешних сред, положения, связывающее внешнюю среду с исследуемой методической системой;

– методы методического исследования;

– практика обучения математике» [27, с. 1018].

Структура научной области обуславливает структуру методической деятельности учителя, составляемой:

– деятельностью по формированию методологии науки;

– деятельностью по исследованию методической системы обучения математике;

– деятельностью по разработке конкретных методик;
– деятельностью по организации учебного процесса.

В связи с этим, часто на методику обучения математике смотрят с позиции системного подхода. В настоящей работе сделаем акцент на исследовании методической системы обучения математике с позиции исследования образовательных систем.

Традиционно, методика обучения математике отвечала на три вопроса: зачем обучать математике, чему учить и как обучать математике?

В.И. Панов, разрабатывая особенности проектирования и экспертизы образовательных технологий и систем, считает, что эту триаду необходимо дополнить еще такими вопросами: кого учить математике? как проверять результаты обучения? кто будет обучать математике? где будут обучать математике? [23, с. 116].

Для ответов на поставленные вопросы методика обучения математике обращается к различным областям знаний (рис. 1.1). На вопрос: «***Кого учить?»*** – отвечает психология математического образования, раскрывающая особенности возрастных периодов изучения математики, особенностей формирования математического мышления, особенностей развития интеллекта в процессе изучения математики. Вопрос: «***Зачем учить?»*** обращает исследователей к целям математического образования. Вопрос: «***Чему учить?»*** обращен к формированию содержания математического образования. Вопрос: «***Как учить?»*** затрагивает всю систему образовательной коммуникации, включая современные образовательные технологии, информационно-коммуникационные технологии и ве6сь педагогический опыт преподавания математики. Вопрос: «***Как проверять результаты обучения?»*** раскрывается в теории педагогических измерений. На вопрос: «***Кто и где будет учить?»*** отвечают требования к учителю математики, к месту и форме обучения.

Рис. 1.1. Основные вопросы методики обучения математике

Вопросы, ответы на которые вынуждена искать методика обучения математике говорит о том, насколько широк предмет ее изучения. Как верно заметил Н.В. Метельский «термин “методика” уже слишком узок для современной проблематики данной науки» [22].

В своих исследованиях и выводах методика обучения математике опирается на философию, логику, педагогику, психологию, математику и обобщенный практический опыт учителей математики.

Философия разрабатывает методы познания, которые используются в педагогических, методических исследованиях и в обучении математике: системный подход (компоненты методики преподавания математики и их взаимосвязь); методы научного познания (аналогия, обобщение, конкретизация, абстрагирование и т. д.); философские законы; диалектический метод познания.

Логика исследует законы «правильного» мышления. Такие понятия, как выражение, теорема, доказательство, уравнение, правило вывода, являются логическими понятиями. Доказательства математических утверждений базируются на логических действиях. Формирование математических понятий осуществляется на основе логических законов.

Методика преподавания математики тесно связана с педагогикой, в частности, с дидактикой. В дидактике основным отношением, характеризующим обучение, является «преподавание – учение», в методике – «преподавание – учебный материал – учение». Педагогика определяет методы обучения, цели воспитания, методы научного исследования. Взяв за основу эти методы и цели из педагогики, методика вносит как в учебный процесс, так и в научные исследования свое конкретное математическое содержание.

Методика обучения математике ориентируется на возрастные особенности учащихся, на закономерности развития личности учащихся, на индивидуальные особенности школьников. Влияние психологии на методику обучения математике усиливается в связи с повышением роли психолого-ориентированных педагогических концепций обучения. Основная идея которых заключается в переориентировании образовательного процесса с учебного предмета на личность ученика, процессы его саморазвития, самопознания, поиски своего места в жизни – ставятся центральной идей построения методических систем обучения.

Методика обучения математике связана с историей математики. История развития математических понятий и открытий тесно связана с историй всего человечества. Вся история развития математики и математического образования придает математическим знаниям личностно значимый характер.

Информатика – наука, изучающая процессы получения, хранения, преобразования, передачи и использования информации. В последнее время, в связи с развитием информатики, усиливается ее влияние на методику обучения математике: формируется определенный стиль мышления, связанный с использованием компьютера, кодированием информации; применяются информационные технологии, ориентированные на повышение эффективности обучения математике, разрабатываются технологии оптимизации обучения математике.

Таким образом, методика обучения математике связана со множеством областей, которые оказывают влияние на ее структуру, методы познания и практические приложения.

В самой методике обучения математике принято выделять три раздела: общая методика, частная методика и конкретная методика.

1. Общая методика обучения математике включает себя вопросы дидактики, адаптированные к процессу обучения математике: формы, методы и средства обучения *математике*, например: технологии проектного обучения *математике*, развивающие методы обучения *математике*, урок как основная форма организации обучения математике, математическая задача как средство обучения *математике*, применение информационных технологий для оптимизации процесса обучения *математике* и т.д.

2. Специальная или частная методика обучения математике включает в себя изучение содержательно-методических линий в школе, например: методика изучения числовой линии, методика изучения тригонометрии, методика изучения круглых тел и т.д.

3. Конкретная методика обучения математике состоит из частных вопросов общей или специальной методики обучения математике, например: методика обучения решению текстовых задач арифметическим методом, методика обучения решению квадратных уравнений, методика обучения учащихся построению графиков функций, содержащих знак модуля.

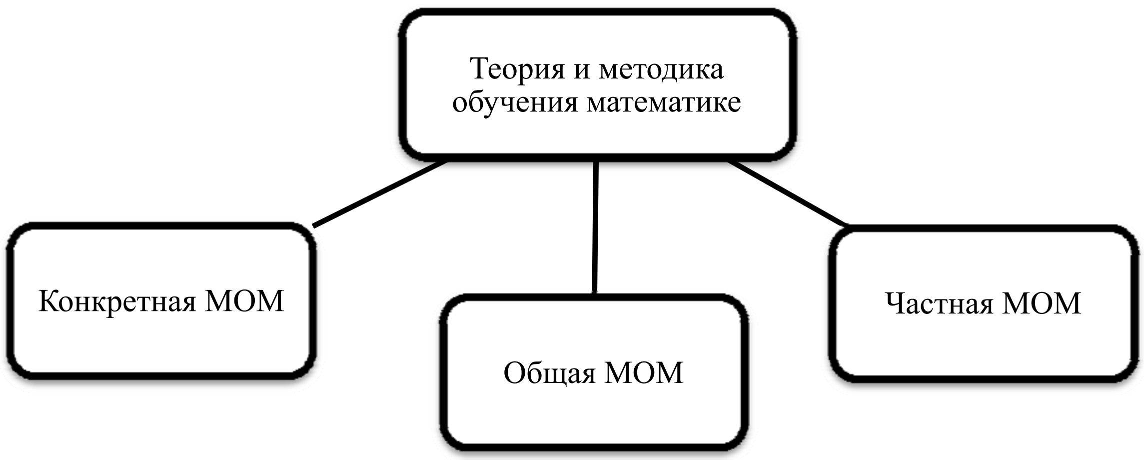


Рис. 1.2. Разделы методики обучения математике

Хотя методика обучения математике получила научный статус самостоятельной науки, имеющей свой предмет изучения и свои методы исследования, сомнения в ее научном статусе не беспочвенны.

Во-первых, это связано с тем, что теория методики обучения математике недостаточно разработана, и, в настоящее время итогом ее функционирования являются методические рекомендации, которые являются результатом обобщения практики школьного обучения.

Во-вторых, развитие методики обучения математики как научной области осуществляется под влиянием внешней среды.

В-третьих, методика обучения математике сильно зависит от теорий, доказанных и принятых в различных областях науки, что затрудняет формирование ее терминологического аппарата.

В-четвертых, в методике обучения математике существуют сложно разрешимые проблемы, такие как

– ***стандартизация математического образования***, которая ограничивает реализацию педагогического потенциала математических дисциплин, в приоритет ставится формирование математической грамотности, а не гармоничное развитие личности ребенка средствами математики;

– проблема ***организации дифференциация и индивидуализация*** содержания образования в условиях стандартизации;

– проблема разработки методического обеспечения преподавания математики в условиях частого обновления содержания школьного математического образования;

– проблема слабой организации межпредметных связей;

– проблема несовершенной система контроля и оценки знаний учащихся при обучении математике;

– проблема кадрового обеспечения учебного процесса, а также региональные особенности математического образования и др.

Вместе с тем, методика обучения математике является тем замечательным примером квинтэссенции философии, социологии, медицины, психологии, педагогики, математики, информатики, который показывает, как достижения современных наук могут помочь раскрыть потенциал ребенка в образовательном пространстве.

В настоящее время приоритетными направлениями научных исследований в области теории и методики обучения математике являются: методология математического образования, цели и ценности математического образования, технологии обеспечения и оценки математического образования, теория внеурочной учебной воспитательной работы по математике и т.д.

1.2. Психологические основы методики обучения математике

Кого учить математике?

В качестве системообразующего фактора для проектирования и моделирования образовательной среды в условиях общего образования выделяется индивидуально-типологическая разнородность контингента учащихся [23, с. 117].

В основе разработки авторской методической системы обучения математики лежат представления учителя о психологических особенностях развития личности учащихся.

Психология математического образования – раздел, в котором представлены возрастные особенности учащихся, описаны особенности развития когнитивной и эмоциональной сферы учащихся при изучении математики, развитие интеллектуальных способностей. Как было отмечено во введении, основными трудностями математического образования являются именно психолого-педагогические трудности, об этом же свидетельствует и практика математического образования. На рис. 1.3. представлены некоторые направления исследования в психологии математического образования.

Рис. 1.2. Некоторые направления исследований в психологии математического образования

Психологические основы учебной математической деятельности включают:

– особенности развития и функционирования мозга человека;

– познавательные психические процессы;

– рефлексивные механизмы;

– особенности состава и строения ментального опыта человека;

– характеристику математической деятельности;

– математические способности;

– возрастные особенности учащихся при изучении математики.

Психологические трудности, возникающие у учащихся, при изучении математики можно свести к шести основным проблемам:

–низкий уровень мотивации к изучению математики и проблема развития интереса к математике;

– феномен познавательных барьеров при изучении математики;

– феномен математической тревожности при прохождении контрольных мероприятий;

– включенность рефлексивных умений в математическую деятельность;

– организация самостоятельной работы учащихся при изучении математики;

– специфика восприятия и усвоения алгебраического и геометрического материала.

Овладение математической деятельностью поликазуально по своей природе и подвержено влиянию различных факторов.

Во-первых, на процесс усвоения математики существенным образом влияют нейропсихологические факторы, которые заключатся в особенностях онтогенеза мозга ребенка. В последние годы в педагогической практике отмечен значительный рост количества учащихся, для которых усвоение школьной программы по математике представляет трудности. Известно, что все психологические процессы имеют сложное многокомпонентное строение, опираются на работу многих мозговых структур, каждая из которых вносит свой вклад в их протекание. В связи с этим каждая трудность может иметь место при дисфункции различных отделов головного мозга.

Вторым фактором, оказывающим существенное значение на процесс обучения математике, является уровень развития познавательных психических процессов ребенка. Под когнитивными функциями понимаются наиболее сложные функции головного мозга, с помощью которых осуществляется процесс рационального познания мира и обеспечивается целенаправленное взаимодействие с ним. К таким функциям относятся восприятие информации (гносиз), ее анализ и обработка (так называемые исполнительные функции), хранение информации (память) и передача информации (праксис и речь). О когнитивных нарушениях говорят в тех случаях, когда отчается нарушение одной или более вышеуказанных функций. В процесс освоения математических знаний вовлечены мышление, память, внимание, речь, и от уровня их развития зависит успешность освоения математики.

Так, например, проблема внимания учащихся при решении математических задач стала центральной при изучении психофизиологических механизмов познавательных процессов. *Внимание* включено в контекст изучения механизмов регуляции уровня бодрствования, функций модулирующей системы мозга, проблемы сознания, а также изучается в связи с выявлением факторов, влияющих на эффективность обучения математике.

В самом общем понимании *внимание* определяют, как сосредоточенность деятельности субъекта в данный момент времени на каком-либо реальном или идеальном объекте (предмете, событии, образе, рассуждении и т.д.). К характеристикам внимания относят его селективность или избирательность (направленность на объект), объем (количеством одновременно отчетливо осознаваемых объектов), устойчивость, возможность распределения и переключения.

В отличие от памяти регулирующая функция внимания выступает более отчетливо, что дает основание для классификации его видов в зависимости от уровней психической регуляции.

Выделяют три вида внимания: непроизвольное, произвольное и послепроизвольное. Непроизвольным называется такое внимание, которое возникает под влиянием новизны раздражителей. При произвольном внимании мы заставляем себя сосредоточиться на том, что не привлекает нашего внимания, не вызывает интерес. Другими словами, произвольное внимание – это такое внимание, которое возникает под влиянием сознания и волевого усилия. Послепроизвольное внимание – сознательное выполнение какой-либо задачи сопровождается поглощением личности данной деятельностью и не требует волевых усилий.

Одним из основных психологических факторов, влияющих на усвоение математики, является – ***уровень умственного развития детей***. М.А. Холодная под умственным развитием понимает систему психических механизмов, которые обуславливают возможность субъективной картины происходящего.

Наиболее детально изучение умственного развития в образовательном процессе представлен в работах Н.А. Менчинской и З.И. Калмыковой, они рассматривали природу интеллектуальных способностей через легкость-трудность усвоения учебного материала, через способность к приобретению новых знаний. В понятии «умственное развитие» ими выделялись два уровня: фонд усвоенных знаний и обучаемость как способность к их приобретению.

В связи с этим процесс дифференциации обучения математике по психологическим основаниям уже не является каким-то инновационным подходом к обучению, скорее это жесткая необходимость.

В методике обучения математике под дифференциацией понимают такую систему обучения, при которой каждый ученик, овладевая некоторым минимумом общеобразовательной подготовки, являющейся общезначимой обеспечивающей возможность адаптации в постоянно изменяющихся жизненных условиях, получает право и гарантированную возможность уделять преимущественное внимание тем направлениям, которые в наибольшей степени отвечают его склонностям [9, с. 16].

Кого можно учить математике? Существует ли идеальная дифференциация учащихся, позволяющая учесть особенности всех учащихся? В разное время эту проблему исследовали в своих работах различные авторы: А.А Бударный, З.И. Калмыкова, Е.С. Рабунский, И.Э. Унт, Р.А. Утеева, И.М. Чередов, Н.М. Шахмаев и др., в их работах дифференциация проводится по разным основаниям.

Во-первых, всех, изучающих математику, можно разделить по возрастному признаку. Возрастные особенности изучающих математику заключаются в выявлении особенностей: познавательной сферы, эмоциональной сферы, развития регуляторной сферы, ментального опыта учащегося. По возрастному признаку изучающих математику можно разделить на:

– дошкольников (3–7 лет);
– младших школьников (7–12 лет);
– школьников среднего звена (12–15 лет);
– старшеклассников (13–18 лет);
– студентов в возрасте от 18 до 21 года;
– студентов среднего возраста от 22 до 35 лет;
– студентов среднего возраста от 36 до 55 лет;
– пожилые люди старше 55 лет[1].

Так, например, для учащихся пятых-шестых классов характерно усиление независимости детей от взрослых, характерно стремление противостоять, не поддаваться любым влияниям, предложениям, суждениям, чувствам взрослых. Нормы поведения, установленные взрослыми, отходят на второй план, важное значение приобретают дружеские отношения со сверстниками и поиск авторитета для подражания. Следовательно, учитель математики должен предусматривать различные виды групповой работы.

Очень шаткая самооценка пятиклассников зависит в том числе и от оценки учителем школьных способностей. Оскорбления, унижения и насмешки над непониманием математики могут привести к формированию математической тревожности.

У детей в этом возрасте особенно обостряется чувство собственного достоинства, если неосторожно затронуть его, то школьник замыкается в себе, ограждается, отказываясь от всяческой педагогической помощи.

[1] В соответствии с возрастной классификацией.

Очень важно создать обстановку эмоционального комфорта, в которой школьник, еще не полностью осознавая свои трудности, мог бы обратиться к учителю математики. Так же важно иметь ввиду, что недостаточная познавательная активность в сочетании с быстрой утомляемостью пятиклассников серьезно тормозит его обучение и развитие, поскольку объем рабочей памяти недостаточен для изучения математики. Вместе с тем, в этом возрасте наблюдается процесс резкого возрастания познавательной активности и любознательности к окружающему миру, зачастую не входящего в школьную программу.

У многих шестиклассников снижается самооценка из-за телесных, сексуальных изменений, неуверенности в своей взрослости. Поэтому важно подчеркивать ценность и уникальность каждого учащегося, повышать его самоуважение.

Каждому возрастному периоду развития человека присущи свои, характерные особенности, учет которых необходим при проектировании авторской методической системы обучения математике.

Далее, учащихся на каждом этапе обучения математике можно разделить по успеваемости: неуспевающие, успевающие, отлично успевающие с признаками одаренности к математической деятельности.

Неуспевающих школьников можно дифференцировать, выделяя разные типы. Так, например, Н.И. Мурачковский выделяет три типа неуспевающих и шесть подтипов.

I тип неуспевающих школьников характеризуется низким качеством мыслительной деятельности и положительным отношением к математике. II тип неуспевающих школьников характеризуется высоким качеством мыслительной деятельности и отрицательным отношением к изучению математики. III тип неуспевающих школьников – учащиеся с низким качеством мыслительной деятельности и беспечным или отрицательным отношением к изучению математики [20, с. 146–147].

Для отнесения учащихся к той или иной категории используется система диагностических процедур, определенных по следующим критериям:

– критерий развития когнитивных (познавательных способностей);

– критерий развития эмоциональной сферы;

– критерий развития мотивационной сферы;

– критерий развития рефлексивных умений;

– критерий уровня сформированности математических знаний и умений;

– критерий развития обобщенного умения решать задачи;

– критерий математической грамотности;

– критерий развития математических способностей.

Заметим, что дифференциация учащихся по возрасту и по успеваемости является объективной необходимостью при построении процесса обучения математике. Научные исследования и практический опыт школьного математического образования показали, что «каждый учащийся умен по-своему».

Дифференциацию учащихся и соответственно выстраивание методической системы можно проводить и с позиции культурно-исторического подхода. С этих позиций в условиях школьного математического образования личность школьника рассматривается в единстве трех компонентов: *математические способности, интерес к математике, желание учиться*; завершает конструкцию осознание учеником своих личностных качеств, выражающееся в *самоконтроле*:

— *математические способности* определяются как индивидуально-психологические свойства, обеспечивающие успешность математической деятельности, и относятся к специальным способностям, в отличие от общих, например, познавательных способностей;

— *интерес к математике* представляет собой ведущий мотив (или отсутствие такового), который определяет основные тенденции поведения личности в процессе обучения математике;

— *желание учиться* рассматривается как совокупность морально-нравственных и волевых свойств человека, обеспечивающих волевой характер учебной деятельности. Волевые качества включают настойчивость, самообладание, трудолюбие, которые обеспечивают определенный стиль поведения личности при решении математических задач; этот блок включает *самоконтроль* как особый род активности, связанной с осознанием личностью самой себя и отвечающей за произвольное усиление или ослабление деятельности [29, с. 148–149].

Некоторые педагоги дифференцируют учащихся по наличию интереса к математике и его отсутствия, говоря о том, что без наличия положительной мотивации строить процесс обучения математике бессмысленно.

Проблема заключается в том, что современные школьники не мотивированы на изучение математики, учащиеся не видят смысла изучать математику. Основные причины ясны: нет познавательного интереса к математической деятельности (зачем изучать то, что давно делают компьютеры), наличие познавательных барьеров, сложности в понимании математического материала, конфликтные отношения с учителем и родителями.

Получается парадоксальная ситуация, все вокруг говорят «математику надо изучать», а для чего надо и кому надо ребенку не объясняют, как следствие – ребенок на протяжении многих лет под принуждением и под давлением занимается тяжёлой интеллектуальной работой, а смысла в этом не видит. Первостепенная задача психологов и педагогов разобраться в причинах негативного отношения к математике и предложить систему формирования положительных мотивов.

Говоря кратко, все разнообразие мотивов можно представить познавательными и социальными мотивами, которые могут быть вызваны внутренними или внешними факторами. На рис. 1.4. приведены примеры мотивов к изучению математики [11].

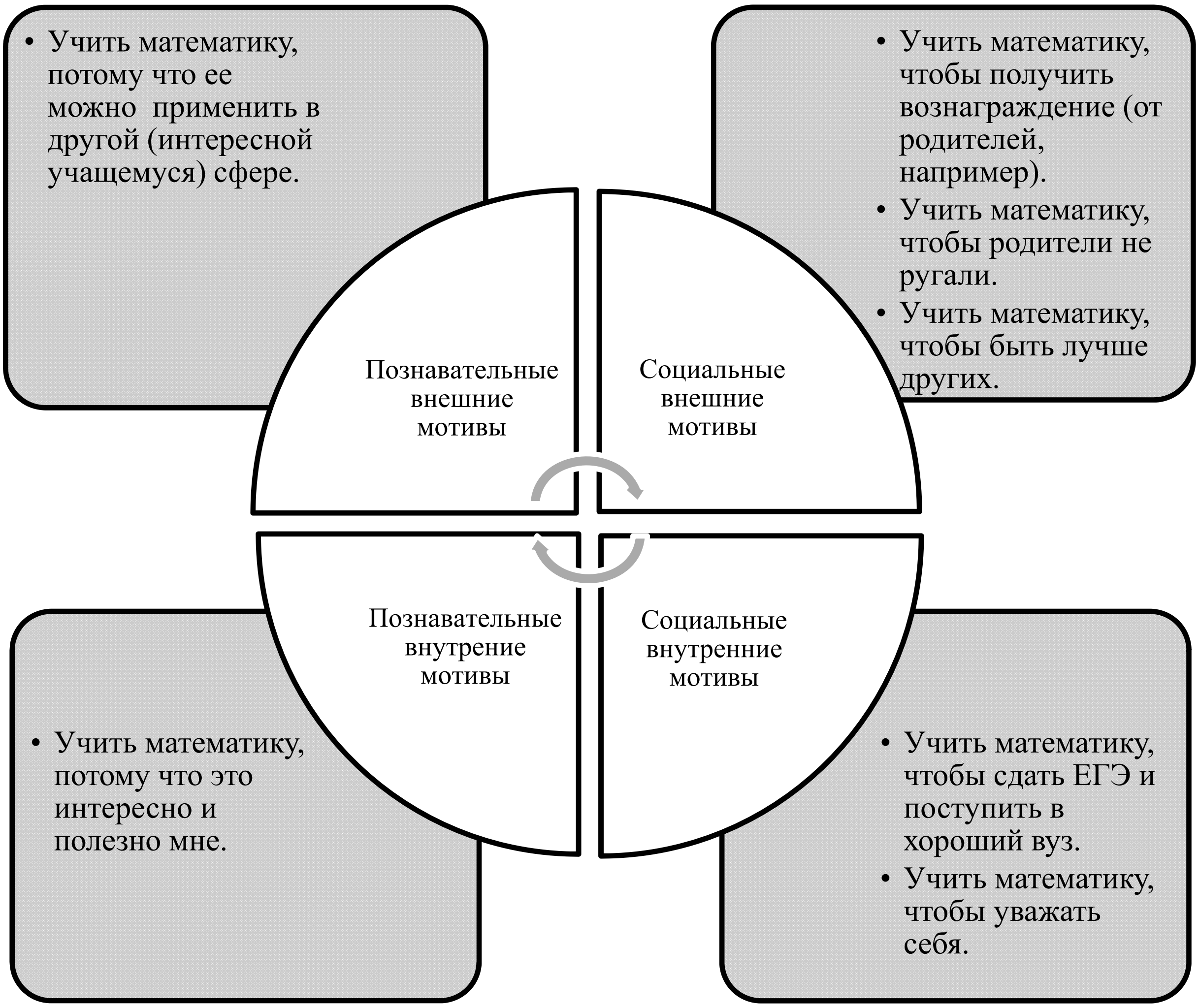


Рис. 1.4. Мотивы учебной математической деятельности

Таким образом, приступая к проектированию процесса обучения, учитель определяет, ***кого*** он будет ***учить математике***. Особенности учебной деятельности влияют на процесс усвоения математики, потому как у каждого учащегося свой диапазон наращивания знаний и особенности в формировании умений.

Важно создавать условия для обучения и развития учащихся с разными особенностями. Для этого при построении образовательного процесса учитель задается вопросами: каким мы хотим его (учащегося) видеть, и кто он сейчас, этот человек, сидящий за партой, каковы его интересы, каковы его возможности, уверенно ли он себя чувствует, правильно ли оценивает свои силы, нужна ли ему помощь и, если нужна, то какая.

1.3. Цели математического образования

Зачем учить математике?

Образование как социальный институт выполняет «заказ государства», который состоит в том, чтобы подготовить математически грамотного, математически развитого гражданина страны. Образование создает условия для формирования математических умений у будущих профессионалов всех областей жизнедеятельности – гуманитариев, обществоведов, медицинских работников, специалистов IT-сферы, ученых и т.д.

Основными целями обучения школьников математике являются:

– обеспечение усвоения учащимися теоретических знаний по математике;

– формирование у учащихся представлений о дедуктивной науке на примере математики;

– обеспечение осознанности, глубины и устойчивости математических знаний;

- формирование прочных умений применять математические методы к решению научных и практических задач.

Многовековой опыт преподавания математики показал свою эффективность в развитии личности учащегося. Развитие навыков логического, аналитического, критического мышления – прерогатива математических дисциплин.

Математика как учебный предмет, выступая вместе со своей специфической деятельностью, способствует развитию интеллекта человека, потому как:

– математическое знание выступает как особая форма познания действительности (изучение и исследование наиболее общих закономерностей устройства мира, выход за пределы обычного, построение рационально-логической картины мира);

– математическое знание – это особый тип функционирования разума (рефлексия границ и возможностей познавательных способностей, проявление бескорыстной любознательности, разработка базовых процедур мыслительной детальности);

– существуют исследования, которые позволяют полагать, что развитие математических способностей влечет за собой развитие интеллекта учащихся [19; 37].

А.Я. Хинчин отмечает, что математика помогает объективно ориентировать школьников на выделение существенных, объективно значимых аспектов происходящего, формирует стремление к полноте аргументации, строгой классификации, борьбе против незаконных обобщений и необоснованных аналогий [36].

Математическое образование способствует обогащению ментального опыта школьников. В первую очередь способности использовать различные способы кодирования, сохранения, преобразования и воспроизведения информации [5].

В ходе изучения математики учащиеся приобретают опыт использования разных способов кодирования информации:

– словесно-символическим (самостоятельный поиск формулировок определений, теорем, правил), осуществление перевода информации с одного языка на другой;

– визуальный (построение, развитие и использование визуального образа и работы с ним);

– предметно-практический (выполнение определённых предметных действий, заданий, обеспечивающих подключение житейских впечатлений учащихся);

– сенсорно-эмоциональный (стимулирование эмоциональных оценок изучаемого материала, метафор, софизмов и т.д.) [5; 37].

Для этого школьники учатся формализовывать информацию с помощью схем, графиков, таблиц. Математика воспитывает дерзость ума, желание исследовать, развивает интерес к закономерностям, склонность к обобщениям.

В процессе изучения математики формируются фундаментальные понятия – число, множество, функция, уравнение, неравенство, фигура, аксиома, теорема, переменная, случайное событие и т.д.

У учащихся развиваются рефлексивные умения, которые отвечают за управление ходом текущей интеллектуальной деятельности, а именно: знание своих индивидуальных способностей, склонностей, трудностей; понимание цели предстоящей математической деятельности, осуществление оценки освоенной деятельности, умение видеть собственные ошибки и учиться на них, умение выбирать стратегию собственного интеллектуального поведения.

Н.Л. Стефанова говорит: «Сегодня акценты в методике обучения математике перенесены на рассмотрение математического содержания не как цели изучения, а как средства решения образовательных и развивающих задач. Развитие пространственного воображения, критического мышления, оценочной деятельности, формирование способов и приемов деятельности, которые можно использовать для разрешения проблемных ситуаций и решения практических задач, – вот далеко не полный перечень проблем, которыми занимается современная методика математики. Эти требования вытекают из необходимости реализовать компетентностный подход в системе образований, внедрить новые государственные стандарты, где особый акцент делается на формирование мировоззренческой составляющей образования, достижение метапредметных образовательных результатов и формирование универсальных учебных умений [32, с. 53].

Основным результатом школьного математического образования остается приобретение конкретных математических знаний и освоение математических методов, необходимых каждому человеку для познания окружающего мира средствами математики, и некоторым из них – для продолжения образования.

В жизни каждого человека возникают проблемные ситуации, когда необходимо применить математику. Приведем примеры таких ситуаций [17].

Пример № 1. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 180 % превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды — 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Пример № 2. Вы хотите протестировать 20 человек. Тест состоит из 10 вопросов, на каждый из которых можно ответить либо да, либо нет. Тест считается пройденным, если испытуемый правильно ответил не менее, чем на 6 вопросов. Какое наивероятное количество человек пройдет тест? Изменится ли оно, если количество тестируемых возрастет до 50?

Пример № 3. Вы провели небольшое исследование среди своих клиентов на тему удовлетворены ли они качеством оказываемых услуг и собрали следующие данные. Обработайте эти данные и сделайте обоснованные выводы.

Исследование № 1. Удовлетворены ли Вы качеством оказываемых услуг (удовлетворен, затрудняюсь ответить, не удовлетворен)?

Данные: удовлетворен (65), затрудняюсь ответить (10), не удовлетворен (25).

Исследование № 2: Какой Вы считаете оптимальной цену за оказываемые услуги (в рублях)?

Данные: 1050, 1050, 1050, 1050, 1100, 500, 1100, 1100, 1200, 1200, 850, 1200, 900, 1200, 900, 1100, 900, 550, 1000, 850, 1200, 850, 1100, 1000, 800, 1000, 1100, 1200, 850, 1100, 950, 1100, 1100, 950, 1000, 950, 1100, 950, 1000, 950, 1200, 850, 1000, 900, 1000, 1000, 1000, 1000, 1000, 1000, 800, 600, 600, 700, 500, 650, 500, 650, 1100, 800, 1000, 600, 700, 550, 800, 700, 1000, 800, 1000, 600, 1200, 600, 1000, 1000, 1000, 1000, 1000, 1100, 1100, 1300, 1300, 1000,1250, 1250, 1300, 1400, 1500, 550, 600, 600, 600, 700, 900,1000, 1100, 900, 850, 900, 900, 1000, 1500, 1100, 900.

Математическое образование влияет на формирование личности учащегося, создает условия для становления индивидуальных особенностей интеллекта, способствует развитию способностей ребенка.

1.4. Концептуальные основания методики обучения математике

Концептуальными основаниями методики обучения математике выступают философские концепции, психологические теории и педагогические подходы: ***развивающий подход, рефлексивный подход, мировоззренческий подход, личностно-ориентированный подход, контекстный подход, компьютерный подход*** [15].

Выстраивая авторскую концепция обучения математике, педагог всегда находится в условиях интеграции педагогических теорий. Задача интеграции в обучении заключается в том, чтобы все лучшее, наработанное в математическом образовании оставить, **НО** способы подачи материала, способы личностно-ориентированного взаимодействия учителя и учащихся, методы контроля должны строиться с учетом инновационных подходов. Интеграция инновационных подходов к обучению естественным образом проявляется при разработке авторских методических систем обучения математике.

В работах Е.М. Вечмотова, Л.А. Микешиной, А.А. Касьяна, Р.К. Кадыржанова, В.А. Мейдера, П.В. Кикеля, Н.П. Чупахина и др. математика представлена с позиции философского осмысления устройства Мира [16].

Математика представляется частью общей культуры человечества, являющейся неотъемлемой составляющей всех социальных, гуманитарных, культурных, технических и технологических процессов прошлого, настоящего и будущего жизнедеятельности человека. Его отражение в содержании образования позволяет формировать целостное представление о научной картине мира.

Рассмотрение методики обучения математике с позиции мировоззренческого подхода представляет математические дисциплины как средство для формирования индивидуального мировоззрения учащихся, выработки у них **математико-мировоззренческих ориентиров**. Весь процесс обучения математике должен способствовать формированию у учащихся таких качеств личности, как ориентация на истинность, способность к критическому осмыслению информации, умение преодолевать познавательные трудности, доверие логическому мышлению, стремлению к аргументации высказанных предложений.

Системный подход в педагогике, представленный в работах А.Г. Кузнецовой, В.П. Беспалько, А.Р. Калеваевой, В.М. Монахова, М.А. Пышкало и др., определяет математическое образование как систему. Для управления течением любого педагогического процесса должна существовать соответствующая педагогическая **(методическая) система**, представляющая собой системную модель образовательного процесса. Методическая система обучения математике представима в виде взаимосвязанной системы содержания обучения, форм, методов и средств обучения.

Представители деятельностного подхода (Л.С. Выготский, Б.Д. Эльконин, А.К. Маркова, Е.Н. Кабанова-Меллер, Н.А. Менчинская, Н.Ф. Талызина, Т.И. Шамова, Г.И. Щукина, И.С. Якиманская, Л.М. Фридман, О.Б. Епишева и др.) рассматривают усвоение содержания обучения математике и развитие ученика в процессе его **собственной активной учебно-познавательной деятельности** по восприятию, осмыслению, запоминанию, применению, обобщению и систематизации информации, контроля и оценки ее усвоения. Эти процессы образуют полный цикл учебно-познавательной математической деятельности учащегося.

В развивающем подходе (А.Н. Леонтьев, Л.В. Занков, Д.Б. Эльконин, В.В. Давыдов, Г.Д. Глейзер, Б.В. Гнеденко, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев, Т.А. Иванова, Ю.М. Колягин, А.Г. Мордкович, Г.К. Муравин, Г.Г. Петерсон, Г.И. Саранцев, З.И. Слепкань, И.М. Смирнова, А.А. Столяр, Л.М. Фридман, Р.Г. Хазанкин, А.Я. Хинчин, Г.Ж. Ганеев и др.) обучение математике ориентировано на закономерности развития личности. Рассматривая ребёнка как личность, живущую сегодня, в процессе обучения математике создаётся максимум благоприятных условий для её развития. Развивающий подход проявляется в выявление гуманитарного потенциала математики, позволяющего говорить о математике как о средстве для **развития личности учащегося**. Его отражение в методах обучения позволяет формировать опыт умственной, поисковой, творческой, трудовой деятельности учащихся.

Технологический подход (В.П. Беспалько, М.В. Кларин, Г.К. Селевко, В.М. Монахов, В.И. Слободчиков, Е.Н. Ильин, В. Ф. Шаталов и др.) ориентируют методику обучения математике на использование преимущественно педагогических технологий. Предполагается реализация идеи полной управляемости учебным процессом с гарантированным результатом. Важнейшим ее признаком служит **воспроизводимость**, подразумевающая возможность применения в других дисциплинах, образовательных учреждениях и с другими субъектами образовательного процесса.

Дифференцированный подход (Н.А. Алексеева, В.К. Дьяченко, З.И. Калмыковой, И.Э. Унт, А.А. Кирсанова, Р.А. Утеевой, И.М. Осмоловской, Г.Д. Глейзер, М.М. Поташника, В.А. Гусев, Н.М. Шахмаева, М.В. Ткачева, Г.В. Дорофеев, Ю.М. Колягин, М.Б. Миндюк, В.Г. Болтянский, З.И. Слепкань, И.М. Смирнова и др.) в методике обучения математике, по мнению многих специалистов, является «повседневной» необходимостью. Подход, согласно которому каждому учащемуся обеспечиваются **условия для максимального развития его способностей** и склонностей, удовлетворения его познавательных потребностей и интересов в процессе усвоения им содержания образования.

Сущность этого подхода состоит в поиске методов и приемов обучения математике, которые индивидуальными путями вели бы к одинаковому овладению образовательных программ.

Компьютерный подход, разрабатываемый в работах М. П. Лапчика, И.В. Роберт, Р.Т. Гордеева, А.В. Юрасова, И.Н. Антипова, А.П. Ершова, А.А. Кузнецова, В.В. Монахова, С.И. Кузнецова, М.И. Рагулиной, А.Е. Полички, Н.А. Резник, А.Я. Цукарь и др., выстраивает методику обучения математике на основе применения средств информационно-коммуникационных технологий. Можно выделить основные направления **использования компьютера в обучении**: разработка систем дистанционного обучения математике, разработка и применение автоматизированных обучающих систем и инструментально педагогических средств в обучении математике, использование элементов программирования и персонального компьютера при изучении математики, разработка интегрированных курсов информатики с математикой, компьютерное сопровождение уроков математики, решение частных методических проблем средствами информационных технологий и др. [25].

Рефлексивный подход к обучению математике (М.А. Холодная, Э.Г. Гельфман, И.Г. Липатникова, Г.Д. Тонких и др.) определяется как обучение, главный акцент которого делается на **умении учащегося осмысливать математическую деятельность**, ее цели, структуру и результат [13; 14].

Ошибки, которые учащиеся допускают на протяжении многих лет при изучении математики, блокируют доверие к собственному разуму. Негативный опыт изучения математики и объективно низкий уровень знаний и математических умений многих учащихся создает препятствия для освоения математической науки. Одним из путей повышения эффективности образовательного процесса является организация рефлексивного обучения математике.

Рефлексивное обучение, которое заключается в обучении школьников рефлексивным стратегиям, таким как сопоставление поступающей информации с уже существующей в ментальном опыте, подбор и итоговый выбор оптимальных для данной задачи стратегий мышления, планирование, мониторинг и оценка процесса мышления, будет способствовать эффективному обучению математике разных групп учащихся.

Внедрение обучения рефлексивным стратегиям в математическое образование позволит учащимся:

– четко разделять известное и неизвестное в решении математических задач;

– вербализировать собственные познавательные трудности при решении математических задач;

– выбирать оптимальные пути решения математической задачи на основании собственных метакогнитивных знаний;

– преодолевать познавательные затруднения при решении математических задач на основании собственных метакогнитивных знаний;

– оценивать эффективность собственного мышления, анализировать достигнутый результат при выполнении математических заданий [13; 14].

Рефлексивное обучение математике, направленное на активизацию имеющихся знаний, их обобщение и систематизацию, применение знакомых математических методов в незнакомых ситуациях, ликвидацию познавательных пробелов на основе рефлексивных стратегий, позволит обогатить ментальный опыт учащихся [13].

Необходимость разработки рефлексивного обучения математике обусловливается отсутствием концептуальных основ и методических рекомендаций в теории и практике математического образования.

В работах В.И. Моросановой, А.В. Карпова, А.К. Осницкого, О.А. Конопкина показано, что психологическую основу самостоятельности в практической деятельности составляет сформированная система саморегуляции. Чем выше индивидуальная степень осознанного саморегулирования, тем легче и продуктивнее происходит познавательная деятельность. Чем лучше учащийся осознает свои интеллектуальные ресурсы в области математических знаний, тем лучше он знает характер собственных трудностей при изучении математики. Если учащийся знает пути преодоления познавательных затруднений, то легче происходит наращивание новых знаний и усвоение новых умений [13].

В предметно-ориентированном нормативном образовании, как говорит Г.П. Звенигородская, сложилась устойчивая тенденция отбирать личную ответственность у учащегося, а вместе с ней и личный выбор [11, с. 32]. Другими словами, учащийся привык, что учитель математики должен ему все объяснить, и если учащемуся что-то не понятно, то он обвиняет в этом учителя. Приходя в высшее учебное заведение, учащийся так же пассивно ждет от преподавателей математики подробного разъяснения темы, не желая брать ответственность за результаты свой учебной деятельности.

Однако в процессе развития личности учащегося необходимо создавать условия для развития самостоятельности мышления в принятии решений. Учащийся должен уметь строить собственные процессы формирования умений и управлять ими, сконцентрировать в себе одном всю структуру учебной математической деятельности. Учащийся должен знать, что происходит у него в сознании, когда он думает над своим познанием и его особенностями [13; 14].

Рефлексивному обучению математике характерны следующие черты:

1. Границы обучающего воздействия задаются детерминированным уровнем развития рефлексивных функций субъекта.

Каждый учащийся «заполнен» своим ментальным опытом, который и определяет характер его индивидуальной активности в конкретных ситуациях. Состав и строение ментального опыта у каждого учащегося различны, каждый имеет свой «диапазон» наращивания интеллектуальных сил [37].

Регуляторный процесс совершается при активном участии основных когнитивных процессов (восприятии, представлений, мнемических процессов, мышления и др.), интегральных (целеобразование, антиципация, принятие решения, прогнозирование, планирование, контроль, самоконтроль) и метакогнитвных процессов (метавосприятие, метапамять, метамышление и др.) с опорой на свойства личности (темперамент, характер).

2. Процесс обучения математике зависит от осознанной включенности учащегося в математическую деятельность.

Принцип сознательности, активности и самостоятельности учащегося является одним из главных принципов в обучении математике. Учащийся должен понимать зачем он изучает математику, что именно он изучает в математике, какие он испытывает эмоции при изучении математики, как он справляется с изучением математики самостоятельно, в какой мере ему нужна помощь педагога и т.д. Обучение математике будет эффективным только в том случае, когда учащийся принимает сознательное и активное участие в процессе овладения математикой.

3. При использовании рефлексивных стратегий особое значение имеет последовательность и системность обучающих воздействий.

Обеспечение наглядности в обучении математике позволит учащимся «увидеть», «ощутить» абстрактные математические объекты. Изучение математических понятий последовательно и в системе позволит сформировать целостные понятийные структуры, необходимые для полного формирования математических умений. Последовательность в обучении математике означает, что обучение осуществляется по следующим правилам: от простого к сложному, от известного к неизвестному, от легкого к трудному, от представления к понятию, от знания к умению, от умения к навыку.

4. Рефлексия выполняет регулирующую функцию, позволяя сознательно управлять мыслительными приемами (сравнение, индукция, анализ и синтез, конкретизация, классификация, аналогия, обобщение) для решения математических задач.

5. Наличие отрицательных переживаний, связанных с математикой, значительно снижает активность учащихся на занятиях по математике, поэтому проводится осознанная саморегуляция психологических состояний учащегося.

Действия процесса осознанной саморегуляции позволяют учащемуся при решении математических задач осуществлять самостоятельную интеллектуальную процедуру в системе его учения, а именно:

- ✓ выделение познавательной задачи;
- ✓ подбор, определение и применение адекватных способов действий, ведущих к решению задачи;

✓ выполнение операций контроля над тем, решается ли поставленная цель [3, с. 32].

6. В процессе рефлексивного обучения происходит стимулирование интеллектуального развития учащегося, поскольку исключено пассивное освоение математики.

Рефлексивное обучение математике позволяет учащемуся осознанно продвигаться по пути обучения. В процессе рефлексивного обучения математике происходит развитие когнитивных способностей: увеличение объема произвольного внимания, развитие логического мышления, расширение объема рабочей памяти, положительная динамика в развитии грамотной речи.

На основании вышеперечисленного **основными принципами рефлексивного обучения математике** являются: принцип системности и логической последовательности изложения материала, принцип вовлеченности учащегося в учебную деятельность, принцип доступности при достаточном уровне трудности, принцип продуктивности, принцип эмоциональной насыщенности.

Анализ современных проблем методики обучения математике показывает, что только на основе интеграции педагогических подходов могут быть преодолены психолого-педагогические и методические трудности. На рис.1.5 представлен выбор педагогических подходов в соответствии с трудностями, сложившимися в традиционной системе обучения математике [15].

Рис. 1.5. Инновационные подходы к обучению математике

Интеграция педагогических подходов в математическом образовании позволит выстраивать авторскую методику обучения математике с учетом следующих положений [15].

1. Повышение уровня мотивации учащихся к изучению математических дисциплин достигается через создание ситуаций успеха, активное включение школьников в собственное математическое образование, разнообразную деятельность на занятиях: математические игры, мозговой штурм, взаимообучение, индивидуальные консультации, разбор математических текстов, разрешение проблемных ситуаций, проектную деятельность.

2. Развитие культуры мышления учащихся осуществляется путем обогащения ментального опыта школьников умениями критически анализировать информацию, принимать оптимальные решения на основе имеющихся данных, прогнозировать результаты экспериментов, применять математику там, где она действительно необходима.

3. Обучение школьников рефлексивным (метакогнитивным) стратегиям позволяет им отслеживать свои познавательные затруднения при изучении математики, выбирать оптимальные пути их преодоления, контролировать свои достижения, корректировать свои образовательные стратегии, обращаться за помощью к учителю, дозированно пользоваться Интернетом.

4. Становление «индивидуального мировоззрения» школьников осуществляется путем выявления необходимости применения математического аппарата как инструмента исследования объектов окружающего мира, демонстрации ситуаций, в которых исключение математики приводит к неполноте получаемых результатов, включение учащихся в математический анализ парадоксов и стереотипов.

5. Организация педагогической поддержки каждому учащемуся в своевременной ликвидации пробелов в знаниях и умениях, а также обеспечение доступного уровня обучения в сочетании с научным и строгим изложением учебного материала позволит школьникам освоить все необходимые разделы элементарной математики.

6. Активное использование средств информационных технологий позволяет оптимизировать процесс обучения математическим дисциплинам: обеспечить учащихся только необходимыми учебными ресурсами, дифференцировать и индивидуализировать обучение, сопроводить процесс обучения яркими полезными презентациями, облегчить процессы сложных математических вычислений, визуализировать абстрактные математические понятия [15].

1.5. Содержание математического образования

Чему учить?

Первой научной концепцией, раскрывающей теоретические основы содержания общего среднего образования, была культурологическая концепция, разработанная в 1970–1980-х гг. сотрудниками лаборатории общих проблем дидактики НИИ общей педагогики АПН И.Я. Лернером, М.Н. Скаткиным и В.В. Краевским. Согласно этой концепции, под содержанием образования понимается система педагогически адаптированных элементов социального опыта (знания о мире и способах деятельности, умения осуществлять определенные виды деятельности, опыта творческой деятельности, опыта эмоционально-ценностных отношений) [18, с. 40–61]. Главным источником содержания образования выступает знание о социокультурном опыте во всей его полноте, усвоение этого опыта выступает как цель обучения.

В математической науке накопился огромный объем информации, поэтому возникает сложнейший вопрос отбора информации из этой области для усвоения учащимися. В.П. Беспалько говорит, что этот вопрос можно решить только на основе строго научного подхода к формированию и подготовке научной информации к изучению соответственно достижимым целям обучения [2, с. 234].

Чему учить в математическом образовании? Вопрос, неоднократно обсуждаемый на международных и региональных конференциях. В век интенсивного развития математической науки, когда открываются новые области знаний, имеющие большое прикладное значение, система школьного математического образования неизменна почти сто пятьдесят лет. Что же является содержанием математического образования сейчас и что же должно являться содержанием математического образования в ближайшем будущем, чтобы цели образования реализовались в полной мере?

Е.А. Седова так комментирует сложившуюся проблему: «Господствовавшая в последнее время “знаниевая” парадигма обучения, где смысл обучения сводился к передаче подрастающему поколению «педагогически адаптированных основ наук», а ученику отводилась роль объекта образовательного процесса, в современных условиях закономерно уступает место личностно ориентированным доктринам, и именно эти вопросы находятся сегодня в фокусе научных дискуссий» [29, с. 144].

«Попытка формализации представлений о том, что на уроках математики каждый ученик, независимо от его талантов, мог бы ощущать себя комфортно и получать все самое лучшее, что может дать изучение математики, привела к выделению двух составляющих математических знаний и, соответственно, к необходимости рассмотрения двух функций обучения математике – информационной и развивающей. Первая (внешняя) – это передача некоторой суммы знаний из всего культурного наследия человечества. Вторая (внутренняя) – набор специфических для математики способов действий, мыслительных операций, сопровождающих математическую деятельность и формирующих стереотипы поведения. И поскольку изучение математики оказывает существенное влияние как на повышение культурного уровня, так и на развитие интеллектуальных качеств человека, то задача состоит в том, чтобы для каждого ученика найти должное соотношение между развивающей и информационной функциями в реальном процессе обучения математике в школе. Таким образом, наше понимание содержания школьного математического образования носит бифокальный характер: в одном фокусе – культурное наследие человечества, во втором – самобытность ученика, так что содержание школьного математического образования как педагогическая проблема, если пользоваться традиционной дихотомией внешнего и внутреннего, должно рассматриваться также в двух аспектах – общей культуры и индивидуальных свойств личности» [29, с. 146].

Что же такое «*МАТЕМАТИКА*» как культурное наследие человечества? Математика – слово, пришедшее к нам из Древней Греции: mathema переводится как «познание, наука». Само слово «математика» означает «точное значение». А.Н. Колмогоров, исследуя этимологию понятия «математика» дал следующее определение: «Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира».

Ю.И. Манин «Математика – это отрасль лингвистики или филологии, занимающаяся преобразованием конечных цепочек символов некоторого конечного алфавита в другие такие цепочки при помощи конечного числа “грамматических правил”».

Н. Бурбаки: «Математика – наука о математических структурах». Определение математической структуры включает в себя: задание одного или нескольких отношений, в которых находятся элементы множества, данные отношения удовлетворяются некоторым условиям, которые являются аксиомами рассматриваемой структуры. В науке выделяют: алгебраические структуры, топологические структуры, структуры порядка. Так же математика изучает разнообразные формы подсчета; числовые структуры, закономерности и взаимосвязи в них; процессы, описывающие системы.

Современное состояние науки математики представляет ее как наиболее развитию и сложную науку, традиционно в математике выделяют восемь направлений: математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика.

Возникает вопрос: чему из всего содержания современной математики учить школьников? Почему до сих пор в школе изучают арифметику, элементарную алгебру и геометрию, ведь наиболее современными являются проблемы теории чисел, дискретной математики и математической физики?

Рассмотрим некоторые подходы к определению содержания математического образования.

Согласно первому подходу, содержание школьной математики должно отражать специфику математики как науки и, прежде всего, присущую ей множественную природу: «Математика бывает или чистая, или смешанная». Чистая математика рассматривает «количество, полностью абстрагированное от материи и физических аксиом», смешанная (интегративная) – «количество в той мере, в какой оно помогает разъяснению, доказательству и приведению в действие законов физики, биологи, химии, экономики, психологии». Ибо в природе существует много такого, что не может быть ни достаточно глубоко понято, ни достаточно убедительно доказано, ни достаточно умело и надежно использовано на практике без помощи и вмешательства математики. Это можно сказать о перспективе, музыке, астрономии, космографии, архитектуре, сооружении машин и некоторых других областях знания.

В «чистой» математике доминирует аксиоматический метод, где знания – это прежде всего абстрактные математические понятия и осмысленные высказывания о них.

В «интегративной» математике акцент делается на математическом моделировании, позволяющем решать задачи, возникающие вне математики, с помощью математических методов. Поэтому здесь допустимы нестрогие приемы образования понятий, точные способы решения задач дополняются численными методами, дающими приближенный ответ. Современные реальные задачи, в которых требуется найти числовой ответ, не всегда имеют аналитическое решение, во многих задачах недопустимы логически строгие рассуждения, поэтому на «помощь» приходит «компьютерная» математика.

В интересах развития познавательной культуры учащихся при реализации своей информационной функции «чистая» математика может показать исторический путь теоретической мысли от первого наивного вопроса до стройной теории, позволяющей решать целые классы родственных задач. Роль «интегративной» математики заключается в формировании представления о математическом исследовании реальных объектов, событий и процессов окружающей действительности – о том, как потребности решения тех или иных практических задач приводят к новым математическим результатам; как математические теории, возникая для решения практических задач, продолжают развиваться по своим внутренним законам. Наконец, в своем «компьютерном» аспекте школьная математика поможет убедиться в том, что современные информационные технологии позволяют расширить границы познания в различных сферах существования человека, позволяя делать сложнейшие вычисления и решать задачи, которые другими методами пока решены быть не могут [29].

Второй подход представлен работами В.А. Тестова, который видит изменение содержания математического образования с позиции необходимости формирования универсальных видов познавательной математической деятельности. Так, изучение математики он рассматривает как знаково-символическую деятельность, представленную двумя типами – моделированием и схематизацией [34, с. 8].

«Результатом моделирования в математике выступают алгебраические, порядковые и топологические структуры, являющиеся прототипами, упрощенными моделями математических объектов. Можно сказать, что такой тип структур образуется по «горизонтальному» принципу. Знания об этих структурах, как предметные, так и метапредметные, относятся к знаниям первого рода. Среди метапредметных можно отметить понятия о числе и операциях над числами, понятия о функции и ее свойствах, понятия о площади, объеме и способах их вычислений и т. д.

Цель схематизации – ориентация в реальности, выявление отдельных связей, нахождение среди них таких, которые являются схожими, подобными для совершенно различных реальных объектов и явлений. В результате схематизации образуются когнитивные структуры (схемы), которые выступают как средства и методы математического познания. Структуры этого типа образуются по «вертикальному» принципу, поскольку они складываются на основе общих связей, которые есть у абсолютно разных объектов. Именно такие математические схемы в качестве средств применяются при исследовании реальных явлений и процессов в естествознании, технике, гуманитарных науках. С помощью данных структур человек извлекает информацию, производит анализ и синтез поступающих новых сведений, открывает для себя новые конкретные знания о многообразном материальном мире [34].

В третьем подходе Н.С. Подходова, В.И. Снегурова, В.В. Орлов выделяют современные тенденции отбора содержания математического образования.

1. *Структурирование на основе выделения в программе для каждой математической дисциплины содержательно-методических линий.*

«Структурирование курса математики на основе выделения содержательно-методических линий во многом способствует реализации обучения на основе системно-деятельностного подхода. Оно позволяет организовать и отслеживать процесс формирования фундаментальных понятий курса математики на основе принципа «расширяющейся спирали»: постепенно расширяя, обогащая и включая в систему их новые смыслы и интерпретации. Кроме того, описание процесса продвижения от изучения простых примеров понятий к их обобщениям и промежуточным результатам позволяет организовать обобщение способов деятельности учащихся на основе осваиваемого содержания» [30, с. 177].

Основное содержание математического образования составляют содержательно методические линии (рис. 1.6).

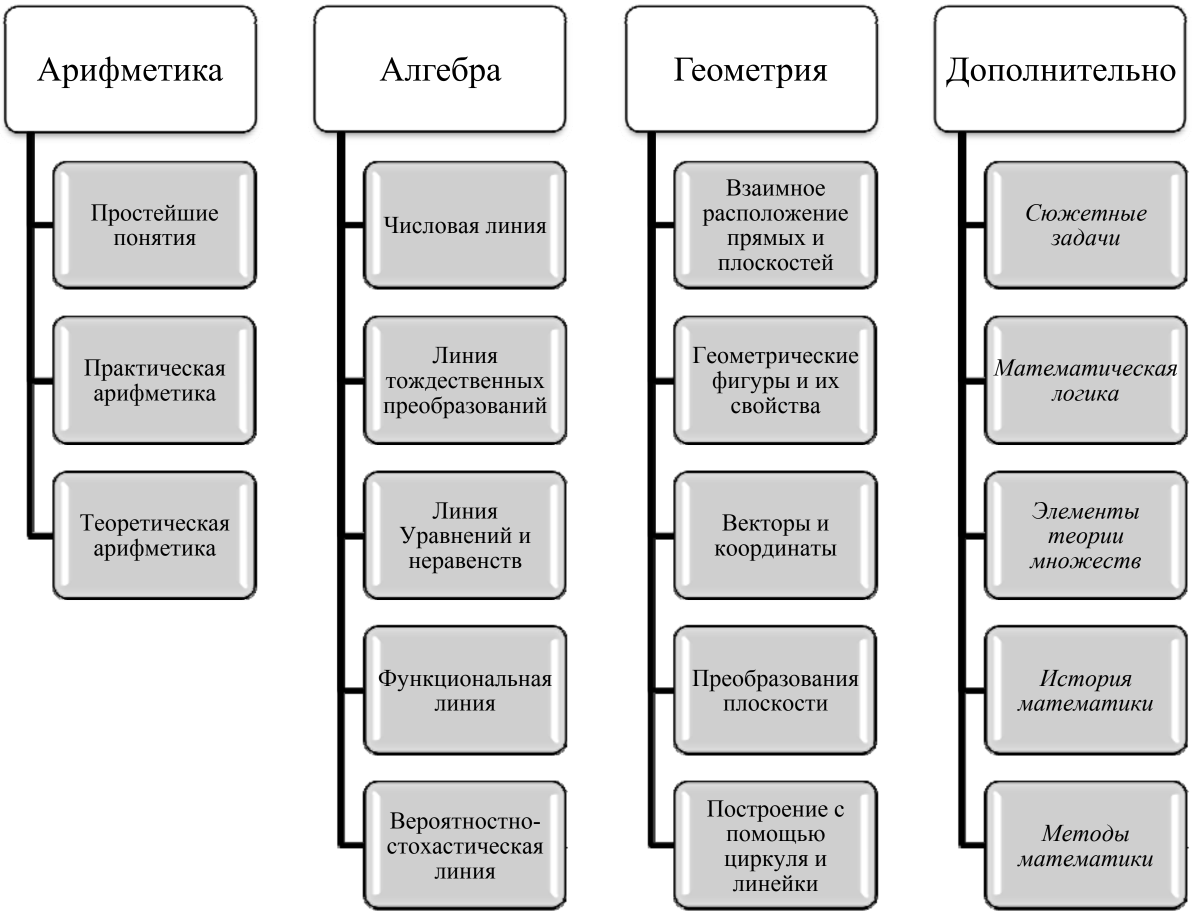


Рис. 1.6. Содержательно-методические линии школьного курса математики

Наряду с традиционными содержательно-методическими линиями представляется целесообразным выделение новых, таких как: сюжетные задачи, методы математики, элементы теории множеств, история математики.

Н.С. Подходова пишет: «демонстрация применения методов математики в других областях знаний способствует как более полному достижению *метапредметных результатов*, так и *личностных результатов,* связанных с осознанием места математики в окружающем мире и ее значимости, что способствует развитию такого универсального учебного действия, как смыслообразование. В области предметных результатов эта линия будет «работать» на формирование обобщенного представления о содержании курса математики в целом» [30, с. 177].

2. *Наполнение содержательно-методических линий курса учебным материалом происходит на основе деятельностного подхода, реализации идеи фузионизма и идеи учета субъективного опыта ученика и учителя*.

Необходимость реализации идеи деятельностного подхода объясняется пониманием развития субъекта как его самодвижения, осуществляющегося благодаря его деятельности в предмете, усилением внимания к учению как деятельности субъекта.

Еще одним подходом к пониманию содержания математического образования выступает теория математической картины мира, представленная В.И. Горбачевым [7]. «Математическую картину мира» В.И. Горбачев определяет через анализ категории «научная картина мира» следующим образом:

– в методологическом плане математическая картина мира, выделяющая фундаментальные понятия, их существенные взаимосвязи, выступает подлинным основанием для познания учащимся каждой из математических теорий;

– с позиции мировоззренческих представлений математическая картина мира опосредовано отражает многие из сторон объективной реальности – через математические модели, математические способы описания закономерностей;

– структурирование математической картины мира в содержании фундаментальной теоретической схемы, последовательное развертывание теории в условиях целостного видения фиксирует единую методическую схему изучения каждой из математических теорий, соответствующую дидактическим закономерностям познавательной деятельности учащихся [7, с. 283–284].

Методологический анализ содержания общего математического образования позволил выделить основные структурные компоненты математической картины мира.

Общие внутриматематические представления, к ним относятся математические объекты, математический язык и т.д.

Математические объекты – абстракции реальных физических объектов (геометрические объекты), характеристик физических объектов (числа, векторы), равновесных процессов (уравнения), взаимной связи характеристик процесса (функции), выделенные для целей специфической математической деятельности и выступающие в образной, символической форме [7, с. 285].

Базовые математические теории имеют схожую структуру, включающую:

– основные классы объектов и отношений;

– абстрактную систему математических понятий для описания свойств объектов класса;

– систему предложений о справедливости общих свойств объектов класса;

– систему предложений о возможной справедливости новых общих свойств объектов класса;

– систему методов установления свойств объектов класса;

– взаимную связь классов объектов разных теорий [7].

К базовым математическим теориям относят: теорию числовых систем, теорию элементарных числовых функций на числовых множествах, теорию геометрических фигур и их преобразований, теорию уравнений, неравенств и систем, теорию векторов и координат.

В.И. Горбачев общую схему математической картины мира общего математического образования видит в тесной взаимосвязи всех структурных компонентов (рис. 1.7).

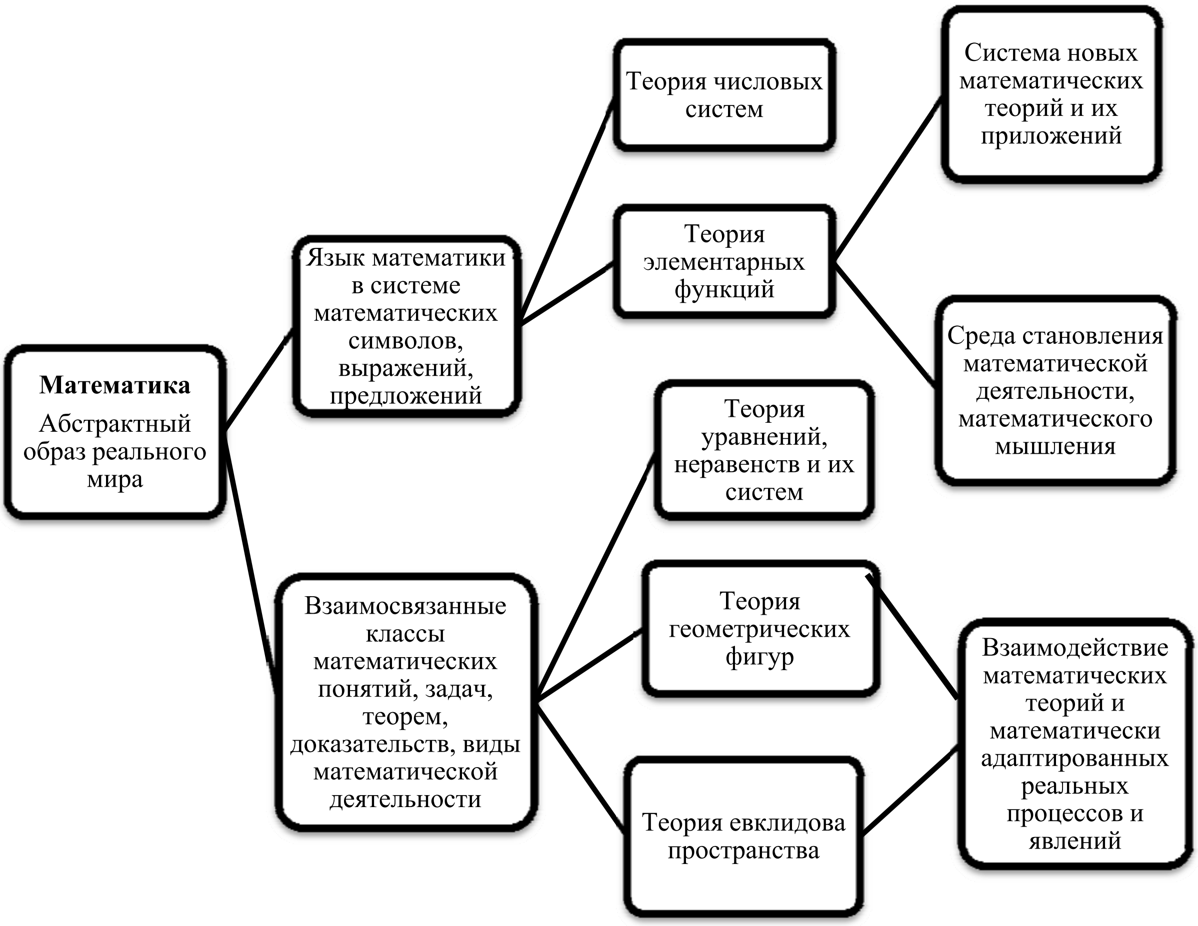


Рис. 1.7. Схема математической картины общего математического образования (по В.И. Горбачеву)

В концепции компетентностного подхода некоторые авторы полагают, что необходимо научить учащихся математическим методам на примерах решения математических задач. Для этого у них должны быть сформированы методологические знания о математических задачах и математических методах.

1. Знание о математических объектах, выраженных математическими понятиями.
2. Знания об аксиоматических системах в математике.
3. Знания о свойствах математических понятий, сформулированные в виде теорем.
4. Знания о структуре математической задачи (условие, поиск решения, осуществление решения, ответ).
5. Знания о классификации математических задач по разным основаниям (по математическому объекту, по требованию, по методу решения).
6. Знания основных методов доказательств.
7. Знания о стратегиях поиска решения задач.
8. Знание об основных вычислительных методах.
9. Знание об основных методах преобразования тождественных выражений.
10. Знание основных методов решения уравнений и неравенств.
11. Знание методов исследования функций.
12. Знание основных методов нахождения вероятности случайных событий.
13. Знание основных методов решения геометрических задач.
14. Основные методы решения задач: арифметический, алгебраический, геометрический.
15. Знание метода математического моделирования.

Как результат реализации этой линии, учащийся научится применять основные методы решения математических задач, использовать основные методы доказательства, проводить доказательство и выполнять опровержение, овладеет типологией задач и научиться пользоваться типологией при выборе метода решения.

Таким образом, несмотря на многообразие подходов, проблема наполнения содержания математического образования в соответствии с достижениями современной математики остается открытой.

Решение проблемы отбора содержания математического образования требует обоснованного вычленения из всего комплекса математических знаний (понятий, утверждений, приемов, методов, объектов, моделей, концепций) той совокупности элементов, которая в сочетании с фундаментальным курсом позволила бы реализовать педагогический потенциал математических дисциплин.

1.6. Современные образовательные технологии обучения математике

Как учить математике?

Особенности обучения математике в школе заключаются в том, что математика является самым сложным предметом для многих учащихся, поэтому необходимо уделить пристальное внимание разработке авторских методик обучения математике. Для этого нужно учитывать особенности в проведении уроков по математике, особенности формирования математических понятий и умений, особенности методики обучения решению математических задач.

Обучение математике – есть обучение математической деятельности, особенностью которой является то, что математика – это непрерывная **цепь** базовых знаний, сотканная из **математических понятий**, их определений, свойств, признаков, и сформированной системы **математических умений** выполнять определенные виды математических действий.

Для эффективного обучения математике необходимо личностно-ориентированное взаимодействие педагога и учащегося, потому, как только в процессе общения, установленного контакта и обоюдного желания возможно обучение математической деятельности.

Роль учителя при обучении математике достаточно значима, личность учителя оказывает на учащегося сильнейшее влияние. Сложность математики и практическая сложность освоить самостоятельно математические дисциплины ставит учащегося в зависимое от педагога положение.

Таким образом, при обучении математике особую роль играют технологии педагогической поддержки учащихся, испытывающих трудности при изучении математики.

При формировании математических понятий, учитель опирается на особенности состава и строения ментального опыта учащегося, на выделенные когнитивные стили, на закономерности в поэтапном формировании умственных действий. Игнорирование психологических закономерностей в формировании математических понятий и умений приведет к формализму в обучении математике и схоластическому обучению.

Именно поэтому в настоящее время методика обучения математике обращается к психолого-ориентированным педагогическим подходам, предлагающим технологии обучения и развития личности учащегося.

Последние десятилетия на формирование методики обучения математике влияют современные тенденции образования: информатизация, гуманизация, гуманитаризация, математизация. Каждый из процессов способствует развитию приемов, методов и технологий обучения математике.

Гуманизация. Гуманизация математического образования предполагает такую организацию учебного процесса, при которой знания приобретают личную значимость для ученика. Отношение к ученику как к субъекту предполагает признание его прав на уникальность, активность, внутреннюю свободу и духовность [6, с. 5]. Педагог создает условия, в которых ученик самостоятельно ставит учебную задачу, сам открывает способ ее решения, сам формулирует вопросы. Между учителем и учениками возникает диалог, складывается деловое сотрудничество, основанное на взаимном уважении друг к другу [6, с. 9].

Гуманитаризация. Гуманитаризация обучения математике – это процесс, направленный на выявление в математике и процессе ее освоения общих знаний и общественно значимых ценностей и присвоение их учащимися.

Таким образом, «увидеть» на уроке гуманитаризацию обучения математике можно по таким характеристикам: учитель использовал выявленные в математике или в процессе ее освоения общие знания или общественно значимые ценности и обеспечил их присвоение учащимися [6, с. 10].

Опираясь на труды ученых, занимающихся вопросами гуманитаризации математического образования, можно утверждать, что этот процесс осуществляется по следующим направлениям.

1. *Восстановление гуманитарных начал математики* означает знакомство с творцами идей, историей возникновения и развития математических теорий, вскрытие философских начал математики, раскрытие духовного назначения математики [6, с. 14].
2. *Использование в математике содержания, методов, форм и средств, присущих гуманитарным наукам,* означает привлечение материала из гуманитарных наук (стихотворения, музыки, картины, изречения и т.д.), что влечет разнообразие форм проведения уроков: уроки-сказки, уроки-диспуты, уроки-игры, межпредметные уроки.
3. *Приближение математики при ее изучении к человеку* и общественному бытию путем демонстрации возможностей математики для принятия решений в проблемных ситуациях.
4. *Осуществление языковой деятельности* на уроках математики включает работу над этимологией математических терминов, работу с математическими знаками, формирование умений читать математические тексты.

Информатизация. Анализ литературы по данному вопросу показывает, что философско-методологические основы информатизации математического образования заложены в работах И.В. Роберт, Л.П. Мартиросян, В.А. Далингера, М.И. Рагулиной, А.Е. Полички и др. [21; 26; 25].

Под информатизацией математического образования понимается целенаправленно организованный процесс создания и использования научно-педагогических, учебно-методических, программно-технологических разработок, ориентированных на достижение целей обучения математике, в условиях реализации возможностей информационных и коммуникационных технологий, с учетом педагогико-эргономических условий эффективного и безопасного их применения [21].

Выделим основные положения концепции информатизации математического образования в России.

1. Развитие информатизации математического образования основано на реализации следующих направлений:

– создание и использование научно-педагогических, учебно-методических разработок по применению электронных средств учебного назначения (ЭСУН), специализированных программных продуктов, распределенного информационного ресурса, авторских приложений по математике;

– подготовка преподавателей математики в области использования средств ИКТ в профессиональной деятельности;

– стандартизация применения средств ИКТ в процессе изучения математики.

2. Реализация теоретических подходов к использованию средств ИКТ в процессе обучения математике обеспечивает:

– развитие личности обучаемого за счет приобщения к экспериментально-исследовательской деятельности и формирования познавательного интереса в условиях личностно-ориентированного обучения математике;

– выполнение социального заказа общества за счет приобщения обучаемых к использованию ИКТ как инструмента исследования в условиях прикладной направленности обучения математике;

– повышение качества процесса обучения математике за счет реализации дидактических возможностей ИКТ.

3. Реализация методических подходов к использованию средств ИКТ в деятельности преподавателя математики обеспечит:

– комплексное использование ЭСУН по математическим дисциплинам;

– совершенствование организационных форм и методов педагогически целесообразного применения специализированных программных продуктов;

– использование электронного образовательного ресурса информационных сетей в условиях безопасного применения учебно-методического и программно-технического обеспечения информатизации математического образования [21].

Определены педагогические цели использования средств ИКТ в процессе математического образования:

– развитие личности обучаемого за счет приобщения к экспериментально-исследовательской деятельности,

– формирования познавательного интереса в условиях личностно ориентированного обучения математике с использованием средств ИКТ;

– выполнение социального заказа современного информационного общества за счет приобщения обучаемых к использованию ИКТ как средства, совершенствующего учебную деятельность, и инструмента исследования в условиях реализации прикладной направленности обучения математике;

– повышение качества процесса обучения математике за счет автоматизации информационно-поисковой и вычислительной деятельности;

– визуализации процессов моделирования и динамического представления на экране геометрических объектов и изучаемых математических закономерностей;

– расширения самостоятельной деятельности в условиях использования специализированных программных продуктов, ЭСУН, распределенного информационного ресурса образовательного назначения [25].

Вышеизложенное определяет необходимость создания методических систем обучения математике с использованием ЭСУН, специализированных программных продуктов, распределенного информационного ресурса Интернет, авторских приложений по математике, что является одним из направлений развития информатизации математического образования.

В работах ряда авторов (Г.Д. Глейзер, Т.В. Капустина, С.С. Кравцов, И.В. Роберт, А.Е. Поличка и др.) подчеркивается необходимость использования средств ИКТ. В области математики это, прежде всего, формирование обобщенных подходов к реализации возможностей средств ИКТ в целях поиска необходимой учебной информации, обработки информации об изучаемых в математике объектах и их отношениях, об их моделировании, исследовательской деятельности при изучении математических закономерностей. Применение ИКТ на уроках математики может быть представлено в следующих учебных задачах:

– осуществление вычислительных операций,

– исследование различных функций и построение их графиков, динамика графиков относительно выделенных параметров,

– построение геометрических фигур, их модификация по заданным условиям, осуществление геометрических преобразований (в динамике процесса преобразования);

– динамическое представление геометрических объектов, их частей и деталей в любом ракурсе;

– построение матриц, таблиц, графиков, диаграмм, описывающих динамику изучаемых закономерностей;

– представления геометрической интерпретации решения уравнений, систем уравнений, неравенств, систем неравенств;

– изучение арифметических и геометрических последовательностей [25].

В контексте методологии методики обучения математике целесообразно рассмотреть соотношения между теорией, методикой и технологией обучения математике.

Закономерные связи между компонентами системы, а также между компонентами и внешней средой образуют теорию обучения [28].

Методика обучения – приложение теории обучения. Цель методики обучения состоит в переводе теоретических положений в плоскость конкретных педагогических явлений.

Технологии обучения призваны организационно упорядочить все зависимости процесса обучения, выстроить этапы, выделить условия их реализации. Цель технологии обучения – получение гарантированного результата.

Н.В. Садовников пишет: «теория обучения математике выявляет закономерности функционирования методической системы обучения математике, методика строит их приложения, а технология разрабатывает способы реализации модели этой системы». Важно отметить, что технология не отменяет теорию и методику, она основывается на последних, и ее эффективность зависит от уровня развития последних [27, с. 1018].

Методика выступает организующим началом в построении профессионально-педагогической деятельности педагога, она описывается, как правило, без учета механизмов и закономерностей, лежащих в основе достижения цели с ее помощью.

Технология обучения – системный метод создания, применения и определения всего процесса преподавания и усвоения знаний с учетом технологических и человеческих ресурсов, ставящий своей задачей оптимизацию форм и способов организации учебного процесса [31, с. 31].

Вопрос о соотношении метода обучения, приема обучения и технологии обучения математике активно дискутируется, но мнения специалистов можно фактически свести к основным двум позициям. Первая позиция состоит на приоритете метода в широком смысле и признает за технологией функцию технического и процедурного воплощения метода в практику работы педагога. Вторая позиция признает технологию как системное явление, в котором методы и приемы выступают элементами целостной системы [31, с. 16].

Н.В. Бордовская предлагает рассматривать несколько точек зрения для того, чтобы учителю самому принять решение, в каком значении использовать эту терминологию.

Первая позиция – понятия «технология» и «методика» рассматриваются как идентичные понятия.

Вторая позиция – понятие «технология» рассматривается как более широкое понятие, чем «методика».

Третья позиция – «технология» есть специфичная часть «методики», своеобразная ее основа.

Четвертая позиция – на основе одной и той же «технологии» могут быть построены разные «методики», различающиеся задачами и содержанием деятельности.

Пятая позиция – сама технология может существовать самостоятельно, независимо от методики [31, с. 16–17].

В самом общем смысле большинство педагогов считает, что:

– метод обучения математике раскрывает структурный аспект выполняемых действий;

– методика реализуется в образовательной практике обучения математике с помощью системы методов и приемов;

– технология обучения математике обладает определённой системой предписаний, гарантированно ведущих к цели, т.е. инструментовкой всех действий для ее достижения.

Заметим, что в области методики школьного преподавания математике в принципе не может быть какой-либо одной технологии или методики преподавания, о которой можно сказать, что она «вернее всех других». Это маловероятно прежде всего с научной точки зрения, ибо реализация задачи развития психологических ресурсов ребенка (в том числе и его интеллектуальных ресурсов) – в силу сложности их устройства – может осуществляться с помощью разных форм и методов обучения, при условии, конечно, что они опираются на психологические механизмы личностного и умственного развития детей.

Вместе с тем, заметим, что наиболее адаптированными к практике математического образования являются методы обучения, разработанные И.Я. Лернером, М.Н. Скаткиным, В.В. Краевским [18] и Ю.К. Бабанским [1].

При построении авторской методики обучения математике учитель варьирует методами обучения и воспитания, применяя разнообразные средства обучения математике.

Методы обучения математике представляются способами взаимосвязанной и взаимообусловленной деятельностью учащихся, направленной на реализацию целей обучения, организацию познавательной и практической деятельности учащихся.

Каждая методика и технология обучения математике включают всю совокупность приемов обучения математике: рассказ, демонстрацию, учебные дискуссии, самостоятельную работу, метод упражнений, вопросно-ответные процедуры, объяснение, практическую тренировку, работу с книгой и информационными технологиями и т.д.

В общей методике обучения математике представлены четыре основных направления:

– методика формирования математических понятий;

– методика формирования математических умений;

– методика обучения работе с теоремой и доказательством;

– методика обучения решению математических задач.

Каждая методика включает ряд обязательных этапов: этап мотивации, этап актуализации, этап введения, этап усвоения, этап закрепления, этап обобщения и систематизации.

В частной методике обучения математике рассматриваются особенности изучения содержательно методических линий. В конкретной методике рассматриваются методы и приемы формирования конкретных математических умений (рис. 1.8).

Рис. 1.8. Методы и приемы обучения математике

Методика формирования математических понятий и математических умений включает прохождение определенной системы этапов.

Этап мотивации. Необходимо сформировать у учащегося понимание необходимости введения нового понятия или нового умения. Как правило, обоснование необходимости введения «нового» демонстрируется конкретными примерами, наглядно иллюстрирующими невозможность решить математическую задачу имеющимися средствами.

Например,

1. Вычислить $5-8$.
2. Найти корни уравнения $x^2=2$.
3. В прямоугольном треугольнике, найти длину гипотенузы, зная длины катетов.

К мотивационным задачам так же относят задачи прикладного характера, представляющего интерес для учащихся. Пример мотивационной задачи при обучении решению текстовых задач алгебраическим способом. «Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

– Вот сколько, – ответил философ, – половина изучает математику, четверть – музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть три женщины».

Этап актуализации. Очень важно актуализировать знания учащихся, необходимые для понимания и усвоения нового понятия. Так, например, для изучения параллелограмма важно повторить с учащимися признаки параллельности двух прямых и признаки равенства треугольников.

Этап введения. Введение понятия, умения, формулы, алгоритма должно осуществляться с опорой на активность учащегося. Необходимо проводить лабораторно-практические работы таким образом, чтобы учащиеся сами увидели свойства понятия, вывели формулу, сформулировали правило. Так, например, учащиеся самостоятельно могут доказать свойства параллелограмма и трапеции, самостоятельно вывести формулы сокращенного умножения, составить алгоритм приведения дробей к общему знаменателю.

Этап усвоения. После того, как учитель провел деятельность по введению понятия, будь то абстрактно-индуктивным или конкретно-индуктивным способом, необходимо убедиться в том, что все учащиеся поняли материал. Для этого обычно используют систему устных задач и систему задач «на готовых чертежах».

Этап закрепления. Даже если учащийся понял новое понятие, необходимо провести деятельность по «присваиванию» этого понятия, умения, правила, алгоритма. Для этого используется система ключевых задач, направленных на применение понятия, умения, правила, алгоритма в различных ситуациях.

Этап обобщения и систематизации. Очень важно показать применение изученных математических понятий в нестандартных ситуациях. Для этого в методику обучения включают з**адачи, способствующие обобщению и систематизации** математических знаний и умений по математическим разделам. К таким задачам относятся задачи, решение которых аккумулирует в себе разные подходы, методы и способы решения.

Этап контроля. Все, что изучено должно быть проверено. Регулярная обратная связь поможет вовремя ликвидировать познавательные трудности у учащихся [13].

На рис. 1.9 представлены некоторые технологии обучения математике: технология модульного обучения, технология проблемного обучения, проектная технология обучения.

Рис. 1.9. Некоторые технологии обучения математике

Несмотря на популярность и возможную эффективность образовательных технологий, многие видят в образовательных технологиях структурные элементы авторской методической системы обучения математике.

В заключении этого пункта, приведем пример авторской методики обучения решению математических задач, построенной в рамках рефлексивного подхода к обучению математике.

Процесс рефлексивного обучения решению математических задач должен включать пять основных этапов [13].

I. Проведение логико-математического анализа задачи.

Логико-математический анализ задачи предполагает знакомство учителя с математической задачей. Учитель определяет тип задачи, находит все возможные способы решения задачи, определяет подходящий математический метод решения, выясняет дидактическое назначение.

Ю.М. Колягин под математической задачей понимает совокупность компонентов, характеризующих:

– *начальное состояние* – характеризует условие конкретной задачи;

– *конечное состояние* – характеризует частный результат решения задачи;

– *решение задачи* – характеризует способ преобразования условия для получения требуемого результата математическими методами;

– *базис решения* – характеризует объем теоретических или практических знаний из математики, необходимых для решения задачи.

Опираясь на предложенное определение, учитель классифицирует математическую задачу:

– по математическому объекту, заданному в условии задачи и разделу математики, в котором изучается этот объект (арифметическая задача, задача в которой речь идет о последовательности, задача, в которой задано случайное событие, планиметрическая задача и т.д.);

– по требованию задачи (вычислить, упростить, решить уравнение, решить текстовую задачу, исследовать функцию, найти геометрическую величину, доказать математическое утверждение, построить);

– по методу решения задачи (арифметический, алгебраический, функциональный, геометрический, метод математического моделирования);

– по сложности, определяя количество преобразований для получения ответа и объем знаний конкретной группы учащихся [13].

II. Подбор системы задач на актуализацию. Основное правило методики обучения математике гласит: *не повторив старое – не начинай нового!* Учитель подбирает систему заданий, способствующих повторению математических понятий, их свойств и признаков. Важно помочь учащемуся восстановить в памяти необходимые знания, а в случае их отсутствия своевременно ликвидировать «знаниевые пробелы».

III. Составление системы вопросно-ответных процедур. Что значить решить математическую задачу? Л.М. Фридман говорит так: *«решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче, – ее ответ»*.

Значит, для того, чтобы научить учащегося решать задачу, его надо научить искать последовательность общих положений математики, связывающих условия задачи и требования.

Для этого учитель использует разнообразные методические приемы. Например, составляет систему вопросов, ответы на которые помогут учащимся проанализировать условие задачи, найти идею решения и составить план реализации этой идеи. В условиях рефлексивного обучения разработан набор карточек с рекомендациями для учащихся, цель которых направить сознание школьника на анализ его собственных интеллектуальных ресурсов [13]. В рефлексивном обучении акцент делается на работе учащегося со своими знаниями и умениями, с индивидуальными предпочтениями и умонастроениями.

IV. Правильное оформление решения задачи. Учитель обращает внимание на правильное оформление решения задач разных типов, на необходимость обоснования каждого этапа в решении задачи.

Важно учить школьников при оформлении своего решения думать о другом человеке (учителе, однокласснике, экзаменаторе), который будет проверять работу учащегося. Для этого учитель демонстрирует учащимся примеры решений разных задач, в которых пропущены этапы в решении, нет обоснования сделанных выводов, не ясен чертеж и т.д. Показывая учащимся в какую затруднительную ситуацию может попасть учитель при оценке работ учащихся, плохо оформившем свое решение, учитель тем самым воспитывает в учащихся чувство уважения к себе, своему труду, и друг к другу.

V. Проверка решения и ее анализ. Важный этап в решении задачи, который заключается в обосновании правильности полученного ответа, анализе выбранного метода решения и главное – запоминании идеи решения предложенного типа задач. При решении математических задач многие учащиеся опускают оценки проведенного решения. На экзаменах учащиеся зачастую показывают более худшие результаты своей деятельности, чем есть на самом деле. Во многом причина кроется в несформированных умениях контролировать и оценивать свою деятельность, а также регулировать ее в случае обнаружения ошибок. Задание должно провоцировать учащихся «вернуться назад» в своем решении, принудить их сделать проверку. У учащихся должно возникнуть желание сделать проверку, проявить рефлексивные умения.

1.8. Контроль в обучении математике

Как проверять результаты обучения математике?

В современных исследованиях, связанных с разработкой новых подходов к обучению математике, способствующих развитию учащихся, обращается внимание на то, какими путями школьник достигает ожидаемых результатов обучения. Анализ показал, что принятые формы контроля не дают полной информации о том, как происходят изменения в ментальном опыте учащегося под действием математических дисциплин.

Под контролем качества обучения понимают «определение достигнутого уровня знаний или выявление разницы между реальным и запланированным уровнем освоения учебной программы» [4, с. 137]. Выделяют четыре основные функции педагогического контроля:

- диагностическую (выявление достижений и упущений учащихся при изучении учебной дисциплины);
- обучающую (координированная подготовка к контролю, актуализация приемов взаимоконтроля и самоконтроля);
- организационно-управляющую (мобилизация и мотивация на достижения, определение мер корректирования знаний и умений учащихся);
- воспитательную (выработка структуры ценностных ориентаций, например, ответственности за выполняемую работу, развитие упорства в преодолении познавательных затруднений) [12, с. 210].

Анализ литературных источников показывает, что одной из самых важных и наиболее трудных является проблема оценивания уровня развития обучающихся, потому как обучение в школе структурировано по областям научных знаний, что соответствует ориентации на научные знания и абстрактные умения. Поскольку традиционные формы и виды контроля усвоения учащимися образовательной программы ориентированы на проверку знаний, умений и навыков учебной математической деятельности, возникает методическая проблема организации контроля обучения математике.

При разработке системы контроля математических дисциплин для достижения образовательных результатов, необходимо руководствоваться следующими педагогическими положениями.

1. Основные принципы контроля заключаются в том, что контрольные мероприятия должны быть эффективными, отражать реальное достижение образовательных результатов, должны быть иерархически организованы, систематически применяться, быть объективными, справедливы для всех участников образовательного процесса [12, с. 13].

2. В основе разработки контрольных мероприятий создаются условия для активизации «процесса перехода внешних контрольно-оценочных процессов во внутренние навыки самоконтроля» школьников [12, с. 16].

3. Должны выполняться педагогические условия обновления контрольно-оценочной системы: педагогу следует минимизировать субъективизм в итоговом контроле, снизить долю авторитарности и принуждения в текущем контроле, отказаться от преимущественной ориентации текущего и итогового контроля на оценку результатов заучивания, перейти к инновационным измерителям, обеспечивающим оценку способностей, заменить привычную ориентацию на «среднего» учащегося индивидуализированными методами, снизить долю традиционных контрольных мероприятий [12, с. 26].

4. Контроль знаний должен быть личностно-ориентированным, позволяющим отслеживать одновременно как успехи учащегося относительно собственного уровня, так и достижение относительно требуемого уровня. С помощью контрольных заданий проверяется не только усвоение учащимися учебного материала в соответствии с ожидаемыми результатами, но и констатируются личные успехи учащегося в освоении учебной дисциплины.

5. Контрольные процедуры должны быть предельно ясны и понятны учащимся. Вне зависимости от сложности задания, учащиеся должны понимать, что именно от них требуется.

С учетом этих положений осуществляется диагностическая деятельность учителя математики, которая состоит в выявлении изменений личности учащегося в процессе выполнения им учебной математической деятельности на основании педагогического контроля.

Выбор форм, методов, средств контроля результатов обучения с целью определения уровней развития компетенций и способностей учащихся существенно отличается в разных темах математики. Так, например, при обучении математическим дисциплинам основной целью обучения может быть: **развитие культуры мышления обучающегося, развитие способности управлять мышлением в целях построения индивидуальной траектории саморазвития, развитие математических способностей, развитие способности практически решать задачи в разных сферах жизнедеятельности математическими методами.** Показателем успешности освоения математики будет динамика развития следующих компонент ментального опыта учащегося – рациональное мышление, метакогнитивная компетентность, мировоззренческая активность, математическая грамотность [16].

Можно выделить следующие результаты обучения математике:

– фактологические знания (основные изучаемые в курсе математики понятия, теоремы, алгоритмы, задачи и методы их решения);

– операционно-логические знания и умения, которые обеспечивают применение математических знаний в решении как математических, так и прикладных задач, включают математический язык и математическую символику, элементы логики;

– методологические знания и умения, которые определяются спецификой математической деятельности и ее методами как общими (эвристическими и логическими), так и частными, характерными для конкретной темы;

– мировоззренческие знания, которые обеспечивают представления об особенностях математических методов познания действительности; роли ведущих математических идей и понятий в развитии самого математического знания и познании действительности (число, функция, уравнение, геометрические фигуры и величины и т.д.); сути метода математического моделирования;

– практические (применение всех описанных выше знаний и умений для изучения смежных предметных областей, решения встречающихся практических задач);

– личностные (эмоционально-ценностные, мотивационные, смысловые).

Входной контроль исходного уровня развития компонент ментального опыта учащихся проводится с использованием специальной диагностической работы.

Текущий контроль, направленный на проверку текущей успеваемости по изучаемой математической дисциплине, представим контрольно-обучающими мероприятиями и контрольно-измерительными материалами.

Контрольно-обучающие мероприятия (КОМ) по математическим дисциплинам – это элементы методического обеспечения, при которых учащийся может получать оперативную помощь учителя, к ним относятся задания, которые учащийся выполняет либо индивидуально, либо в группе одноклассников: доклады, практикумы и проекты. Например, подготовка и выступление учащихся с мини докладами, подготовка научной статьи или реферата на заданную тему, решение новых задач около доски, выполнение дополнительных творческих заданий, разработка и выполнение исследовательского проекта. При выполнении заданий такого рода учащийся получает оперативную помощь преподавателя в подборе литературы, в поиске решения, в оформлении работы и т.д.

Подготовка учащимся доклада для выступления на уроке осуществляется при руководящей роли учителя, который формулирует вопросы и темы доклада, предъявляет требования к докладу, консультирует при возникновении трудностей.

Практикум или тренинг в процессе практического занятия направлен на развитие конкретных умений и отработку навыков рационального мышления при активном использовании метакогнитивных стратегий обучения. Учитель использует вопросно-ответные процедуры для стимулирования познавательной деятельности школьников, направляет процесс метакогнитивного познания на преодоление познавательных барьеров, усиливает или ослабляет учебное взаимодействие для каждого учащегося, варьирует разнообразными формами, методами и средствами обучения для создания эффективных условий развития личности учащегося.

Научно-исследовательские проекты, выполняемые так же под руководством учителя, направлены на формирование мировоззренческой позиции в отношении применения математического аппарата к решению важных задач, на повышение математической грамотности в решении этих задач.

Контрольно-измерительные материалы (КИМ) – это элементы диагностической системы обучения, результаты проведения которых свидетельствуют об эффективности реализации педагогического потенциала математической дисциплины и о достигнутом уровне развития компонент ментального опыта. К контрольно-измерительным материалам относят: математические диктанты, самостоятельные и контрольные работы, индивидуальные типовые расчеты, тесты, зачет, экзамен. При выполнении заданий такого рода преподаватель не оказывает помощь учащимся, а лишь фиксирует результаты выполнения их работ.

Формы проведения контрольных мероприятий – индивидуальная, групповая, письменная, устная, аудиторная, внеаудиторная – выбираются в зависимости от цели, которую ставит педагог при проведении контроля. Если цель контроля – проверка уровня развития рационального мышления учащихся, то применяется аудиторная письменная работа в форме самостоятельной работы. Если цель – проверить уровень развития интеллектуальных умений и способность управлять ими для решения конкретных задач, то необходимо отслеживать его записи в рабочей тетради в процессе индивидуальной работы. Если цель – установить уровень развития мировоззренческой активности, то предлагаются задания с вопросами, требующие работы с практико-ориентированными заданиями и мировоззренческо-ориентированными текстами.

Математические диктанты направлены на проверку уровня знаний определений основных понятий математики. Основное назначение математических диктантов – помочь учителю оценить наличные знания у учащихся, при этом происходит тренировка устойчивости внимания учащихся, развитие оперативной и долговременной памяти, формирование умения школьников сосредоточиваться. В процессе обучения математические диктанты выполняют важную функцию проверки того, насколько усвоены основные определения математических понятий.

Самостоятельные работы, как контрольно-измерительные мероприятия в процессе контроля, представляет собой письменную работу, целью которой является оценка сформированных математических умений. За планируемое время проведения 15–20 минут учащийся активизирует свои внутренние ресурсы и показывает уровень интеллектуальной самостоятельности. Формами самостоятельных работ могут быть тесты, эссе, письменные отчеты и т.д.

3. Индивидуальные задания, выполняемые учащимися во внеаудиторное время, направлены на формирование умений и закрепление определенных навыков. Задания, включающие дополнительные вопросы к процессу выполнения работы позволят оценить развитие метакогнитивной компетентности и мировоззренческой активности учащихся. В чем отличия в решениях приведенных уравнений? Какое задание вызвало наибольшие затруднения? Сколько времени Вы потратили на выполнение каждого задания? Какими источниками пользовались? Почему? На материале индивидуальных работ можно оценить динамику формирования умений, поскольку школьники в домашней обстановке более открыты, им проще проанализировать задания и дать ответы на вопросы.

4. Контрольные работы по математическим дисциплинам направлены на проверку сформированности математических умений решать типовые задачи математики, а также уровня развития мышления. Для проверки уровня развития рационального мышления необходимо предусмотреть задания, в которых отражается необходимость применять обобщенный алгоритм решения математической задачи. Для проверки уровня развития метакогнитивной компетентности задания должны быть разноуровневые, при которых у учащегося обеспечивается возможность выбора тех заданий, которые соответствуют уровню его подготовки. Мировоззренческая активность проверяется на тех заданиях, которые побуждают учащегося применять математический аппарат для обоснования собственной точки зрения.

Например, при решении предложенной ниже задачи, проверяется умение учащегося составлять математическую модель, математически описывать сюжетную ситуацию, делать вывод на основе функциональной зависимости и т.д. «*На фабрике необходимо разложить равными количествами конфеты в пакеты. Для транспортировки в магазины эти пакеты складывают в мешки, по 2 пакета в один мешок. Те же самые конфеты можно разложить в пакеты другим способом, так, что в каждом из них было бы на 5 конфет меньше, чем раньше, но тогда в каждом мешке стало бы лежать по 3 пакета, а мешков при этом потребовалось бы на 2 меньше. Какое наибольшее количество конфет можно разложить указанными способами*?»

Несмотря на широкий спектр контрольных мероприятий, представленных в практике школы для оценки умений, формируемых при обучении математическим дисциплинам, необходима трансформация принятых контрольных мероприятий. Одним из способов представляется распределение контрольных мероприятий по контрольно-обучающим и контрольно-измерительным.

1.9. Обзор литературы по современным вопросам методики обучения математике

Психология математического образования представляет собой наиболее сложный раздел математического образования. К сожалению, несмотря на интенсивное развитие психологической науки, исследований, посвященных вопросам психологии математического образования, практически нет.

Рекомендуем два исследования, в которых описывается связь между психологий учащегося и методикой преподавания математики.

Крутецкий В.А. Психология математических способностей. М. Изд-во «Институт практической психологии»; Воронеж: Изд-во НПО «МОДЕК», 1998. 416 с.

А.В. Крутецким и его коллегами впервые был проведен широкомасштабный эксперимент по исследованию математических способностей школьников. Анализ отечественных и зарубежных работ того времени показал, что несмотря на многочисленный интерес исследователей по всему миру обоснованного и упорядоченного понимания сущности математических способностей достигнуто не было [19].

«В отличии от своих предшественников В.А. Крутецкий приступил к изучению математических способностей школьников, основываясь на аргументированной гипотезе об их основных компонентах. В соответствии с исходной гипотезой была разработана большая система из 26 диагностических задач на арифметическом, геометрическом, алгебраическом и общематематическом материале» [19, с. 12].

Для выявления особенностей восприятия логико-математических отношений В.А. Крутецкий использовал задачи с отсутвующим вопросом, задачи с неполным составом условия, задачи с избыточным составом условий. Оказалось, что показатели решения этих трех типов задач в группе способных к математике школьников высоко коррелировали между собой, что было объяснено как способность к формализованному восприятию функциональных связей задачи, «очищенных» от конкретных значений.

В книге В.А. Крутецкого представлена обширная система полученных им экспериментальных результатов, показано, что самой главной чертой математического мышления является способность мыслить логико-математическими структурами, схемами математических отношений, отвлеченными от их конкретного «чувственно-наглядного» воплощения, так сказать чистыми структурами отношений [19, с. 13].

У способных к математике учеников структура задачи четко вычленяется из ее условий и конкретных данных. Более того, выяснилось, что спустя час после решения, способные к математике в 95,7 % случаев помнили типовые признаки задач, схемы рассуждений, основные линии рассуждений, логические схемы [19, с. 16].

Вот, что писал В.А. Крутецкий о своих исследованиях: «Мозг некоторых людей своеобразно ориентирован на выделение из окружающего мира раздражителей типа пространственных отношений и числовых отношений и символов и на оптимальную работу именно с такого рода раздражителями. В ответ на раздражители, имеющую математическую характеристику, связи образуются относительно быстро и легко» [19, с. 14].

Представленные в книге В.А. Крутецкого экспериментальные материалы, раскрывающие разные аспекты «настроенности мозга» способных к математике школьников, служат ориентиром для определения, развития и совершенствования математических способностей школьников.

Холодная М.А. Психология интеллекта: Парадоксы исследования. СПб.: Питер, 2002. 272 с.

В монографии М.А. Холодная, обобщая исторический опыт представлений об интеллекте, делает вывод, что интеллект – это форма ментального опыта. Важность ее исследований в том, что учителя понимают, на развитие каких именно ментальных структур направлен процесс обучения математике и, с другой стороны, какие именно ментальные структуры препятствуют процессу изучения математики.

Интеллект развивающего ребенка, для методики обучения математике, является ключевой темой как с точки зрения его развития, так и с точки зрения его состава и строения для усвоения математических знаний.

М.А. Холодная определяет интеллект как: **«особую форму организации индивидуального ментального (умственного) опыта в виде наличных ментальных структур, порождаемого ими ментального пространства отражения и строящихся в рамках этого пространства ментальных репрезентаций происходящего»**. Другими словами, интеллект человека представляет собой удивительную конструкцию из знаний и умений, приобретённые в процессе непосредственных переживаний, впечатлений, наблюдений, практических действий, т.е. всего того, что он к настоящему моменту чувствовал, анализировал, воспринимал [37].

М.А. Холодная пришла к выводу, что существуют три уровня организации ментального опыта, когнитивный, метакогнитивный и интенциональный опыт, которые определяют свойства индивидуального интеллекта (*то есть конкретные проявления интеллектуальной деятельности в виде тех или иных интеллектуальных способностей, характеризующих продуктивность и индивидуальное своеобразие интеллектуальной деятельности субъекта*).

В зависимости от особенностей состава и строения этих форм опыта можно наблюдать и измерять конвергентные способности (*решение нормативных задач в регламентированных ситуациях*), дивергентные способности (*порождение новых идей на основе нестандартных способов деятельности*), обучаемость (*способность к усвоению новых знаний и навы-*

ков) и познавательные стили (*способность к индивидуально-специфическим формам познавательного отражения*).

Соответственно к оценке индивидуального интеллекта следует подходить, одновременно принимая во внимание четыре аспекта его работы:

- **как человек перерабатывает поступающую информацию,**
- **может ли он контролировать работу своего интеллекта,**
- **почему именно так и именно об этом он думает,**
- **как он использует свой интеллект.**

Таким образом, когда речь идет о развивающем потенциале математики, имеется ввиду обогащение ментального опыта учащихся. В случае проблемы познавательных затруднений учащихся при изучении математики, в первую очередь надо изучить особенности его ментального опыта. Именно в восприятии математической информации и ее переработке скрыты особенности усвоения математики.

Когнитивный опыт – это ментальные структуры, которые обеспечивают хранение, упорядочение и преобразование наличной и поступающей информации, способствуя тем самым воспроизведению в психике познающего субъекта устойчивых, закономерных аспектов его окружения. Их основное назначение - оперативная переработка текущей информации об актуальном воздействии на разных уровнях познавательного отражения.

Т.е. при обучении математике целенаправленно осваиваются разные способы кодирования информации, происходит дифференциация и интеграция понятийного опыта, а также формирование общих интеллектуальных умений.

Метакогнитивный опыт – это ментальные структуры, позволяющие осуществлять непроизвольную и произвольную регуляцию интеллектуальной деятельности. Их основное назначение – контроль за состоянием индивидуальных интеллектуальных ресурсов, а также за процессами переработки информации. Метакогнитивный опыт учащегося характеризуется знанием своих индивидуальных интеллектуальных качеств (каковы особенности собственной памяти, мышления, внимания и т.д.), умением оценивать состояние этих интеллектуальных качеств в разные периоды времени и умением корректировать интеллектуальное состояние в соответствии с целями математической деятельности.

Сформированность непроизвольного интеллектуального контроля проявляет себя в наличии способности распределять внимание по всем аспектам проблемной ситуации, учитывать контекст происходящего, тормозить импульсивность при принятии решений в условиях неопределённости. Сюда же относятся способности планировать свою интеллектуальную деятельность, предвосхищать последствия своих действий и возможные изменения ситуации, оценивать отдельные «шаги» в своей интеллектуальной работе и собственные знания в соответствующей предметной области.

Интенциональный опыт – это ментальные структуры, которые лежат в основе индивидуальных интеллектуальных склонностей. Их основное назначение – формирование субъективных критериев выбора относительно определенной предметной области, направления поиска решения, источников информации и способов ее переработки и т.д. В состав входят: предпочтения, т.е. индивидуальные склонности к выбору определённой области, способов ее изучения, убеждения, т.е. совокупность индивидуальных верований относительно «правильности» определённого взгляда на происходящее. Интенциональный опыт есть один из мощнейших источников интуиции.

При обучении решению задач на этапе поиска происходит активная работа интуиции, поэтому есть объективная необходимость при обучении математике задействовать ментальные структуры интенционального опыта интеллекта.

Что же представляет собой интеллект как носитель своих столь многообразных проявлений? М.А. Холодная полагает, что интеллект – это форма организации индивидуального ментального (умственного) опыта. Короче говоря, человек умен в той мере, в какой «внутри» него наличествует ментальный опыт в тех формах организации, которые обусловливают возможность разумного отношения человека к происходящему. Особенности состава и строения ментального опыта предопределяют конкретные свойства интеллекта, которые обнаруживают себя как в характеристиках индивидуального склада ума и обыденного интеллектуального поведения, так и в показателях психологического тестирования и экспериментально-психологического исследования.

Почему один соображает медленно, но верно, тогда как другой – быстро, но бестолково? Почему умные, казалось бы, люди ведут себя на редкость глупо? Почему то, что сейчас большинству кажется логичным, оказывается абсурдным тогда и потом (или не здесь)? Почему все годами наблюдают одно и то же явление, но только один, наконец, изумляется и делает великое открытие? Почему ребенок демонстрирует явное отставание в интеллектуальном развитии, а спустя годы попадает в категорию интеллектуально одаренных?

Таких "*почему*" великое множество, и все они имеют прямое отношение к тем процессам, которые идут в сфере индивидуального ментального опыта и которые лежат в основе интеллектуального роста личности (или ее интеллектуальной деградации).

С учетом предложенной в данной монографии трактовки интеллекта как формы организации ментального опыта – с точки зрения состава и строения наличных ментальных структур, характеристик ментального пространства отражения и своеобразия типа репрезентаций происходящего – критерии развития индивидуального интеллекта следует искать в особенностях индивидуального умозрения (в том, как человек воспринимает, понимает и объясняет происходящее) [37, с. 238].

Гельфман Э.Г. Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся. СПб.: Питер, 2006. 384 с.

Интересный подход к развитию интеллекта учащихся в условиях математического образования был предложен и реализован в экспериментальной программе «Математика. Психология. Интеллект», суть которой сводится к тому, что для интеллектуального воспитания (М.А. Холодная, Э.Г. Гельфман) должны быть созданы определенные специфические условия и развитие (авторы используют термин «обогащение») интеллекта должно быть целенаправленно.

Интеллектуальное воспитание – это такая форма организации образовательного процесса, которая позволяет создать условия для совершенствования интеллектуальных возможностей каждого ученика на основе обогащения его умственного опыта. В отличие от интеллектуального развития, которое предполагает целенаправленное формирование интеллектуальных способностей учащихся как «просто необходимых» для успешной деятельности, интеллектуальное воспитание направленно на выстраивание внутренних интеллектуальных ресурсов учащихся (в рамках позиции «каждый человек умен на свой лад» [5, с. 68]).

Основное назначение интеллектуального воспитания – помочь ребенку выстроить собственный ментальный образ мира на основе обогащения его индивидуального ментального опыта и в конечном счете реализовать присущее ему право быть умным.

Детально проанализировав педагогические подходы к реализации целей образования, Э.Г. Гельфман полагает, что на первый план выходит проблема формирования базовых интеллектуальных качеств личности, таких как компетентность, инициатива, творчество, саморегуляция и уникальность склада ума [5, с. 73].

Каким образом происходит интеллектуальное воспитание в процессе обучения? Э.Г. Гельфман и М.А. Холодная вводят такой термин, как «обогащение», под которым понимается целенаправленное формирование основных компонентов умственного опыта учащихся, лежащих в основе продуктивного интеллектуального поведения, а также рост индивидуального своеобразия склада ума каждого ученика на основе индивидуальных познавательных склонностей.

Локалова Н.П. Школьная неуспеваемость: причины, психокоррекция, психопрофилактика. СПб.: Питер, 200. 368 с.

В работе Н.П. Локаловой рассматривается ряд факторов, влияющих на успешность школьного обучения, излагаются психологические, психофизиологические, психолого-педагогические причины школьной неуспеваемости учащихся начальных, средних и старших классов.

Н.П. Локалова описывает особенности развития познавательной, мотивационной, эмоциональной, произвольно-регуляторной сфера у учащихся, имеющих когнитивные трудности в обучении [20].

Значительное внимание автор уделяет вопросу психопрофилактике школьной неуспеваемости.

Особенностью рассматриваемой книги является включение в него фрагментов психологических и педагогических произведений разных авторов с целью более глубокого освещения соответствующей проблемы.

Определяя школьную неуспеваемость как несоответствие учебных успехов учащегося требованиям школьной программы, Н.П. Локалова выделяет три группы факторов, влияющих на неуспеваемость: нейропсихологические факторы (особенности морфогенеза и функциогенеза), психолого-педагогические факторы (возраст ребенка и методическая система обучения учителя), психологические факторы (уровень умственного развития, психологическая готовность к школьному обучению, индивидуально-типологические особенности, темперамент).

Особенность пособия в том, что в нем проведены глубокие научные исследования, описывающие проблему неуспеваемости с научной точки зрения. Проблема неуспеваемость гораздо сложнее, чем представления о неуспевающем как о «лентяе», и только комплексный подход с привлечением специалистов из разных сфер неврологии, психологии и педагогики может ее решить.

В своей книге Н.П. Локалова приводит разные типы неуспевающих учащихся. Нам представляется, что знакомство учителей математики с этими типологиями позволит правильно оценить учащегося и оказать соответствующую психолого-педагогическую поддержку.

Так, например, ссылаясь на работы Н.И. Мурачковского, можно выделить три типа неуспевающих по математике.

Первый тип неуспевающих по математике характеризуется низким качеством мыслительной деятельности и положительным отношением к учению.

Второй тип неуспевающих по математике характеризуется высоким качеством мыслительной деятельности и отрицательным отношением к математике (или к учителю математики).

Третий тип неуспевающих школьников – это учащиеся с низким качеством мыслительной деятельности и отрицательным отношением к математике. Подробнее о каждом типе и о рекомендациях работы с такими учащимися можно познакомиться в [20].

Далингер В. А. Методика обучения математике. Обучение учащихся доказательству теорем. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 338 с.

В замечательной, уникальной книге В.А. Далингера раскрываются теоретические и практические основы обучения учащихся доказательству математических предложений. Раскрыт категориально-понятийный аппарат, относящийся к понятию «теорема», показаны ее различные виды, общие и частные методы доказательства. Детально описана пропедевтическая работа по обучению учащихся доказательству теорем, показана работа учителя по подготовке к уроку, на котором будет доказываться теорема, рассмотрен вопрос об организации деятельности учащихся по «переоткрытию» формулировки теоремы и поиску способов и методов ее доказательства [8].

Актуальность данного исследования подтверждается формализмом в знаниях учащихся и неумением осуществлять доказательство теорем и математических утверждений. В.А. Далингер связывает это неумение учащихся с недостатками в работе педагога. Поэтому очень важно, по мнению В.А. Далингера:

– показывать учащимся роль и значение доказательства в открытии новых знаний;

– разъяснять школьникам, в чем состоит сущность доказательства как процесса утверждения или опровержения истинности мыслей;

– проводить целенаправленную работу по обучению учащихся индуктивным и дедуктивным рассуждениями;

– планомерно формировать у учащихся умения выводить логические следствия из посылок, приучать школьников логически верно оформлять свои рассуждения;

– учить школьников обобщать познавательные действия, которые выполняются в ходе доказательства [8, с. 6–7].

Епишева О.Б. Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности. М. Просвещение, 1990. 128 с.

В пособии О.Б. Епишевой и В.И. Крупича «Учить школьников учиться математике» раскрываются особенности рациональной учебной деятельности учащихся в обучении математике.

В книге описаны основные положения теории учебной деятельности: учебная деятельность, учебная задача, приемы учебной деятельности и пути их усвоения, требования к методике обучения приемам учебной деятельности.

Особое внимание авторы пособия уделяют приемам учебной деятельности по усвоению математических понятий (описание, демонстрация, конкретизация, приведение контрпримеров, выведение следствий из определений и т.д.).

Пособие снабжено большим количеством указаний и примеров, имеющих практическое значение при организации уроков по математике. Для формирования общеучебных организационных умений учащихся учитель использует главным образом следующие приемы: работа с учебником, составление плана ответа по математике, ведение тетради по математике, организация домашней работы, выполнение письменной работы по математике, изучение содержания теория или задачи, общий прием контроля решения задачи.

О.Б. Епишева пишет: «организуя деятельность учащихся по самостоятельному применению приемов в повседневной учебной деятельности, учитель акцентирует внимание на ситуациях, в которых это можно сделать». С этой целью используются обобщающие уроки, практические и лабораторные работы. Самостоятельная учебная деятельность учащихся по изучению материала включает изучение незнакомого текста учебника, самостоятельную формулировку определений понятий и теорем, поиски различных способов доказательства теорем, подготовку докладов, рефератов и сочинений по математике, поиски наиболее рациональных способов решения задач, рассмотрение софизмов, составление задач учащимися [10, с. 44].

Финкельштейн В.М. Что делать, когда решить задачу не удается. М.: ИЛЕКСА, 2008. 74 с.

В замечательной, уникальной в своем роде, книге В.М. Финкельштейна собрано много наводящих вопросов, которые помогут учащемуся в поиске решения задач.

– Что делать, когда решить задачу не удается?

– Не отчаиваться, а проявить настойчивость! Основательно изучить условие задачи, ответив на вопросы: «Какое из условий задачи я не использовал? Верно ли я понимаю каждое условие и требование? Как можно найти конечный результат?». Подумать: «Какие формулы, определения, теоремы, аксиомы я не использовал? Возможно, мне неизвестны какие-то свойства, признаки заданных и искомых объектов».

– А если и это не помогает?

– Вновь и вновь возвращаться к решению этой задачи.

Чтобы научиться решать задачи, их нужно решать. Опыт решения учащимися математических задач позволил педагогам сформулировать четыре группы рекомендаций в соответствии с основными этапами решения задач.

На примерах автор показывает, как проводить анализ условия задачи, как осуществляется поиск решения задачи, как правильно сделать проверку задачи. В книге приведено много примеров сложных, нестандартных математических задач по разделам арифметики, алгебры, геометрии [35].

Юрченко Е. В. Живая методика математики. М.: МЦНМО, 2013. 144.

В необычной книге учителя математики сформулированы основные методические принципы методики обучения математике [38].

Принцип 1. Правильная последовательность изложения материала. Движение от простого, частного, к общему, более сложному.

Принцип 2. Необходимо уметь разбивать новую информацию на минимально возможные порции (кванты) информации и дидактически прорабатывать каждый такой квант.

Принцип 3. Умение выделять стратегически важный материал и необходимые для дальнейшего обучения навыки. Они должны отрабатываться на уровне до 100 % усвоения.

Принцип 4. Непрерывный контроль усвоения полученного материала – обратная связь.

Принцип 5. Не приступай к новому, не вспомнив старого.

Принцип 6. Готовься к каждому уроку.

Принцип 7. Элементы дифференцированного обучения – повседневная необходимость.

Принцип 8. Собственные ошибки и неточности нельзя пытаться скрыть или замолчать, но необходимо их публично проанализировать.

Принцип 9. Отметка – не карающий меч правосудия, а один из методических инструментов повышения эффективности процесса обучения.

Принцип 10. Любой серьезный рубежный контроль (зачет, экзамен, итоговая контрольная работа по большой теме) должен быть тщательно подготовлен.

Принцип 11. Выбор методических приемов должен соответствовать личным качествам учителя.

В книге живым увлекательным языком приведены примеры педагогических ситуаций, с которыми каждый учитель рано или поздно столкнётся в практике своей работы.

Автор делится своим педагогическим опытом и приводит несколько конспектов уроков по наиболее сложным темам школьного курса, таким как: логарифмы и их свойства, тригонометрические функции произвольного действительного числа, методы решения тригонометрических уравнений, понятие предела числовой последовательности и т.д.

Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М.: Наука, 1976. 448 с.

В популярной книге Д. Пойя приводит обзор методов решения математических задач: двигаясь от рассмотрения частных методов (метода двух геометрических мест, метода Декарта, рекурсии и суперпозиции) к общему методу решения математических задач. В книге Д. Пойя приводит свою классификацию математических задач. Описывает разные пути, приводящие учащегося к «математическому открытию». Особое внимание привлекает глава «Дисциплина ума», в которой приводятся ответы на вопросы: «Как надо думать, Как сконцентрироваться на цели, Как искусно ставить вопросы?». Книга сопровождена большим количеством примеров из курса элементарной и высшей математики.

При обучении решению математических задач автор приводит десять заповедей методики обучения математики [24, с. 305]:

1. Интересуйтесь своим предметом.
2. Знайте свой предмет.
3. Знайте, каким путем можно изучить то, что вам необходимо.
4. Лучший способ изучить – это открыть самому. Умейте читать по лицам учащихся. Старайтесь увидеть, чего они от вас ждут, понять их затруднения; умейте ставить себя на их место.
5. Не ограничивайтесь голой информацией, стремитесь развивать у учащихся определенные навыки, нужный склад ума и привычку к методичной работе.
6. Старайтесь научить их догадываться.
7. Старайтесь научить их доказывать.
8. Выискивайте в вашей задаче то, что может пригодиться при решении других задач – за данной конкретной ситуацией старайтесь обнаружить общий алгоритм, подход.
9. Не выдавайте своего секрета сразу – пусть учащиеся попытаются угадать его до того, как вы его им раскроете, – предоставьте учащимся самим найти как можно больше.
10. Пользуйтесь наводящими указаниями, но не навязывайте своего мнения насильно.

Кислякова М. А. Методика рефлексивного обучения решению математических задач: учебно-методическое пособие. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2020. 207 с.

В настоящем учебно-методическом пособии описан рефлексивный подход к обучению решения математических задач.

В первом разделе рассматриваются теоретические основы рефлексивного обучения математике. Определяется феномен «рефлексии» в психологии, определяются рефлексивные стратегии учебной математической деятельности. Описывается педагогический потенциал математических дисциплин в развитии личности учащегося на всех этапах его обучения. Формулируются принципы рефлексивного обучения математики и условия их реализации в образовательном процессе. Раскрывается модель рефлексивного обучения решению математических задач, включающая в себя педагогические условия, приемы, методы и критерии оценки эффективности рефлексивного обучения математике.

Во втором разделе рассматривается задачный подход к обучению математике. Определяются различные подходы к понятию «математическая задача» и приводится один из вариантов классификации математических задач. Формулируется «обобщенный алгоритм» решения любой математической задачи и приводится обзор методов решения математических задач. Поднимается проблема алгоритмизации в решениях математических задач.

Описываются типичные особенности в решении задач по алгебре и геометрии, которые проявляются в особенностях поиска в решении математических задач.

В третьем разделе описываются рефлексивные стратегии решения математических задач: на этапах анализа условия, поиска решения и осуществление решения задачи. Приводятся методические приемы обучения самоконтролю при решении математических задач и способы проверки проведенного решения.

Приведена концепция автора организации педагогической поддержки учащимся, испытывающим трудности при решении математических задач. Концепция педагогической поддержки включает в себя разнообразные методики.

Пособие сопровождено большим количеством примеров математических задач с решениями и комментариями автора [13].

Успенский В.А. Предисловие к математике: Сборник статей. СПб.: ООО «Торгово-издательский дом «Амформа». 2015. 474 с.

В книге, представляющей собой сборник статей знаменитого математика и лингвиста В.А. Успенского, доступным, живым и очень интересным языком раскрываются сложные вопросы математики и ее места в человеческой культуре.

Автор раскрывает понятия «множество», «кортеж», «соответствие», «функция, отношение». Дает краткое объяснение аксиоматическому методу, объясняя, что такое аксиомы, что такое современный подход к аксиоматизации геометрии, аксиомы метрики и аксиомы меры. Приводит простейшие примеры математических доказательства.

Каждому учителю математики рекомендуется к прочтению семь статей для размышления: Действительно ли в математике все определяется и доказывается? Можно ли определить понятие натурального числа? Что же такое доказательство? Можно ли сделать математику понятной для всех? и т.д.

Приведенные книги лишь малая часть всей литературы по математическому образованию. Знакомство с разными подходами, разными авторами позволит учителю смоделировать свою собственную авторскую методическую систему в условиях современного образования.

Выводы по главе 1

Современный этап развития методической науки характеризуется изменением в ценностях образования, внесением в науку «человеческого измерения», выходом математики за рамки ее логической формы, появлением новых образовательных концепций, совершенствованием методологии научного поиска, изменением представлений о сущности категорий «знание», «умение», «развитие». Теория и методика обучения математике приобрела статус самостоятельной научной области с собственным предметом исследования, методами исследования и теоретическими концепциями.

Вместе с тем в настоящее время в математическом образовании наблюдается парадоксальная ситуация: с одной стороны, накоплен богатый педагогический опыт преподавания математики разным категориям обучающихся, в разных образовательных учреждениях, с другой стороны, происходит снижение качества математической грамотности учащихся, о чем говорят данные результатов государственной итоговой аттестации и международных конкурсов. Проблемы, накопленные в математическом образовании за последние десятилетия, усугубляются в условиях тотальной информатизации общества. Вместе с несомненными плюсами информационные технологии открывают доступ к готовым решениям многих математических задач, снимая с учащегося необходимость «думать своей головой».

Надо полагать, что в современных условиях доступности информации и сложившихся психолого-педагогических трудностей, методика обучения математике должна быть предметом интеграции психолого-ориентированных педагогических подходов. Поскольку, только сочетание наиболее зарекомендовавших себя педагогических подходов может способствовать повышению эффективности математического образования.

В связи с этим, как показывает анализ, научно-педагогические исследования в области методики обучения математике ведутся в следующих направлениях:

– гармонизация идей и методов школьной математики с новыми научными подходами, ориентированными на применение информационных технологий;

– исследование возможной корреляции между этическим компонентом в содержании школьного математического образования и применением математики в современном понимании математической грамотности;

– обновление и согласование понятийного аппарата школьной математики внутри каждого предмета математического цикла и с другими учебными предметами в связи с требованиями компетентностного подхода к образовательным результатам школьников [29, с. 160].

На рис. 1.10 представлены основные вопросы методики обучения математики

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Концептуальные основания	Гуманизация, дифференциация, гуманитаризация, информатизация

КОГО УЧИТЬ МАТЕМАТИКЕ?

Психология математического образования	Неврологические особенности учащихся, математическая деятельность, математические способности, интеллект, познаватлеьные психические процессы, рефлексия

ЗАЧЕМ УЧИТЬ МАТЕМАТИКЕ?

Цели математического образования	Формирование математической грамотности, развитие интеллекта школьников

ЧЕМУ УЧИТЬ?

Содержание школьного математического образования	Содержательно-методические линии, математический язык, история математики, математические методы

КАК УЧИТЬ МАТЕМАТИКЕ?

Средства образовательной коммуникации	Урок математики, методы обучения математике, средства обучения математике, ИКТ

КАК ПРОВЕРЯТЬ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ?

Диагностика результатов процесса обучения	Самостоятельные и контрольные работы, математические диктанты, тесты, проекты, доклады

Рис. 1.10. Основные вопросы методики обучения математике

Библиографические ссылки к главе 1

1. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения (Общедидактический аспект). М.: Педагогика, 1977. 256 с.

2. Беспалько В.П. Природосообразная педагогика. М.: Народное образование, 2008. 512 с.

3. Боженкова Л.И. Интеллектуальное воспитание учащихся при обучении геометрии. Калуга: Изд-во КГПУ им. К.Э. Циолковского, 2007. 281 с.

4. Вишнякова С.М. Профессиональное образование: Словарь. Ключевые понятия, термины, актуальная лексика. М.: НМЦ СПО, 1999. 538 с.

5. Гельфман Э.Г. Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся. СПб.: Питер, 2006. 384 с.

6. Гончарова М.А. Решетникова Н.В. Образовательные технологии в школьном обучении математике. Ростов н/Д: Феникс, 2014. 264 с.

7. Горбачев В.И. Содержание общего математического образования и математическая картина мира // Вестник Брянского университета. 2011. № 1. С. 282–294.

8. Далингер В.А. Методика обучения математике. Обучение учащихся доказательству теорем. М. Изд-во Юрайт, 2019. 338 с.

9. Дорофеев Г.В, Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Фирсов В.В. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. 1990. №4. С. 15–20.

10. Епишева О.Б. Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учеб. деятельности. М. Просвещение, 1990. 128 с.

11. Звенигородская Г.П. Рефлексивное образование: феноменологический подход. Хабаровск: ХГПУ, 2001. 350 с.

12. Звонников В.И. Современные средства оценивания результатов обучения. М.: Академия, 2007. 224 с.

13. Кислякова М. А. Методика рефлексивного обучения решению математических задач: учебно-методическое пособие. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2020. 207 с.

14. Кислякова М.А. Рефлексивное обучение математике: уровень научной проработки, внедрение в практику образования: материалы конференции «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе» (г. Москва, 22-25 апреля 2019) / под ред. Л.Л. Борисовой, Д.И. Павлова. М.: МПГУ, 2019. 829 с. С.314–322.

15. Кислякова М.А., Дворянкина Е.К., Пишкова Н.Е., Табачук Н.П. Современные проблемы методики обучения математике и информатике:

теория и практика: коллективная монография. Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2018. 248 с.

16. Кислякова М.А., Поличка А.Е. Педагогический потенциал математических дисциплин в подготовке студентов гуманитарных профилей: монография. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2019. 240 с.

17. Кислякова М.А., Поличка А.Е. Разработка практических задач в обучении математическим дисциплинам студентов социогуманитарных профилей // Проблемы современного образования. 2019. № 3. С. 153–161.

18. Краевский В.В. Общие основы педагогики. М.: Изд-во «Академия», 2006. 256 с.

19. Крутецкий В.А. Психология математических способностей. М. Издательство «Институт практической психологии»; Воронеж: Издательство НПО «МОДЕК», 1998. 416 с.

20. Локалова Н.П. Школьная неуспеваемость: причины, психокоррекция, психопрофилактика. СПб.: Питер, 2009. 368 с.

21. Мартиросян Л.П. Информатизация математического образования: теоретические основания; научно-методическое обеспечение. М.: ИИО РАО, 2009. 236 с.

22. Метельский В.В. Пути совершенствования математике. Проблемы современной методики математики. Минск: Университетское, 1989. 158 с.

23. Панов В.И. Психодидактика образовательных систем: теория и практика. СПб.: Питер, 2007. 352 с.

24. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа. М.: Наука, 1976. 448 с.

25. Поличка А.Е., Кислякова М.А. Современная проблематика развития и применения средств ИКТ в образовательном пространстве вуза. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2019. 204 с.

26. Роберт И.В. Теория и методика информатизации образования (психолого-педагогический и технологический аспект). 3-е изд. М.: ИИО РАО, 2010. 356 с.

27. Садовников Н. В. Предмет теории и методики обучения математике как научной области // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. 2012. № 28. С. 1012–1019.

28. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе М.: Просвещение, 2002. 224 с.

29. Седова Е.А. Содержание учебного предмета «Математика» в единстве компонентов культуры и структуры личности // Отечественная и зарубежная педагогика. 2018. Т.2. № 1(47). С. 143–168.

30. Снегурова В.И., Подходова Н.С., Орлов В.В. Особенности отбора и реализации содержания школьного курса математики // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. 2018. № 190. С. 175–182.

31. Современные образовательные технологии / под. ред. Н.В. Бордовской. М.:КНОРУС, 2010. 432 с.

32. Стефанова Н.Л. Современная методика обучения математике и методическая подготовка учителя // Вестник Новгородского государственного университета. № 70. 2012. С. 52–55.

33. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. Методика и технология обучения математике. М.: Дрофа, 2005. 416 с.

34. Тестов В.А. О некоторых видах метапредметных результатов обучения математике / Образование и наука. 2016. № 1 (130). С. 4–20.

35. Финкельштейн В.М. Что делать, когда решить задачу не удается. 4-е изд., перераб. М.: ИЛЕКСА, 2008. 74 с.

36. Хинчин А.Я. Педагогические статьи: Вопросы преподавания математики. Борьба с методическим штампами. М.: КомКнига, 2006. 208 с.

37. Холодная М.А. Психология интеллекта: Парадоксы исследования. СПб.: Питер, 2002. 272 с.

38. Юрченко Е.В. Живая методика математики. М.: МЦНМО, 2013. 144.

39. Якиманская, И.С. Психологические основы математического образования. – М.: Академия, 2004. 320 с.

40. Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе. М.: Сентябрь, 1996. 96 с.

41. Якиманская И.С. Развивающее обучение. М.: Педагогика, 1979. 144 с.

ГЛАВА 2
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

«Математика уступает свои крепости лишь сильным и смелым»
А.П. Конфорович

Решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов школьной математики. Решение задач с параметрами требует не только хорошего знания стандартных методов решений уравнений и неравенств, но и умение проводить довольно разветвленные логические построения.

К сожалению, в учебной литературе по задачам с параметрами наблюдается некоторый дефицит. Такая литература, конечно, существует и даже весьма многочисленная. Но выпускаемые книги, задачники и методические пособия на эту тему нередко имеют очень узкую направленность или ориентированы на уже подготовленного школьника. Да и в программах по математике задачам с параметром либо практически вообще не отводится места, либо рассматривается узкий круг задач, либо их изучение затрагивается лишь в 11 классе. Между тем, задачи с параметрами можно и нужно использовать уже начиная с линейных и квадратных уравнений и неравенств, то есть начиная с 7 класса. [13]

Важно, чтобы школьники уже на первых простых примерах усвоили:

- во-первых, необходимость аккуратного обращения с параметром – фиксированным, но неизвестным числом, поняли, что оно имеет двойственную природу (с одной стороны, это некоторое число, с другой стороны, степень свободы общения с ним ограничивается его неизвестностью);
- во-вторых, что запись ответа существенно отличается от записи ответов аналогичных уравнений и неравенств без параметра (например, в качестве ответа могут входить значения параметра, при которых уравнение или неравенство не имеет решения).

Более того, немалая часть задач с параметрами почти никогда не предполагает от школьника выполнения привычного задания «решить уравнение» или «решить неравенство» и формулируется логически более сложно, например, «найти значения параметра a, при которых уравнение будет иметь не более двух корней» или «найти все такие значения величины x, при которых заданное неравенство выполняется для всех a, удовлетворяющих некоторому условию».

Методически было бы правильно каждый пройденный тип уравнений (неравенств) завершать задачами с использованием параметра. Во-первых, школьнику трудно привыкнуть к параметру за два-три занятия – нужно время; во-вторых, использование подобных задач улучшает закрепление пройденного материала; в-третьих, оно способствует развитию его математической и логической культуры, а также развитию интереса к математике, поскольку открывает перед ним новые методы и возможности для самостоятельного поиска [13].

Кроме этого, задачи с параметрами входят в ЕГЭ и, являясь одними из самых сложных задач, их решение оценивается достаточно высоко. На самый высший балл (4 балла) оцениваются только две задачи ЕГЭ: задача № 19 (числа и их свойства) и задача № 18 (задача с параметрами). Казалось бы, что школьники должны максимально заинтересованы в решении таких задач. Однако, согласно результатам выполнения экзаменационных работ, участники экзамена демонстрируют наиболее низкие результаты при решении этих задач.

Если проследить статистику выполнения всех заданий с развернутым ответом профильного уровня по Хабаровскому краю за последние три года, то можно получить следующую картину (Таблица. 1)

Таблица 1

Статистика выполнения заданий с развернутым ответом профильного уровня ЕГЭ по математике в Хабаровском крае. [6; 7; 8]

Задания с развернутым ответом	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	***18***	**19**
2017 год							
% выполнения задания на высший балл	22,4	10	19,4	0,6	3,9	***0,2***	1,4
% выполнения задания (с учетом частичного выполнения)	28,1	22,2	20,6	2,3	5,7	***1,4***	23,1
2018 год							
% выполнения задания на высший балл	17,4	4,4	14,9	0,3	0,4	***0,1***	0,1
% выполнения задания (с учетом частичного выполнения)	21,9	10,4	16,3	3,8	1,2	***1,1***	4,1
2019 год							
% выполнения задания на высший балл	30,9	0,6	11,6	0,7	6,9	***0,8***	0,1
% выполнения задания (с учетом частичного выполнения)	36,2	7,2	13,7	1,8	8,6	***2,7***	7,4

Из приведенной таблицы видно, что выполнимость заданий по данной теме в 2017 – 2019 годах составила не более 3%, что является одним из самых низких результатов среди других показателей. И здесь идет речь не просто о решении всего задания в целом, а даже о его частичном выполнении, то есть получении «ненулевых баллов». Совершенно очевидно, что к «встрече» с такими задачами необходимо специально готовиться.

Трудности решения такого рода задач вызваны прежде всего тем, что в любом случае, даже при решении простейших уравнений и неравенств, содержащих параметры, приходится производить ветвление всех значений параметров на отдельные классы, при каждом из которых задача имеет решение. При этом следует четко и последовательно следить за сохранением равносильности решаемых уравнений или неравенств с учетом области определения выражений, входящих в уравнение или неравенство, а также учитывать выполнимость производимых операций.

В качестве проблемы можно выделить и неумелое применение графического метода решения, который, как показали работы, недостаточно сформирован у участников экзамена. Об этом свидетельствует массовое отсутствие описаний сделанных чертежей и конструкций, а также значительное число работ, в которых ответ на поставленный вопрос отсутствует, несмотря на обилие всевозможных построений [8].

Вместе с тем, совершенно не хочется, чтобы сказанное сформировало у учителя неверное представление о задачах с параметрами как об искусственной преграде на пути к поступлению в вуз. Даже если бы эти задачи не предлагались на вступительных экзаменах, то все равно в школьной математике, особенно в специализированных классах и школах, задачам с параметрами должно уделяться большое внимание. Ведь известно, какую роль играют данные задачи в формировании логического мышления и математической культуры школьников. Поэтому учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются и с другими задачами [2].

Таким образом, необходимо рассмотреть не только основные и наиболее популярные типы задач с параметрами, но и изучить различные приемы и методы их решений, а также затронуть и нестандартные подходы к решению таких задач.

2.1. Основные понятия и определения

Известно, что в программе по математике для неспециализированных школ этим задачам отводится незначительное место. Поэтому, в первую очередь, укажем разделы общеобразовательной математики, в которых вообще присутствует сама идея параметра.

Так, с параметрами учащиеся встречаются при введении некоторых понятий. Рассмотри в качестве примеров следующие объекты:

- функция прямая пропорциональность: $y = kx$ (x и y – переменные; k – параметр, $k \neq 0$);
- линейная функция: $y = kx + b$ (x и y – переменные; k и b – параметры);
- линейное уравнение: $ax + b = 0$ (x – переменная; a и b – параметры);
- квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$ (x – переменная; a, b и c– параметры, $a \neq 0$).

Если вспомнить некоторые основные уравнения (например, $ax + b = 0$ или $ax^2 + bx + c = 0$), то можно заметить, что при поиске их корней значения остальных переменных, входящих в уравнения, считаются фиксированными и заданными. Все разночтения в существующей литературе связаны с толкованием того, какими фиксированными и заданными могут быть эти значения остальных переменных.

Естественно, такой небольшой класс задач многим не позволяет усвоить главное: параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, степень свободы общения ограничивается его неизвестностью. Так, например, деление на выражение, содержащее параметр, извлечение корня четной степени из подобных выражений требует предварительных исследований. Как правило, результаты этих исследований влияют и на решение, и на ответ [2].

Например, в уравнении $ax = 1$ при $a = 0$ равенство не будет выполняться ни при каких значениях переменной x, в уравнении $\frac{x}{a} = 2$ при $a = 0$ левая часть считается не определенной, а в уравнении $(a^2 - 1)x = 1 + a$ при $a = -1$ будет получено тождество верное при любом значении переменной x.

При этом, сложность в решении таких задач заключается в осознании независимости параметра, которая заключается в его «неподчинении» свойствам, вытекающим из условия задачи. Так, например, из неотрицательности левой части уравнения $|x| = a - 1$ не следует неотрицательность значений выражения $a - 1$. А вот если $a - 1 < 0$, то мы обязаны констатировать, что уравнение не имеет решений.

Так что же такое «параметр» и «уравнение с параметром»?

В литературе можно найти несколько определений понятия «параметр». Вот некоторые из них:

Параметр (от греч. parametron отмеривающий) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой [10].

Параметр – величина, постоянная в пределах данного явления или задачи, но при переходе к другому явлению или задаче могущая изменить своё значение [16].

Параметр – это величина, обычно неизвестная и, следовательно, подлежащая оценке, которая представляет определенную характеристику генеральной совокупности [15].

Параметр – величина, числовые значения которой позволяют выделить определенный элемент из множества элементов того же рода [1].

Параметр – величина, характеризующая какое-нибудь основное свойство машины, устройства, системы или явления, процесса [12].

И если с понятием «параметр» получаем множество определений, то с термином «уравнение с параметром» не так все просто. Практически все трактовки сводятся либо к конкретному типу уравнения, либо к термину «решить уравнение с параметром».

Уравнение (неравенство) с параметрами — математическое уравнение (неравенство), внешний вид и решение которого зависит от значений одного или нескольких параметров [14].

Решить соотношение с параметром — это значит для каждого значения параметра указать соответствующее ему множество решений [3].

2.2. Что значит «решить задачу с параметрами»?

Естественно, это зависит от вопроса в задаче. Если, например, требуется решить уравнение или неравенство, то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству.

Если же требуется найти значения параметра, при которых множество решений уравнения или неравенства удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи и состоит в поиске указанных значений параметра.

При этом выделяют четыре основных типа задач с параметрами [11]:

Тип 1. Уравнения или неравенства, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Этот тип задач является базовым, так как остальные типы так или иначе будут связаны с решением уравнения в том или ином виде.

Тип 2. Уравнения или неравенства, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Обращаем внимание на то, что при решении задач данного типа иногда нет необходимости ни решать заданные уравнения или неравенства, ни приводить эти решения, так как в задаче требуется только определить количество решений, а не искать какой они имеют вид. Однако не стоит абсолютизировать сказанное, так как иногда прямое решение в соответствии с типом 1 является единственным разумным путем получения ответа при решении задачи типа 2.

Тип 3. Уравнения или неравенства, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения или неравенства имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений). Заметим, что задачи типа 3 в каком-то смысле обратны задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения или неравенства, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения (например, уравнение или неравенство выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка; множество решений первого уравнения или неравенства является подмножеством множества решений второго уравнения или неравенства и другие).

2.3. Первый шаг. С чего начать?

Основное, что нужно усвоить при первом знакомстве с параметром – это необходимость осторожного обращения с фиксированным, но неизвестным числом. Необходимость такого аккуратного обращения с параметром хорошо видна на тех примерах, где замена параметра числом делает задачу банальной. К таким задачам, например, относятся: сравнить два числа, решить линейное или квадратное уравнение или неравенство и другие [2].

Рассмотрим несколько примеров.

<u>Пример 1:</u>

Сравните два числа: – a и 3a.

Решение:

Самая распространенная ошибка – считать, что в данном примере – *a* меньше *3a*, так как на первый взгляд кажется, что число – *a* является отрицательным, а *3a* – положительным. Но это не совсем так. Сам по себе параметр *a* может принимать любое из трех значений: $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$. Значит необходимо рассмотреть все три случая:

1) если $a > 0$, тогда – *a* действительно является отрицательным, а *3a* – положительным, а значит – *a* меньше *3a*.

2) если $a = 0$, тогда – *a и 3a* обращаются в ноль, а значит они равны.

3) если $a < 0$, тогда – *a* становится положительным, а *3a* – отрицательным, а значит *3a* меньше – *a*.

Ответ: если $a > 0$, то $-a < 3a$; если $a = 0$, то $-a = 3a$; если $a < 0$, то $3a < -a$.

<u>Пример 2:</u>

Решите уравнение $ax = 1$.

Решение:

На первый взгляд представляется возможным дать сразу ответ: $x = \frac{1}{a}$. Однако при $a = 0$ равенство не будет выполняться ни при каких значениях переменной *x*, а значит при таком значении параметра *a* уравнение не будет иметь решений и верный ответ будет иметь вид:

Ответ: если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то нет решений.

<u>Пример 3:</u>

Решить уравнение $(a^2 - 9)x = 3 + a$.

Решение:

Сначала заметим, что левую часть можно разложить на множители и тогда получим:

$(a-3)(a+3)x = a+3$.

Не спешим «избавляться» от $a+3$, так как мы не знаем, обращается ли данное выражение в ноль или нет. Если $a+3=0$ или $a=-3$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, которое будет иметь бесконечное множество решений.

Если $a+3 \neq 0$, то есть $a \neq -3$, тогда поделим обе части уравнения на $a+3$ и получим новое уравнение $(a-3)x = 1$.

Выразим из полученного уравнения переменную: $x = \frac{1}{a-3}$.

Заметим, что параметр теперь находится в знаменателе, а значит, чтобы уравнение имело корни, необходимо наложить условие $a-3 \neq 0$, то есть $a \neq 3$.

Если же $a-3=0$, то знаменатель обратиться в ноль, а значит, уравнение не будет иметь корней.

Ответ: при $a \neq \pm 3$ уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{a-3}$; при $a = 3$ уравнение не имеет корней; при $a = -3$ корнем является любое число.

Кроме этого необходимо четко определить, что из себя представляет заданное уравнение.

Различают три смысла [2]:

1) *x*, *a* – равноценные переменные. Говорят, что задано уравнение или неравенство с двумя переменными и требуется найти все пары (*x*, *a*), которые удовлетворяют данному уравнению или неравенству.

2) x – переменная, a – фиксированное число. Говорят, что задано уравнение или неравенство с одной переменной x и требуется найти значение x, удовлетворяющее уравнению или неравенству при фиксированном значении a.

3) x – переменная, a – любое число из некоторого множества A. Говорят, что задано уравнение или неравенство с переменной x и параметром a (A – множество изменения параметра), требуется решить уравнение или неравенство относительно x для каждого значения a.

Тогда задачу решения уравнения или неравенства с параметром можно переформулировать: *решить семейство уравнений или неравенств, получаемых из уравнения или неравенств при любых действительных значениях параметра*.

Ясно, что выписать каждое уравнение или неравенство из бесконечного семейства уравнений или неравенств невозможно. Тем не менее, каждое уравнение или неравенство семейства должно быть решено.

Сделать это можно, если по некоторому признаку разбить множество всех значений параметра на подмножества и решить затем заданное уравнение или неравенство на каждом из этих подмножеств.

Для разбиения множества значений параметра на подмножества удобно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходят *качественные* изменения уравнения или неравенства. Такие значения параметра называются *контрольными*.

Так, например, рассмотрим уравнение $ax = b$, где a и b – параметры. Попробуем определить, что будет происходить с данным уравнением в зависимости от различных значений параметров a и b.

1) Пусть $a = 0$, тогда уравнение примет вид $0 \cdot x = b$, а значит возможны два случая:

- Если $b = 0$, то получим уравнение $0 \cdot x = 0$, которое будет выполняться при любых значениях переменной x, а значит x может быть любым действительным числом.
- Если $b \neq 0$, уравнение $0 \cdot x = b$ не будет иметь корней, так как левая часть при любых значениях переменной x будет всегда равна нулю, а правая часть уравнения нулю не равна.

2) Пусть $a \neq 0$, тогда из уравнения всегда можно найти решение $x = \dfrac{b}{a}$.

Пример 4:

Решить уравнение $(2a-1)x = 3a + (a+2)x$.

Решение:

Сначала преобразуем исходное уравнение, перенеся слагаемые, содержащие переменную x, в левую часть уравнения:

$(2a-1)x-(a+2)x=3a$,
$(2a-1-a-2)x=3a$,
$(a-3)x=3a$.

Из получившего уравнения выразим переменную: $x=\dfrac{3a}{a-3}$

Проанализируем получившееся выражение при различных значениях параметра *a*:

1) если $a=3$, то знаменатель обратится в ноль, а значит, выражение $\dfrac{3a}{a-3}$ становится неопределенным и в этом случае считается, что уравнение не имеет решений.

2) если $a\neq 3$, то выражение $\dfrac{3a}{a-3}$ может быть вычислено при любых значениях параметра *a* и это значение будет единственным для каждого значения параметра *a*.

Таким образом, получаем результат.

Ответ: уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{3a}{a-3}$ при $a\neq 3$, уравнение не имеет корней при $a=3$.

<u>Пример 5:</u>

Решить уравнение $(1-3a)x-a=3ax+(a-2)x+1$.

Решение:

Преобразуем исходное уравнение:

$(1-3a)x-3ax-(a-2)x=1+a$,
$(1-3a-3a-a+2)x=1+a$,
$(3-7a)x=1+a$.

Из получившего уравнения выразим переменную: $x=\dfrac{1+a}{3-7a}$

Проанализируем получившееся выражение при различных значениях параметра *a*:

1) если $a=\dfrac{3}{7}$, то уравнение не имеет решений.

2) если $a\neq\dfrac{3}{7}$, то выражение $\dfrac{1+a}{3-7a}$ может быть вычислено при любых значениях параметра *a* и это значение будет единственным для каждого значения параметра *a*.

Ответ: уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{1+a}{3-7a}$ при $a\neq\dfrac{3}{7}$, уравнение не имеет корней при $a=\dfrac{3}{7}$.

Заметим, что существенным этапом решения задачи с параметром является запись ответа. Наличие параметра в задаче предполагает специальную форму его записи, позволяющую установить, каков ответ для любого допустимого значения параметра. Недопустимые значения также указываются в ответе, и считается, что при этих значениях параметра задача не имеет решения.

Обращаем так же внимание и на тот факт, что во всех рассмотренных выше примерах областью допустимых значений как для переменной, так и для параметра являлось все множество действительных чисел. Разумеется, что примеры иного рода также следует рассмотреть.

Пример 6:

Решить уравнение $\dfrac{x-a}{x-1}=0$.

Решение:

Легко увидеть, что $x=a$ – единственный корень данного уравнения. Однако, этот результат – еще не ответ.

Как уже отмечалось, специфика задач с параметрами предполагает отмечать и недопустимые значения параметра a.

Видно, что условие $x\neq 1$ влечет за собой требование $a\neq 1$. И тогда ответ примет вид:

Ответ: если $a\neq 1$, то $x=a$; если $a=1$, то нет решений.

Пример 7:

Решить уравнение $\dfrac{2(a+1)x}{a}=3(x+1)+\dfrac{7}{a}$.

Решение:

На первый взгляд кажется, что уравнение не имеет корней только при условии, что знаменатель обратится в ноль, то есть только при $a=0$.

Но, положим $a\neq 0$ и преобразуем исходное уравнение, перенеся все слагаемые в левую часть и приведя к общему знаменателю:

$$\frac{2(a+1)x}{a}-3(x+1)-\frac{7}{a}=0,$$

$$\frac{2(a+1)x-3(x+1)a-7}{a}=0,$$

$$\frac{(2-a)x-(3a+7)}{a}=0.$$

Умножим обе части уравнения на $a \neq 0$ и выразим *x*, получим:

$(2-a)x-(3a+7)=0$, тогда $x=\dfrac{3a+7}{2-a}$.

Получаем, что выражение $\dfrac{3a+7}{2-a}$ не имеет смысла при $a=2$.

Ответ: если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x=\dfrac{3a+7}{2-a}$; если $a=0$ и $a=2$, то уравнение не имеет корней.

Далее рассмотрим еще несколько примеров, но в несколько ином направлении, а именно, выделим задачи, где за счет параметра на переменную накладываются какие-либо искусственные ограничения.

Пример 8:

Найти значения параметра а, при которых уравнение $ax^2+(2a+1)x+1=0$ *будет иметь только один положительный корень.*

Решение:

1. Обратим внимание на то, что относительно переменной *x* уравнение является квадратным при условии, что $a \neq 0$.

Решим уравнение при $a=0$:

$x+1=0$, откуда получаем корень $x=-1$, который не удовлетворяет условию задачи.

2. Рассмотрим решение уравнения при $a \neq 0$.

Тогда исходное уравнение является квадратным и возможны три случая:

1) уравнение имеет два различных корня,

2) уравнение имеет один корень,

3) уравнение не имеет корней.

Для всех случаев необходимо найти дискриминант:

$$D=(2a+1)^2-4a=4a^2+4a+1-4a=4a^2+1$$

Но, так как выражение $4a^2+1>0$ при любых значениях параметра *a* ($a \neq 0$), то уравнение будет всегда иметь два корня, при этом:

$$x_{1,2}=\frac{-(2a+1)\pm\sqrt{4a^2+1}}{2a}.$$

Согласно условию задачи, нам необходимо, чтобы только один корень был положительным, то есть корни должны быть разных знаков, а значит $x_1 \cdot x_2<0$. Получим,

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-(2a+1)+\sqrt{4a^2+1}}{2a} \cdot \frac{-(2a+1)-\sqrt{4a^2+1}}{2a} = \frac{(-(2a+1))^2 - \left(\sqrt{4a^2+1}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{4a^2+4a+1-4a^2-1}{4a^2} = \frac{4a}{4a^2} = \frac{1}{a}$$

То есть при $a < 0$ корни будут разных знаков.

Обратим внимание, что при вычислении выражения $x_1 \cdot x_2$ можно было обойтись и без вычисления корней квадратного уравнения, а воспользоваться напрямую теоремой Виета (а именно условием $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$). Согласно данной формуле, можно сразу получить выражение $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a}$.

Ответ: уравнение имеет только один положительный корень при $a < 0$.

<u>Пример 9:</u>

Найти значения параметра а, при которых решением неравенства $(x-a)^2(x-2)(x+3) \le 0$ *будет отрезок.*

Решение:

Так как $(x-a)^2 \ge 0$, то данное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}(x-2)(x+3) \le 0, \\ \qquad x = a.\end{array}\right.$$

Решением неравенства $(x-2)(x+3) \le 0$ будет отрезок $[-3; 2]$. Следовательно, при $a \in [-3; 2]$ решением совокупности также будет отрезок.

Ответ: если $-3 \le a \le 2$, то решением неравенства будет отрезок.

2.4. Каковы основные способы (методы) решения задач с параметром?

Знакомиться с какой-либо задачей – это фактически знакомиться с методами ее решения. Так, по сути дела, рассматривая выше примеры, началось изучение одного из методов решения задач с параметрами.

Выделяют несколько методов решения задач с параметрами. Рассмотрим некоторые из них [2; 9; 11; 13]:

<u>1 метод. Аналитический</u>

Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

Однако здесь есть моменты, на которые следует обращать особое внимание:

- определить контрольные значения параметра, при котором происходит качественное изменение исходного уравнения или неравенства (например, задано квадратичное уравнение, а при определенном значении параметра оно становится линейным);
- определить значения параметра, при котором исходное уравнение или неравенство не имеет смысла (например, в случаях когда некоторые значения параметра могут привести выражение, находящееся в знаменателе, к значению ноль);
- определить значения параметра, приводящие исходное уравнение или неравенство к тождественному выражению (тогда уравнение или неравенство будет иметь бесконечное множество решений) или к ложному выражению (тогда уравнение или неравенство не будет иметь корней).

Таким образом, с одной стороны, многим школьникам близок аналитический метод, так как они в достаточной степени владеют различными методами и приемами решения уравнений и неравенств. С другой стороны, аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Прежде чем приступить к практике, отметим некоторые сведения, которые помогут при решении задач:

1) Уравнение вида

$$ax - b = 0,$$

где a и b – выражения, зависящие только от параметров, а x – неизвестное, называется ***линейным относительно x***.

Оно приводится к виду $ax = b$ и:

- при $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$ при действительных a и b;
- при $a = 0$ и $b = 0$ решением уравнения является x – любое число;
- при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ уравнение решений не имеет.

2) Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x – неизвестное, a, b, c – выражения, зависящие только от параметров и $a \neq 0$, называется ***квадратным относительно x***.

Контрольные значения параметров определяются из следующих условий:

- при $a = 0$ квадратное уравнение становится линейным $bx + c = 0$;
- при $a = 0$ и $b = 0$ уравнение будет иметь корнем x – любое число при $c = 0$ и не иметь корней при $c \neq 0$;
- при $a \neq 0$ наличие корней определяется через значение дискриминанта $D = b^2 - 4ac$:
  - если $D > 0$, то исходное уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;
  - если $D = 0$, то уравнение имеет корень $x = \dfrac{-b}{2a}$ (заметим, что этот корень определяет абсциссу вершины параболы);
  - если $D < 0$, то уравнение решений не имеет.

3) Процесс решения дробно-рациональных уравнений или неравенств протекает по обычной схеме: обе части уравнения или неравенства умножаются на общий знаменатель левой и правой его частей (при решении неравенства необходимо учитывать знак общего знаменателя, так как при умножении необходимо знать, поменяется ли знак неравенства или останется без изменения). После чего решаем полученное уравнение или неравенство известными способами, исключая посторонние корни, то есть числа, которые обращают общий знаменатель в нуль.

Итак, рассмотрим еще несколько примеров, демонстрирующие аналитический метод.

Пример 10:

Решить уравнение $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a + 3 = 0$.

Решение:

Сперва обратим внимание на то, что относительно переменной x уравнение является квадратным при условии, что $a - 1 \neq 0$, то есть при $a \neq 1$.

Решим уравнение при $a = 1$:

$(1-1)x^2 + 2(2 \cdot 1 + 1)x + 4 \cdot 1 + 3 = 0$,

$6x + 7 = 0$,

Окончательно получаем, что при $a = 1$ уравнение имеет корень $x = -\dfrac{7}{6}$.

Теперь рассмотрим решение уравнения при $a \neq 1$.

Тогда исходное уравнение является квадратным и возможны три случая:

1) уравнение имеет два различных корня,

2) уравнение имеет один корень,

3) уравнение не имеет корней.

Для всех случаев необходимо найти дискриминант:

$$D = \left(2(2a+1)\right)^2 - 4(a-1)(4a+3) = 4\left(4a^2+4a+1\right) - 4\left(4a^2+3a-4a-3\right) = 20a+16$$

Тогда получаем следующие рассуждения:

1) уравнение имеет два различных корня при условии, что дискриминант положителен, то есть когда $20a+16>0$ или $a>-\frac{4}{5}$ и при этом его корни имеют вид

$$x_{1,2} = \frac{-2(2a+1) \pm \sqrt{20a+16}}{2(a-1)} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

2) уравнение имеет ровно один корень когда дискриминант равен нулю, то есть при условии, что $20a+16=0$ или при $a=-\frac{4}{5}$. Учитывая найденное значение параметра *a*, решим исходное уравнение:

$$\left(-\frac{4}{5}-1\right)x^2 + 2\left(2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+1\right)x + 4\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+3 = 0,$$

$-\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{1}{5} = 0$ (домножим уравнение на - 5),

$$9x^2+6x+1=0,$$

$$(3x+1)^2=0,$$

$$x=-\frac{1}{3}.$$

3) уравнение не имеет корней, если дискриминант отрицателен, то есть при $20a+16<0$ или при $a<-\frac{4}{5}$.

Ответ:

1) если $a>-\frac{4}{5}$ и $a\neq 1$, то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$,

2) если $a=1$, то $x=-\frac{7}{6}$; если $a=-\frac{4}{5}$, то $x=-\frac{1}{3}$,

3) если $a<-\frac{4}{5}$, то уравнение не имеет корней.

<u>Пример 11:</u>

При каких значениях параметра а уравнение $|x+2|=ax$ имеет единственный корень не превышающий 5.

Решение:

Для каждого значения параметра a решим данное уравнение, после чего отберем те значения параметра, при которых уравнение будет иметь единственный корень не превышающий 5.

На основании определения модуля заключаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+2=ax \\ x+2\ge 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -x-2=ax \\ x+2<0 \end{cases}$$

Решим каждую систему в отдельности.

1) Решим первую систему.

Система $\begin{cases} x+2=ax \\ x+2\ge 0 \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} (a-1)x=2 \\ x\ge -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\dfrac{2}{a-1} \\ x\ge -2 \end{cases}$.

Значит система имеет единственное решение $x=\dfrac{2}{a-1}$ при $\dfrac{2}{a-1}\ge -2$, при этом:

а) если $a>1$, то $2\ge -2(a-1)$ или $a\ge 0$, а значит получаем условие для параметра $a>1$,

б) если $a<1$, $2\le -2(a-1)$ или $a\le 0$, следовательно, получаем условие для параметра $a\le 0$.

2) Решим вторую систему.

Система $\begin{cases} -x-2=ax \\ x+2<0 \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} (a+1)x=-2 \\ x<-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\dfrac{-2}{a+1} \\ x<-2 \end{cases}$.

Значит система имеет единственное решение $x=\dfrac{-2}{a+1}$ при $\dfrac{-2}{a+1}<-2$, при этом:

а) если $a>-1$, то $-2<-2(a+1)$ или $a<0$, а значит получаем условие для параметра $-1<a<0$,

б) если $a<-1$, то $-2>-2(a+1)$ или $a>0$, следовательно, $a\in\varnothing$.

Таким образом, получаем, что система имеет единственное решение при следующих условиях:

1) если $a\le 0$ или $a>1$, то $x=\dfrac{2}{a-1}$

2) если $-1<a<0$, то $x=\dfrac{-2}{a+1}$

Теперь учтем требование задачи, что найденный корень не должен превышать число 5.

Рассмотрим в отдельности каждое полученное условие для параметра a:

1) пусть $a \le 0$, тогда

$x = \dfrac{2}{a-1} \le 5$ (домножим обе части неравенства на $a-1 \le 0$, т.к. $a \le 0$)

$2 \ge 5a - 5$ или $a \le \dfrac{7}{5}$, а значит, учитывая условие $a \le 0$, получим, что при $a \le 0$ уравнение имеет единственный корень, который не будет превышать 5.

2) пусть $a > 1$, тогда

$x = \dfrac{2}{a-1} \le 5$ (домножим обе части неравенства на $a-1 > 0$, т.к. $a > 1$)

$2 \le 5a - 5$ или $a \ge \dfrac{7}{5}$, а значит, учитывая условие $a > 1$, получим, что при $a \ge \dfrac{7}{5}$ уравнение имеет единственный корень, не превышающий 5.

3) пусть $-1 < a < 0$, тогда

$x = \dfrac{-2}{a+1} \le 5$ (домножим обе части неравенства на $a+1 > 0$, так как $-1 < a < 0$)

$-2 \le 5a + 5$ или $a \ge -\dfrac{7}{5}$, а значит, учитывая условие $-1 < a < 0$, получим, что при $-1 < a < 0$ уравнение имеет единственный корень, удовлетворяющий условию задачи.

Ответ:

1) если $a \le 0$ или $a \ge \dfrac{7}{5}$, то корень $x = \dfrac{2}{a-1}$ не превышает 5,

2) если $-1 < a < 0$, то корень $x = \dfrac{-2}{a+1}$ не превышает 5.

<u>Пример 12:</u>

Решить неравенство $\dfrac{2x-5}{a-1} - \dfrac{x+7}{3} \le \dfrac{3x-2a}{2(a-1)}$.

Решение:

Из вида неравенства сразу можно заметить, что при $a = 1$ это неравенство не имеет смысла, а значит и не имеет решений.

Если $a \ne 1$, то рассмотрим решение неравенства при условиях: $a > 1$ и $a < 1$.

1) пусть $a>1$, тогда $a-1>0$, следовательно, умножив исходное неравенство на $6(a-1)>0$, получим

$6(2x-5)-2(x+7)(a-1)\le 3(3x-2a)$,

$12x-30-2ax+2x-14a+14\le 9x-6a$,

$5x-2ax\le 8a+16$,

$(5-2a)x\le 8a+16$.

Тогда возможны три случая:

а) если $5-2a>0$ или $1<a<2{,}5$ (с учетом условия $a>1$), то $x\le\dfrac{8a+16}{5-2a}$,

б) если $5-2a=0$ или $a=2{,}5$, то $0\cdot x\le 28$ или $0\le 28$, что является верным при любых действительных значениях x.

в) если $5-2a<0$ или $a>2{,}5$ (условие $a>1$ входит в рассматриваемый интервал), то $x\ge\dfrac{8a+16}{5-2a}$,

2) пусть теперь $a<1$, тогда $a-1<0$, следовательно, умножив исходное неравенство на $6(a-1)<0$, получим

$6(2x-5)-2(x+7)(a-1)\ge 3(3x-2a)$,

$12x-30-2ax+2x-14a+14\ge 9x-6a$,

$5x-2ax\ge 8a+16$,

$(5-2a)x\ge 8a+16$.

И снова рассмотрим три случая:

а) если $5-2a>0$ или $a<1$ (с учетом условия $a<1$), то $x\ge\dfrac{8a+16}{5-2a}$,

б) если $5-2a=0$, то $a=2{,}5$, но это значение параметра не удовлетворяет условию $a<1$.

в) если $5-2a<0$, то учитывая условие $a<1$, получим $a\in\varnothing$.

Объединив полученные решения, окончательно получим ответ.

Ответ:

1)при $1<a$ и $a>2{,}5$ получим $x\ge\dfrac{8a+16}{5-2a}$;

2)при $1<a<2{,}5$ имеем $x\le\dfrac{8a+16}{5-2a}$;

3) при $a=2{,}5$ решением является любое действительное число;

4) при $a=1$ неравенство не имеет решений.

<u>Пример 13:</u>

Найти значения параметра а, при которых уравнение $\left(a+6x-x^2-8\right)\left(a-1+|x-3|\right)=0$ *имеет ровно три различных корня.*

Решение:

Заметим, что левая часть исходного уравнения будет равна нулю, когда $a+6x-x^2-8=0$ или $a-1+|x-3|=0$.

Решим первое уравнение.

Представим его в виде квадратного уравнения относительно переменной *x*: $x^2-6x+8-a=0$. Это уравнение имеет:

- два корня $x_{1,2}=3\pm\sqrt{1+a}$, если $a>-1$,
- один корень $x=3$, если $a=-1$,
- не имеет корней, если $a<-1$.

Решим второе уравнение.

На основании определения модуля заключаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} a+x-4=0 \\ x-3\geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a-x+2=0 \\ x-3<0 \end{cases}$$

Решим каждую систему в отдельности.

1) Решим первую систему.

Система $\begin{cases} a+x-4=0 \\ x-3\geq 0 \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} x=4-a \\ x\geq 3 \end{cases}$, которая имеет корни, если $a\leq 1$.

2) Решим вторую систему.

Система $\begin{cases} a-x+2=0 \\ x-3<0 \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} x=a+2 \\ x<3 \end{cases}$, которая имеет корни, если $a<1$.

Таким образом, получаем, что система имеет:

1) единственное решение $x=3$, если $a=1$,

2) два решения $x=4-a$ и $x=a+2$, если $a<1$,

3) не имеет решений, если $a>1$

Осталось выяснить, совпадают ли корни первого и второго уравнений. Для этого решим следующие уравнения:

а) $3+\sqrt{1+a}=4-a$ или $\sqrt{1+a}=1-a$.

Если $1+a\geq 0$ и $1-a\geq 0$, то $1+a=(1-a)^2$ и тогда получим, что при $a=0$ корни $3+\sqrt{1+a}$ и $4-a$ совпадут.

б) $3+\sqrt{1+a}=a+2$ или $\sqrt{1+a}=a-1$.

Если $1+a\geq 0$ и $a-1\geq 0$, то $1+a=(a-1)^2$ и тогда получим $a=3$, при котором система не имеет корней.

в) $3-\sqrt{1+a}=4-a$ или $\sqrt{1+a}=a-1$.

Если $1+a\geq 0$ и $a-1\geq 0$, то $1+a=(a-1)^2$ и тогда получим $a=3$, при котором система не имеет корней.

г) $3-\sqrt{1+a}=a+2$ или $\sqrt{1+a}=1-a$

Если $1+a\geq 0$ и $1-a\geq 0$, то $1+a=(1-a)^2$ и тогда получим, что при $a=0$ корни $3-\sqrt{1+a}$ и $a+2$ совпадут.

Итак, заметим ключевые значения параметра: $a=-1$, $a=0$ и $a=1$. При переходе через каждую из этих точек (и в самих точках тоже) происходит изменение количества корней:

1) если $a<-1$, то уравнение имеет два корня,
2) если $a=-1$, то уравнение имеет три корня,
3) если $-1<a<0$, то уравнение имеет четыре корня,
4) если $a=0$, то уравнение имеет два корня,
5) если $0<a<1$, то уравнение имеет четыре корня,
6) если $a=1$, то уравнение имеет три корня,
7) если $a>1$, то уравнение имеет два корня,

Ответ: уравнение имеет ровно три различных корня, если $a=\pm 1$.

<u>Пример 14:</u>

Решить уравнение $\sqrt{1-x^2}=a-x$.

Решение:

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1-x^2=(a-x)^2 \\ a-x\geq 0 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение системы. Получим квадратное уравнение $2x^2-2ax+a^2-1=0$, корнями которого будут $x_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$.

Далее проверим, при каких значения параметра *a*, найденные корни будут удовлетворять неравенству системы:

1) Пусть $x_1=\dfrac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}$.

Тогда $a-\dfrac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}\geq 0$ или $a\geq\sqrt{2-a^2}$. Если $a\geq 0$ и $2-a^2\geq 0$, то $a^2\geq 2-a^2$ и тогда окончательно получим значения: $1\leq a\leq\sqrt{2}$.

2) Пусть $x_2=\dfrac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$.

Тогда $a-\dfrac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}\ge 0$ или $\sqrt{2-a^2}\ge -a$. Но тогда возможны два случая:

а) Если $a\le 0$ и $2-a^2\ge 0$, то $2-a^2\ge a^2$ и тогда получим: $-1\le a\le 0$.

б) Если $a>0$, то $2-a^2\ge 0$ и тогда получим: $0<a\le\sqrt{2}$.

Окончательно получаем значения: $-1\le a\le\sqrt{2}$.

Для подведения итога осталось выделить множество значений параметра, при которых система будет иметь решение при любом из найденных корней, а именно $-1\le a\le\sqrt{2}$.

Ответ: если $-1\le a\le\sqrt{2}$, то уравнение имеет корни $x_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$; при остальных *a* корней нет.

<u>2 метод. Графический</u>

В зависимости от того какая роль параметру отводится в задаче (неравноправная или равноправная с переменной), можно соответственно выделить два основных графических приема: первый – построение графического образа на координатной плоскости $(x;y)$, второй – на $(x;a)$.

При этом важно помнить, что не все задачи могут быть решены графическим методом, так как данный метод не является универсальным. Лучше всего решаются задачи с параметрами на нахождение количества решений, так как на «языке» графиков количество корней – это количество точек пересечения (или их отсутствие) графиков функций [2; 9; 13].

Для применения графических методов требуется умение выполнять дополнительное построение различных графиков, вести графические исследования, соответствующие данным значениям параметра. Здесь важно понимать, какие графики могут получаться или как будет изменяться построенный график в зависимости от различных значений параметра.

Так, например, на первый взгляд может показаться, что уравнение $y=ax$ при любых значениях параметра *a* задает множество всех прямых, проходящих через начало координат. Однако среди всех таких прямых существует прямая, проходящая через начало координат, но не удовлетворяющая условию задачи, и это прямая, совпадающая с осью *Oy*, уравнение которой имеет вид $x=0$.

Отметим некоторые сведения, которые помогут при построении графиков функций:

1. <u>Параллельный перенос</u>:

а) график функции $y=f(x)+a$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вдоль оси *Oy* на $|a|$ единиц (вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$);

b) график функции $y=f(x-a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вдоль оси *Ox* на $|a|$ единиц (вправо, если $a>0$, и влево, если $a<0$);

2. Сжатие и растяжение:

a) график функции $y=kf(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ растяжение (сжатием) вдоль оси *Oy* в *k* раз ($1/k$ раз), если $k>1$ ($0<k<1$);

b) график функции $y=f(kx)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сжатием (растяжение) вдоль оси *Ox* в *k* раз ($1/k$ раз), если $k>1$ ($0<k<1$);

3. Осевая симметрия:

a) график функции $y=-f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ симметричным отображением относительно оси *Ox*;

b) график функции $y=f-(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ симметричным отображением относительно оси *Oy*;

4. Преобразования, содержащие знак абсолютной величины:

a) график функции $y=f(|x|)$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: совпадает с графиком $y=f(x)$ для $x\geq 0$ и является его симметричным отображением относительно оси *Oy* для $x<0$;

b) график функции $y=|f(x)|$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: совпадает с графиком $y=f(x)$, если $f(x)\geq 0$ и является его симметричным отображением относительно оси *Ox* для $f(x)<0$;

c) график функции $|y|=f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: совпадает с графиком $y=f(x)$, если $f(x)\geq 0$ и является его симметричным отображением относительно оси *Ox* для $f(x)\geq 0$.

Пример 15:

При каких значениях параметра а уравнение $|x-a|=x$ имеет ровно один корень?

Решение:

Переведем задачу на «язык» графиков.

Решить уравнение $|x-a|=x$ графически, значит найти точки пересечения графиков двух функций $y=|x-a|$ и $y=x$. Построим данные графики в одной координатной плоскости.

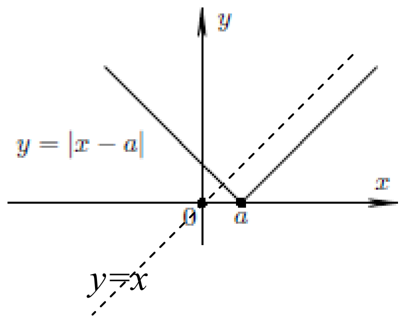
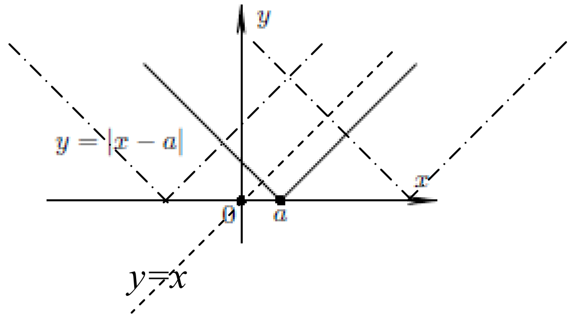


График функции $y = x$ – прямая, не зависящая от параметра *a*. Значит ее положение не будет меняться при изменении значения параметра *a*.

График функции $y = |x - a|$ – ломаная линия, которая будет менять свое положение в зависимости от значения параметра *a*. При чем линия будет двигаться вдоль оси Ох вправо, если $a < 0$ и влево – если $a > 0$.



Из рисунка видно, что при любом значении параметра $a \neq 0$ ломаная $y = |x - a|$ всегда пересекается с прямой $y = x$ в одной точке, а значит имеет единственное решение.

Если $a = 0$, то возможны два исхода:

1) при $x > 0$, графики совпадут, а значит, уравнение имеет бесконечное множество решений,

2) при $x < 0$, графики не будут иметь общих точек, следовательно, уравнение не будет иметь корней.

Ответ: при $a \neq 0$ уравнение $|x - a| = x$ имеет ровно один корень.

Пример 16:

При каких значениях параметра а уравнение $|x-1| = a$ будет иметь не более одного корня.

Решение:

Снова переведем задачу на «язык» графиков.

График первой функции $y = |x - 1|$ получается из графика функции $y = |x|$ путем смещения на 1 единицу вправо, при этом в дальнейшем полученный график смещаться не будет, так как он не зависит от значения параметра *a*.

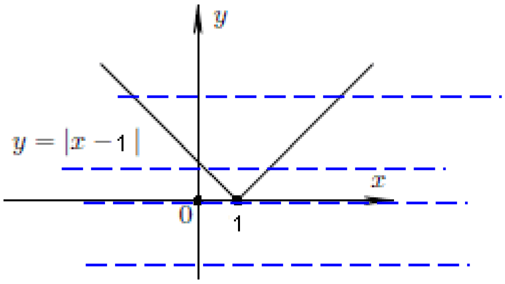
Графиком второй функции $y = a$ является прямая, параллельная оси *Ox*. Расположение графика второй функции теперь зависит от параметра *a*, и при этом:

1) если $a > 0$, то прямая $y = a$ расположена выше оси Ox,

2) если $a = 0$, то прямая совпадает с осью Ox,

3) если $a < 0$, то прямая $y = a$ расположена ниже оси Ox.

Покажем эти рассуждения на рисунке.



Таким образом, мы получаем:

1) если $a > 0$, то прямая $y = a$ пересекает график функции $y = |x-1|$ в двух точках,

2) если $a = 0$, то прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = |x-1|$ только одну общую точку,

3) если $a < 0$, то прямая $y = a$ с графиком функции $y = |x-1|$ не имеет ни одной общей точки.

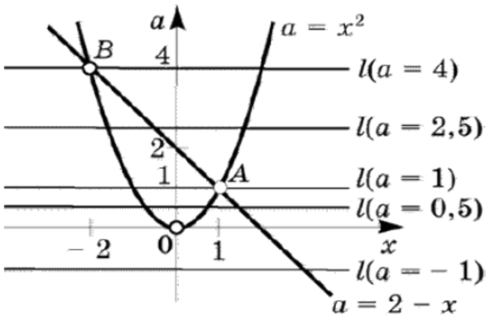
Ответ: при $a \le 0$ уравнение $|x-1| = a$ будет иметь не более одного корня.

Пример 17:

Для всех действительных значений параметра а найдите число различных корней уравнения $(a - x^2)(a + x - 2) = 0$.

Решение:

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $a - x^2 = 0$ и $a + x - 2 = 0$. Поэтому построение искомого множества точек сводится к построению графиков $a = x^2$ и $a = 2 - x$.



Координаты точек пересечения графиков определяются как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a = x^2 \\ a = 2 - x \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдем координаты $(1;1)$ точки A и $(-2;4)$ – точки B.

Понятно, что все точки изображенных параболы и прямой имеют координаты $(x;a)$, удовлетворяющие исходному уравнению. Поэтому количество различных корней уравнения по переменной x при каждом значении параметра a_0 совпадает с количеством точек пересечения прямой l, задаваемой равенством $a = a_0$, с построенным множеством точек.

Рассмотрим различные значения параметра a в зависимости от взаимного расположения параболы $a = x^2$, прямой $a = 2 - x$ и прямой l:

1) если $a < 0$, то прямая l лежит в нижней полуплоскости и пересекает график исходного уравнения в одной точке, то есть при $a < 0$ уравнение имеет только один корень.

2) если $a = 0$, то прямая l касается параболы $a = x^2$, то есть имеет с ней одну общую точку и пересекает прямую $a = 2 - x$, а это означает, что уравнение при $a = 0$ имеет два различных решения.

3) если $a = 1$ и $a = 4$, то прямая l проходит через точки пересечения параболы $a = x^2$ и прямой $a = 2 - x$, а значит, что при $a = 1$ и $a = 4$ уравнение также имеет два различных решения.

4) если $0 < a < 1$, $1 < a < 4$ и $a > 4$, то прямая l пересекает график уравнения в трех точках, следовательно, уравнение имеет три различных решения.

Ответ:

1) если $a < 0$, то уравнение имеет единственное решение.

2) если $a = 0$, $a = 1$ и $a = 4$, то уравнение имеет два различных решения.

3) если $0 < a < 1$, $1 < a < 4$ и $a > 4$, то уравнение имеет три различных решения.

<u>Пример 18:</u>

Найти площадь множества точек $(x;y)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y \le -1 \\ 3x - 2y + 1 \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

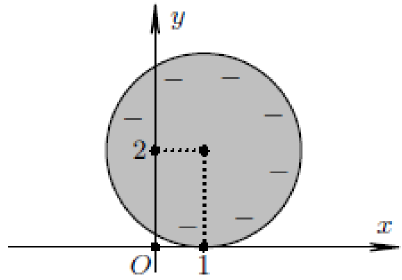
Преобразуем первое неравенство, выделив полный квадрат:

$x^2+y^2-2x-4y\le -1$,

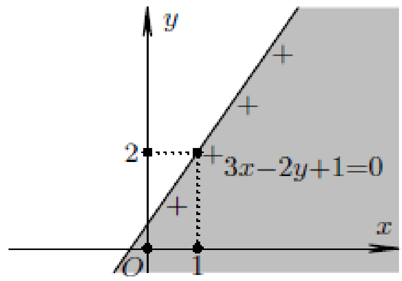
$\left(x^2-2x+1\right)-1+\left(y^2-4y+4\right)-4\le -1$,

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 4$.

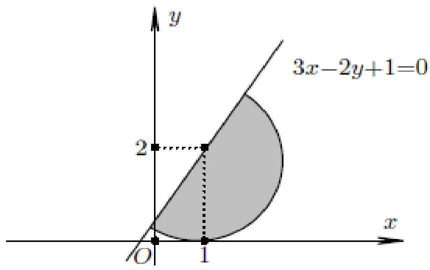
Получаем, что последнее неравенство задает окружность с центром в точке $(1;2)$ и радиусом 2 и область внутри нее.



Уравнение $3x-2y+1=0$ задает прямую, которая делит всю плоскость на две части, а неравенство $3x-2y+1\ge 0$ говорит о том, что необходимо взять правую полуплоскость.



Объединяя два получившихся рисунка, получаем искомое множество точек.



А заметив, что прямая $3x-2y+1=0$ проходит через центр заданной окружности, получаем, что искомое множество – это половина круга радиуса 2. Следовательно, площадь равна $S=\dfrac{\pi R^2}{2}=2\pi$.

Ответ: $S=2\pi$.

Заметим, что некоторые задачи, решенные аналитически, могут быть решены и графическим методом. Более того, иногда, использование графического метода облегчает поиск решения.

<u>Пример 19:</u>

Найти значения параметра а, при которых уравнение $(a+6x-x^2-8)(a-1+|x-3|)=0$ *имеет ровно три различных корня.*

Решение:

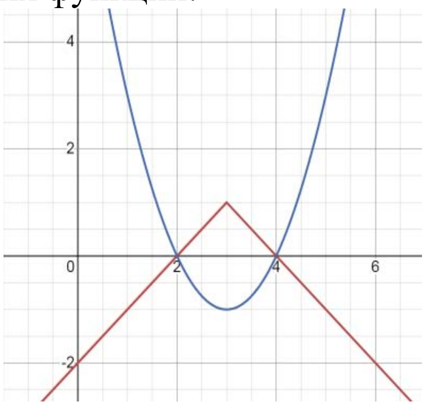
Заметим, что данный пример уже был решен аналитическим методом (смотри Пример 13). Попробуем решить его графически.

Левая часть исходного уравнения обращается в ноль, если $a+6x-x^2-8=0$ или $a-1+|x-3|=0$. Тогда решением исходного уравнения будет являться совокупность полученных уравнений.

Выразим из этих уравнений параметр a, получим: $a=x^2-6x+8$ и $a=1-|x-3|$.

На координатной плоскости $(x;a)$ первое уравнение задает параболу, второе – модуль.

Построим графики этих функций:



Из графика видно, что уравнение будет иметь три различных корня только при двух значениях $a=\pm1$.

Пример 20:

При всех значения параметра а определите количество корней уравнения $\sqrt{1-x^2}=a-x$.

Решение:

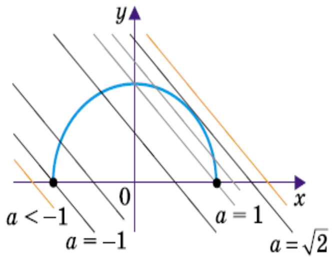
Данное уравнение было уже решено аналитически (смотри Пример 14), но несколько в другом контексте.

Посмотрим как выглядит графическое решение.

Сначала воспользуемся следующей интерпретацией. Если $f(x)$ и $g(x)$ – две функции, то корень уравнения $f(x)=g(x)$ – это абсцисса точки пересечения графиков этих функций.

Тогда введем две функции $y=\sqrt{1-x^2}$ и $y=a-x$ и проанализируем их взаимное расположение.

Заметим, что первая функция задает верхнюю часть единичной окружности с центром в начале координат; вторая – множество прямых, параллельных прямой $y=-x$, сдвигаемая вправо, если $a>0$ и влево – если $a<0$.



Перемещая прямую слева направо, видим, что до $a=-1$ (исключительно) и после $a=\sqrt{2}$ (исключительно) она не имеет точек пересечения с полуокружностью; затем при $-1\le a<1$ и $a=\sqrt{2}$ (включительно) появляется одна точка пересечения; начиная с $a=1$ (включительно) и до $a=\sqrt{2}$ (исключительно) точек пересечения две.

Замечание:

Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром», что они начинают игнорировать другие способы решения. Однако для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается одним способом и с колоссальными трудностями остальными способами. Поэтому не стоит ограничивать себя изучением только одного метода решения задач. Всегда выгоднее иметь «в арсенале» не один, а несколько способов решения задач. Кроме того, при решении задач можно комбинировать изученные методы.

Метод 3. Метод решения относительно параметра

При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными, и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение становится более простым. После упрощений нужно вернуться к исходному смыслу переменных x и a и закончить решение.

Пример 21:

Найти все значения параметра a, при которых уравнения $x^2+x+4a=0$ и $a^2x^2+ax+4a=0$ имеют общий действительный корень.

Решение:

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными переменными x и a:

$$\begin{cases} x^2+x+4a=0, \\ a^2x^2+ax+4a=0. \end{cases}$$

Решением этой системы будут пары вида $(x;a)$.

Выразим из первого уравнения $4a = -x^2 - x$ и подставим во второе:
$a^2x^2 + ax - x^2 - x = 0$,
$x^2(a^2-1) + x(a-1) = 0$,
$x(a-1)(x(a+1)+1) = 0$.

Тогда исходная система будет равносильна совокупности трех систем:

1) $\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0. \end{cases}$

Отсюда получим решение $(0; 0)$.

2) $\begin{cases} a = 1, \\ x^2 + x + 4a = 0. \end{cases}$

Эта система не имеет решений, так как уравнение $x^2 + x + 4 = 0$ не имеет корней.

3) $\begin{cases} x(a+1)+1 = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0. \end{cases}$

Если $a \neq -1$, то $x = -\dfrac{1}{a+1}$, тогда $\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{a+1}\right) + 4a = 0$ или $a(4a^2 + 8a + 3) = 0$. Полученное уравнение имеет корни: $a = -\dfrac{3}{2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$ и $a = 0$.

Вычислим значения переменой x при найденных значениях параметра a, получим: если $a = -\dfrac{3}{2}$, то $x = 2$; если $a = -\dfrac{1}{2}$, то $x = -2$; если $a = 0$, то $x = -1$.

Ответ: уравнения имеют общий действительный корень при $a = -\dfrac{3}{2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$ и $a = 0$.

Пример 22:

Найти все такие значения величины x, при которых неравенство $(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$ *выполняется для всех a, удовлетворяющих условию* $1 < a < 3$.

Решение:

Относительно переменной x данное неравенство является квадратным и решить его можно методом интервалов, найдя его корни. Но если попытаться их отыскать, то получим:

$$x_{1,2}=\frac{-13a+27\pm\sqrt{65a^2-230a+201}}{8-4a}.$$

Выражение под знаком корня положительно при любых значениях параметра *a*, а значит квадратное уравнение всегда имеет два различных корня. Но дальнейшее решение становится слишком затруднительным.

Попробуем перегруппировать данное неравенство следующим образом:

$$-2ax^2+13ax-13a+4x^2-27x+33>0,$$
$$\left(-2x^2+13x-13\right)a+4x^2-27x+33>0.$$

Неравенство приняло относительно переменной *a* линейный вид $f(a)=k(x)\cdot a+b(x)>0$ с коэффициентами $k(x)=-2x^2+13x-13$ и $b(x)=4x^2-27x+33$.

Поскольку функция $f(a)=k(x)\cdot a+b(x)$ линейная, то условие ее положительности на интервале $1<a<3$ равносильно тому, что

$$\begin{cases} f(1)\ge 0, \\ f(3)\ge 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство в отдельности:

1) если $f(1)\ge 0$, то $\left(-2x^2+13x-13\right)\cdot 1+4x^2-27x+33\ge 0$

$-2x^2+13x-13+4x^2-27x+33\ge 0$,

$x^2-7x+10\ge 0$.

Решая неравенство, получим $x\in(-\infty;2]\cup[5;+\infty)$

1) если $f(3)\ge 0$, то $\left(-2x^2+13x-13\right)\cdot 3+4x^2-27x+33\ge 0$

$-6x^2+39x-39+4x^2-27x+33\ge 0$,

$x^2-6x+3\le 0$.

Решая неравенство, получим $x\in\left[3-\sqrt{6};3+\sqrt{6}\right]$.

Осталось найти общее решение двух неравенств и получим ответ.

Ответ: $x\in\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5;3+\sqrt{6}\right]$.

В процессе решения нередко полезны переформулировки задач и замены переменных. Переформулировать задачу желательно до тех пор, пока есть такая возможность, намереваясь прийти к такой формулировке, в которой известен путь анализа. Замена нередко вызвана стремлением либо к упрощению технических деталей, либо к ожиданию какой-то качественно новой информации о соотношении.

Нередко помогает переход к новым переменным, вызванный видом соотношений и направленный на их упрощение или выявление в новых переменных свойств, недостаточно просматриваемых в исходных переменных [4].

Пример 23:

Найти все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее семи решений система уравнений

$$\begin{cases}\left(3a^2-13a\right)x+8y=3a^2-16a-8,\\ 5x+4y=2.\end{cases}$$

Решение:

Заметим, что если в данной системе считать переменными x и y, то данную систему можно рассматривать как линейную. При этом система линейных уравнений может не иметь решений, иметь единственное решение либо иметь бесконечно много решений – когда прямые, описываемые каждым уравнением системы, совпадают. Отсюда следует, что если система должна иметь не менее семи решений, то она имеет бесконечно много решений. Значит решением системы будет условие совпадения двух прямых, а именно:

$$\frac{3a^2-13a}{5}=\frac{8}{4}=\frac{3a^2-16a-8}{2}.$$

Тогда получаем два уравнения $3a^2-13a=10$ и $3a^2-16a-8=4$, которые необходимо решить:

1) $3a^2-13a=10$ имеет корни $a=5$ и $a=-\frac{2}{3}$;

2) $3a^2-16a-12=0$ имеет корни $a=6$ и $a=-\frac{2}{3}$.

Но тогда получаем, что только $a=-\frac{2}{3}$ является общим корнем для двух уравнений.

Ответ: если $a=-\frac{2}{3}$, то система уравнений имеет не менее семи решений.

Пример 24:

Найти все значения параметра a такие, что для любого x выполняется неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$.

Решение:

Неравенство содержит два модуля. Линии на плоскости $(x;a)$, на которых обращаются в нуль подмодульные выражения, разбивают плоскость на несколько частей, внутри каждой из которых неравенство равносильно линейному неравенству без модуля. Это наблюдение технически можно организовать как изображение множества, удовлетворяющего следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} x \ge -1 \\ a \ge -x \\ 5x+2a>2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \ge -1 \\ a < -x \\ x-2a>2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < -1 \\ a \ge -x \\ 3x+2a>4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < -1 \\ a < -x \\ x+2a<-4 \end{cases}$$

Ясно, что дальнейшее решение окажется трудоемким и громоздким. Поэтому подумаем над переформулировкой задачи в надежде на технически более простой путь.

Выполнение неравенства вида $f(x)>C$ при любом *x* из множества *X* равносильно тому, что этому неравенству удовлетворяет наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве *X* (в случае существования такого значения).

Для нашей задачи можно рассмотреть, например, семейство функций $f(x)=|x+1|+2|x+a|+2x$ и поставить вопрос: при каких *a* наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве всех действительных чисел больше трех?

Можно наименьшие значения искать, анализируя семейство функций $f(x)$, но можно обойтись и без такого анализа, учитывая устройство каждой из функций семейства, а именно ее кусочную линейность. Последнее означает, что функция устроена так: множество всех чисел разбито на промежутки, на каждом из которых функция совпадает с линейной функцией. Концы этих промежутков расположены в нулях подмодульных выражений. Ясно, что такими точками являются $x=-1$ и $x=-a$, стало быть, на каждом из промежутков с концами -1, $-a$, включая бесконечные, функция линейна. Заметим, что для больших положительных значений *x*, а именно для превосходящих -1 и $-a$, подмодульные выражения положительны, функция имеет вид $5x+2a+1$ и возрастает; для больших отрицательных чисел функция принимает вид $-x-2a-1$ и убывает. Следовательно, у нее есть наименьшее значение.

Точка, в которой достигается наименьшее значение, может встретиться там, где один участок линейности сменяется другим. Это происходит, как отмечено выше, при $x=-1$ и $x=-a$, причем независимо от взаимного расположения чисел -1, $-a$. Значит, наименьшее значение достигается либо при $x=-1$, либо при $x=-a$. Выясним это:

1) если $x=-1$, то $f(-1)=2|a-1|-2$. Учитывая условие $f(x)>3$, получим $2|a-1|>5$ или $a\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

2) если $x=-a$, то $f(x)=|1-a|-2a$. При условии $f(x)>3$, получаем $|1-a|-2a>3$ или $a\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$

Одновременно неравенства выполняются при $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.

<u>Пример 25:</u>

Найти все значения параметра а, для каждого из которых уравнение $8x^6 + \left(a - |x|\right)^3 + 2x^2 - |x| + a = 0$ *имеет более трех различных решений.*

Решение:

Судя по виду уравнения, надо проявлять наблюдательность и искать какие-то закономерности либо применять специальные средства, если таковые есть в нашем арсенале.

Начнем с наблюдений. Можно ли преобразовать уравнение так, чтобы прийти к какому-то известному и перспективному в плане пути решения виду (например, к квадратному относительно какого-то выражения) или получить вид «произведение равно нулю»? Обычно преобразование или замена связаны с выделением единообразных выражений, и в нашем уравнении можно заметить выражения $2x^2$ и $8x^6 = \left(2x^2\right)^3$, а также $a - |x|$ и $\left(a - |x|\right)^3$. Есть намек на формулы суммы или разности кубов. Воспользовавшись формулой суммы кубов, имеем:

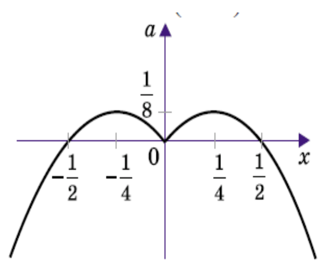
$$\left(2x^2\right)^3 + \left(a - |x|\right)^3 + 2x^2 - |x| + a = 0,$$

$$\left(2x^2 + a - |x|\right)\left(\left(2x^2\right)^2 - 2x^2\left(a - |x|\right) + \left(a - |x|\right)^2\right) + \left(2x^2 + a - |x|\right) = 0,$$

$$\left(2x^2 + a - |x|\right)\left(\left(2x^2\right)^2 - 2x^2\left(a - |x|\right) + \left(a - |x|\right)^2 + 1\right) = 0.$$

Второй множитель в последнем произведении имеет вид $u^2 - uv + v^2 + 1$ и всегда положителен, поэтому все последнее выражение можно заменить первым множителем, то есть уравнением $2x^2 + a - |x| = 0$.

Вопрос, при каких значениях параметра a у него более трех корней, можно решить, например, на основе геометрической интерпретации. Построим график функции $a = |x| - 2x^2$.



Из графика видно, что более трех пересечений горизонтальных линий с графиком будет при $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$.

2.5. Нестандартные подходы к решению задач с параметром

Наиболее понятными методами для школьников являются аналитический и графический. Реже ученики применяют метод, где уравнение или неравенство приходится решать относительно параметра. Но встречаются и задачи, в которых найти решение, используя уже рассмотренные выше методы, невозможно или требует громоздких и сложных вычислений. К задачам такого типа можно отнести, например, Пример 24, в котором от аналитического способа отказались, так как он вел к громоздким вычислениям и требовал большой концентрации внимания.

Поэтому приходится искать другие способы решить поставленную задачу, не имея в распоряжении всего множества решений данного уравнения или неравенства [2, 9, 13].

Такими способами (приемами) могут стать:

- поиск свойств входящих в уравнение или неравенство функций, которые позволят судить о существовании некоторого множества решений (например, четность или нечетность, монотонность, экстремальные свойства функции, область значений);
- поиск «выгодной точки» (например, если в задаче требуется определить значения параметра, при которых уравнение или неравенство выполняется при всех значениях переменной из определенного множества, то, подставив какое-либо конкретное значение из этого множества, получим те значения параметра, среди которых обязательно содержатся искомые);
- оценка (например, поиск наименьших или наибольших значений функции, использование свойств дифференцируемости функции).

Покажем применение перечисленных приемов на конкретных примерах.

Пример 26:

Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

имеет единственное решение.

Решение:

Преобразуем неравенство к общему знаменателю:

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a,$$

$$\cos x + a - 2\sqrt{x^2+9} + \frac{x^2+9}{a+\cos x} \le 0,$$

$$\frac{(a+\cos x)^2 - 2\sqrt{x^2+9}(a+\cos x) + (x^2+9)}{a+\cos x} \le 0,$$

$$\frac{\left(a+\cos x - \sqrt{x^2+9}\right)^2}{a+\cos x} \le 0.$$

Введем функцию: $f(x) = \dfrac{\left(a+\cos x - \sqrt{x^2+9}\right)^2}{a+\cos x}$.

Заметим, что функция $f(x)$ является четной (условие четности функции $f(x) = f(-x)$ выполняется, так как функции $\cos x$ и x^2, входящие в состав введенной функции, сами по себе являются четными функциями). Тогда для того чтобы исходное неравенство $f(x) \le 0$ имело единственное решение, необходимо, чтобы $x=0$ было решением неравенства (если x_0 – решение неравенства, то и $-x_0$ является решением в силу четности функции $f(x)$).

Таким образом, подставив в выражение $\dfrac{\left(a+\cos x - \sqrt{x^2+9}\right)^2}{a+\cos x} \le 0$ значение $x=0$, получим:

$\dfrac{\left(a+\cos 0 - \sqrt{0^2+9}\right)^2}{a+\cos 0} \le 0$ или $\dfrac{(a+1-3)^2}{a+1} \le 0$, а значит $\dfrac{(a-2)^2}{a+1} \le 0$, откуда, учитывая что $(a-2)^2 \ge 0$, получим следующие значения для параметра: $a < -1$ и $a = 2$. Исследуем их:

1) если $a < -1$, тогда $a + \cos x < 0$ и $\left(a+\cos x - \sqrt{x^2+9}\right)^2 \ge 0$, а значит $f(x) \le 0$ для всех $x \in \Re$,

2) если $a = 2$, тогда $a + \cos x > 0$ и $\left(a+\cos x - \sqrt{x^2+9}\right)^2 \ge 0$, а значит $f(x) \ge 0$, следовательно для нашей задачи подходит только условие $f(x) = 0$, то есть $\left(a+\cos x - \sqrt{x^2+9}\right)^2 = 0$ или $a+\cos x - \sqrt{x^2+9} = 0$. Решив полученное уравнение, найдем $x=0$, которое является единственным корнем.

Ответ: при $a=2$ неравенство будет иметь единственное решение.

<u>Пример 27:</u>

Найти все значения параметра a, для которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$ *имеет решения.*

Решение:

Данный пример можно решить двумя способами.

<u>Способ 1.</u>

Введем обозначение $\sin x=t$, тогда исходное уравнение примет вид: $\sqrt{a+\sqrt{a+t}}=t$, при этом $|t|\le 1$. С учетом последнего условия исходное уравнение будет равносильно системе:

$$\begin{cases} a+t=\left(t^2-a\right)^2 \\ 0\le t\le 1 \\ t^2\ge a \end{cases}$$

Преобразуем уравнение системы: $a+t=\left(t^2-a\right)^2$,

$a+t=t^4-2t^2a+a^2$,

$a^2-a\left(2t^2+1\right)+t^4-t=0$, решив его как квадратное уравнение, получим корни: $a=t^2+t+1$ или $a=t^2-t$.

Так как $t^2\ge a$ и $0\le t\le 1$, то $t^2-a+t+1>0$, поэтому последняя система равносильна такой:

$$\begin{cases} a=t^2-t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Очевидно, что при условии $0\le t\le 1$ областью значений функции $a=t^2-t$ является промежуток $\left[-\dfrac{1}{4};0\right]$.

Ответ: $-0{,}25\le a\le 0$

<u>Способ 2.</u>

Введем обозначение $\sin x=t$, тогда исходное уравнение примет вид: $\sqrt{a+t}=t^2-a$, при этом $|t|\le 1$. С учетом последнего условия исходное уравнение будет равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt{a+t}=t^2-a \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y=t^2-t$ при $0\le t\le 1$. Отметим, что эта функция на рассматриваемом промежутке обратима. Обратной для нее будет функция $y=\sqrt{a+t}$. Таким образом, в левой и правой частях уравнения системы стоят взаимно обратные на промежутке $[0;1]$ функции. Так как они возрастают на указанном промежутке, то общие точки их графиков (если они существуют) лежат на прямой $y=t$. Этот вывод позволяет записать равносильную систему:

$$\begin{cases} t^2-a=t \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=t^2-t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Но полученная система уже решалась и был получен результат.

Ответ: $-\frac{1}{4}\le a\le 0$

<u>Пример 28:</u>

Для каких значений параметра а в множестве решений неравенства $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$ содержится промежуток $[0{,}25;1]$?

Решение:

Из условия следует, что исходное неравенство должно выполняться при всех x из заданного промежутка.

С первого взгляда представляется естественным испытать значения на концах интервала:

1) если $x=1$, то $1+\sqrt{1-2a}>1$ откуда получаем $a<\frac{1}{2}$.

2) если $x=\frac{1}{4}$, то $\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{a}{2}}>1$ откуда получаем $a<-1$.

Объединив полученные результаты, имеем $a<-1$. Но найденное ограничение на параметр не дает исчерпывающего ответа.

Проведем еще одну подстановку, например, для $x=0{,}5$. Получаем неравенство $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}>1$, из которого следует, что $a<0$.

Конечно, подставляя точки из промежутка $\left[\frac{1}{4};1\right]$ в исходное неравенство, мы не получим конечное множество значений параметра. Однако, проведенные подстановки, позволяют выдвинуть гипотезу, что промежуток $(-\infty;-1)$ – наименьший среди всех, который можно получить в результате подстановок пробными точками.

Итак, используя условие $a<-1$, оценим левую часть исходного неравенства. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=x+\sqrt{x^2-2ax}$ и вычислим ее значение при $x=\frac{1}{4}$: $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{1-8a}}{4}$. Очевидно $f\left(\frac{1}{4}\right)>1$ при $a<-1$.

Найдем производную функции $f(x)$: $f'(x)=1+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-2ax}}$.

Теперь заметим, что при $x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$ и $a<-1$ значения производной $f'(x)>0$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на отрезке $\left[\frac{1}{4};1\right]$. Отсюда $f(x)\geq f\left(\frac{1}{4}\right)>1$ для всех *x* из $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

Ответ: при $a<-1$ в множестве решений неравенства содержится промежуток $[0{,}25;1]$.

<u>Пример 29:</u>

При каком значении параметра а уравнение $x^{10}-a|x|+a^2-a=0$ *имеет единственное решение?*

Решение:

Заметим, что $(-x)^{10}-a|-x|+a^2-a=x^{10}-a|x|+a^2-a$, тогда если число x_0 является корнем данного уравнения, то и число $-x_0$ также корень. Единственное решение будет, если $x_0=-x_0=0$.

Подставив $x_0=0$ в уравнение, найдем допустимые значения параметра *а*. из уравнения $a^2-a=0$ следует, что $a=0$ или $a=1$.

Проверим, какие из условий $a=0$ и $a=1$ являются достаточными для данной задачи. Для этого подставим их в исходное уравнение:

1) если $a=0$, то $x^{10}=0$ или $x=0$.

2) если $a=1$, то $x^{10}-|x|=0$. Данное уравнение имеет три корня $x_1=0$, $x_2=-1$ и $x_3=1$. Данный вариант не подходит, так как по условию требуется единственное решение.

Ответ: при $a=0$ уравнение будет иметь единственное решение.

<u>Пример 30:</u>

Найти значения параметра а, при которых уравнение

$$(|x|-4)^2+a||x|-4|+4=0$$

имеет ровно 7 действительных корней, и найти эти корни.

Решение:

Введем функцию $f(x)=(|x|-4)^2+a||x|-4|+4$ и заметим, что $f(-x)=f(x)$, то есть она является четной, а значит симметричной по переменной x. Следовательно, нечетное число корней будет, если один из них равен нулю. Подставляя $x=0$ в исходное уравнение, получим $4a+20=0$ или $a=-5$.

Проверим, что условие $a=-5$ является достаточным для данной задачи. Подставляя это значение в уравнение, получим:

$$(|x|-4)^2-5||x|-4|+4=0.$$

Для решения полученного уравнения введем переменную $y=|x|-4$, тогда уравнение примет вид: $y^2-5|y|+4=0$. Для его решения необходимо рассмотреть два случая:

1) если $y\geq 0$, то получаем уравнение $y^2-5y+4=0$, которое имеет корни $y_1=1$ и $y_2=4$, удовлетворяющие условию $y\geq 0$.

2) если $y<0$, то получаем уравнение $y^2+5y+4=0$, которое имеет корни $y_1=-1$ и $y_2=-4$, удовлетворяющие условию $y<0$.

Следовательно, получаем четыре уравнения, которые необходимо решить:

1) корнями уравнения $|x|-4=1$ являются числа $x_{1,2}=\pm 5$,

2) корнями уравнения $|x|-4=4$ являются числа $x_{3,4}=\pm 8$,

3) корнями уравнения $|x|-4=-1$ являются числа $x_{5,6}=\pm 3$,

4) корнем уравнения $|x|-4=-4$ является число $x_7=0$.

Ответ: при $a=-5$ уравнение имеет ровно семь корней: $x_{1,2}=\pm 5$, $x_{3,4}=\pm 8$, $x_{5,6}=\pm 3$ и $x_7=0$.

2.6. Еще немного о задачах

С одной стороны, были рассмотрены часто используемые методы решения задач с параметрами, такие как аналитический, графический, основанные на решении относительно параметра. С другой стороны, затронули и нестандартные методы, к которым отнесли следующие: поиск «выгодной точки», метод оценки, использование свойств функций, входящих в уравнение или неравенство. И даже затронули комбинацию перечисленных методов.

Но никто не говорит о том, что выбранный метод может быть единственным. Существует ряд задач, которые можно решить сразу несколькими способами. Об этом уже упоминалось при решении некоторых примеров (смотри Пример 13 и Пример 14). Рассмотрим еще несколько таких задач.

<u>Пример 31:</u>

При каких значениях параметра а уравнение $|x-1| = a$ *будет иметь не более одного корня.*

Решение:

Отметим, что эта задача уже решалась графическим методом (смотри Пример 16). Покажем, что эта задача может быть решена и аналитически.

Раскроем модуль по определению:

1) если $x-1 \ge 0$, то есть $x \ge 1$, то $|x-1| = x-1$ и уравнение принимает вид: $x-1 = a$, откуда получим $x = a+1$ при $a \ge 0$;

2) если $x-1 < 0$, то есть $x < 1$, то $|x-1| = 1-x$ и уравнение принимает вид: $1-x = a$, откуда получим $x = 1-a$ при $a > 0$.

Проверим при каких значения параметра а могут совпадать полученные корни $x = a+1$ и $x = 1-a$, решив уравнение: $a+1 = 1-a$. Получаем, что $a = 0$.

Проанализировав полученные результаты, делаем следующий вывод: если $a > 0$, то уравнение имеет два корня; если $a = 0$, то корни совпадают, то есть уравнение имеет один корень; если $a < 0$, то уравнение не имеет корней. Следовательно, получаем ответ.

Ответ: уравнение $|x-1| = a$ имеет не более одного корня при $a \le 0$.

<u>Пример 32:</u>

Для всех действительных значений параметра а найдите число различных корней уравнения $(a-x^2)(a+x-2) = 0$.

Решение:

Эта задача так же уже была решена графическим методом (смотри Пример 17). Покажем, что и эта задача может быть решена аналитически.

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $a-x^2 = 0$ и $a+x-2 = 0$. Решим каждое в отдельности:

1) $a-x^2 = 0$ или $x^2 = a$.

Это квадратное уравнение и возможны три случая:

- если $a > 0$, то уравнение имеет два корня $x = \pm\sqrt{a}$;
- если $a = 0$, то уравнение имеет один корень $x = 0$;
- если $a < 0$, то уравнение не будет иметь корней.

2) $a+x-2 = 0$.

Данное уравнение является линейным, которое будет иметь единственный корень $x = 2-a$ при любом значении параметра *a*.

Осталось выяснить, при каких значениях параметра *a*, корни уравнений $x = \pm\sqrt{a}$ и $x = 2 - a$ будут совпадать:

1) $x = \sqrt{a}$ и $x = 2 - a$.

Отметим, что существование корня $x = \sqrt{a}$ следует рассматривать при $a > 0$. Получаем: $\sqrt{a} = 2 - a$.

При наложении условия $2 - a \geq 0$ или $a \leq 2$, обе части уравнения возводим в квадрат и получаем уравнение $a = (2 - a)^2$ или $a^2 - 5a + 4 = 0$, которое имеет корни $a = 1$ и $a = 4$.

Таким образом, делаем предварительный вывод: при $0 < a < 1$ и $1 < a \leq 2$ корни $x = \sqrt{a}$ и $x = 2 - a$ не совпадают; при $a = 1$ корни $x = \sqrt{a}$ и $x = 2 - a$ будут совпадать.

2) $x = -\sqrt{a}$ и $x = 2 - a$.

Отметим, что существование корня $x = -\sqrt{a}$ так же следует рассматривать при $a > 0$. Получаем: $-\sqrt{a} = 2 - a$ или $\sqrt{a} = a - 2$.

При наложении условия $a - 2 \geq 0$ или $a \geq 2$, обе части уравнения возводим в квадрат и получаем уравнение $a = (a - 2)^2$ или $a^2 - 5a + 4 = 0$, которое так же имеет корни $a = 1$ и $a = 4$.

Снова делаем предварительный вывод: при $2 < a < 4$ и $a > 4$ корни $x = -\sqrt{a}$ и $x = 2 - a$ не совпадают; при $a = 4$ корни $x = -\sqrt{a}$ и $x = 2 - a$ совпадают.

Заметим также, что если $a = 0$, то совпадают только корни квадратного уравнения, но ни один из них не совпадает с корнем линейного уравнения $x = 2 - a$; если $a < 0$, то при отсутствии корней квадратного уравнения остается существование корня линейного уравнения.

Собрав воедино все полученные выводы, можно составить ответ.

Ответ:

1) если $a < 0$, то уравнение имеет единственный корень.

2) если $a = 0$, $a = 1$ и $a = 4$, то уравнение имеет два различных корня.

3) если $0 < a < 1$, $1 < a < 4$ и $a > 4$, то уравнение имеет три различных корня.

<u>Пример 33:</u>

При каких значениях параметра а уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ имеет единственное решение.

Решение:

<u>Способ 1</u>

Уравнение $x^2+ax+1=0$ является квадратным и оно имеет единственное решение, если его дискриминант $D=a^2-4$ будет равен нулю. Вычислим, при каких значения параметра a это возможно, решив для этого уравнение: $a^2-4=0$.

Данное уравнение имеет корни $a=\pm 2$.

Ответ: $a=\pm 2$.

<u>Способ 2</u>

Введем функцию $y=x^2+ax+1$. Эта функция является квадратичной и задает на плоскости параболу. Если уравнение имеет корни, значит ее график пересекает ось абсцисс. Парабола будет иметь единственную точку пересечения с осью абсцисс, если ее вершина лежит на ней, то есть $y(x_0)=0$. Получаем: $x_0=-\dfrac{a}{2}$,

$$y(x_0)=\left(-\frac{a}{2}\right)^2+a\left(-\frac{a}{2}\right)+1=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+1=-\frac{a^2}{4}+1,$$

$$-\frac{a^2}{4}+1=0,$$

$\dfrac{a^2}{4}=1$ или $a^2=4$, которое имеет корни $a=\pm 2$.

Ответ: $a=\pm 2$.

<u>Пример 34:</u>

Для $0<a<\dfrac{1}{4}$ *решить уравнение* $x^2+2ax+\dfrac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}$.

Решение:

<u>Способ 1</u>

Перепишем данное уравнение в виде:

$$(x+a)^2+\frac{1}{16}-a^2=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}.$$

Пусть $\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}=t$, $t\ge 0$. Отсюда $x-t^2=\dfrac{1}{16}-a^2$. Тогда исходное уравнение становится таким:

$$(x+a)^2+x-t^2=-a+t,$$

$$(x+a)^2+(x+a)=t^2+t.$$

Введем функцию $f(y)=y^2+y$. Эта функция монотонной не является, однако она является возрастающей на интервале $[-0{,}5;+\infty)$ (в этом можно убедиться, найдя ее производную и решив неравенство $f'(y)>0$).

Поскольку $x\geq\frac{1}{16}-a^2$ и $0<a<\frac{1}{4}$, то $x+a>0$. Таким образом, аргументы $x+a$ и t принадлежат промежутку монотонности функции $f(y)$. Следовательно, имея $f(x+a)=f(t)$, получаем $x+a=t$, то есть $\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}=x+a$. Отсюда $x=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$. Сопоставив это уравнение с исходным, запишем $x^2+2ax+\frac{1}{16}=x$.

Для $0<a<\frac{1}{4}$ полученное квадратное уравнение имеет положительный дискриминант. Его корни: $x_{1,2}=\dfrac{1-2a\pm\sqrt{4a^2-4+\frac{3}{4}}}{2}$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{1}{4}\left(2-4a\pm\sqrt{16a^2-16+3}\right)$

<u>Способ 2</u>

Уравнение имеет смысл, если $a^2+x-\frac{1}{16}\geq 0$ или $x\geq\frac{1}{16}-a^2$.

Так как $0<a<\frac{1}{4}$, то $x>0$.

Рассмотрим функцию $y=x^2+2ax+\frac{1}{16}$. Она возрастает на $[-a;+\infty)$. Следовательно, при $x\geq\frac{1}{16}-a^2$ эта функция обратима, причем функция $y=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$ является для нее обратимой. Как и в способе 1, учитывая, что рассматриваемые функции возрастают на области определения исходного уравнения, можно записать $-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}=x$. Далее, действуя как в способе 1, получим окончательный ответ.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{1}{4}\left(2-4a\pm\sqrt{16a^2-16+3}\right)$

2.7. Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнения или неравенства

1) $(a-1)x=3$,	11) $ax+4>2x+a^2$,
2) $(a-1)(a+2)x=a^3+2a^2$,	12) $(x-a)(x-2a)<0$,
3) $a^2(x-5)=25(x-a)$,	13) $(x-a)^2(x-2a)\le 0$,
4) $x^2-(a-2)x-(a-2)=0$,	14) $(a^2-3a-4)x^2>a-4$,
5) $(a+20)x^2+(a+5)x+1=0$,	15) $(a^2-1)x^2-2ax+1<0$,
6) $x\lvert x+1\rvert+a=0$,	16) $\lvert x+a\rvert>a$,
7) $\dfrac{x-a}{a-3}=\dfrac{a+1}{a+2}$,	17) $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{a}{x+a}<0$,
8) $\dfrac{x+2}{a+1}=\dfrac{2x-a-1}{x-2}$,	18) $\dfrac{2}{x+a}-\dfrac{x}{x^2-a^2}<\dfrac{1}{a-x}$,
9) $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$,	19) $\sqrt{3ax+4a^2}<x+2a$,
10) $\sqrt{1-x^2}=\lvert ax\rvert$,	20) $\dfrac{\sqrt{x-a}}{\lvert x-2\rvert}\ge 0$.

2. Задачи на определение количества корней

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение или неравенство имеет заданное количество корней:

1) уравнение $\lvert 1-ax\rvert=1+(1-2a)x+ax^2$ имеет ровно одно решение,

2) уравнение $4x-\lvert 3x-\lvert x+a\rvert\rvert=9\lvert x-1\rvert$ имеет хотя бы один корень,

3) уравнение $9(3x-1)a^2-(21x-19)a+2(x-1)=0$ не имеет корней,

4) уравнение $3x(x-1)^2=ax$ не более трех корней,

5) уравнение $\sqrt{9-x^2}=x-2a$ имеет единственное решение,

6) неравенство $\sqrt{4a^2-x^2}\ge\lvert x-2a\rvert$ имеет единственное решение,

7) неравенство $\sqrt{x-2a}+\sqrt{a-x}\ge 1$ имеет единственное решение,

8) неравенство $\lvert x+a\rvert<4-x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение;

9) неравенство $ax^2+x+3a^3>0$ не имеет решений,

10) неравенство $\dfrac{2-ax-x^2}{1-x+x^2}\le 3$ имеет корень при любых значениях *x*.

3. Другие виды задач

Найти все значения параметра a, при которых уравнение или неравенство удовлетворяет определенным условиям:

1) уравнение $\frac{3}{5+a-3x}=\frac{2}{3-x+ax}$ имеет единственное положительное решение?

2) уравнение $(a-2)x^2+2(a-3)x+a-5=0$ будет иметь два отрицательных корня?

3) один корень уравнения $4x^2-(3a+2)x+a^2-1=0$ будет в три раза больше второго?

4) оба корня уравнения $(a-1)x^2+(2a-3)x+a-3=0$ меньше единицы?

5) существует только одна общая точка для графиков функций $y=x^2-2x-3$ и $y=ax^2$?

6) уравнения $\frac{3x}{x+2a}=2a$ и $\frac{6a}{x+2a}=x$ имеют хотя бы один общий корень?

7) уравнение $2|x-a|+a-4+x=0$ имеет решение и все решения удовлетворяют неравенству $0\le x\le 4$?

8) решением неравенства $\sqrt{2x+6}\ge a\sqrt{x-2}$ является луч?

9) решением неравенства $(x+a+1)\sqrt{x-4a+3}\le 0$ является отрезок?

10) неравенство $\frac{a+4-x}{x+3a}\ge 0$ выполняется для всех x из промежутка $3\le x\le 5$?

Ответы:

1. Решите уравнения или неравенства

1) если $a=1$, то уравнение не имеет корней, если $a\ne 1$, то $x=\frac{3}{a-1}$;

2) если $a\ne 1$ и $a\ne -2$, то $x=\frac{a^2}{a-1}$, если $a=1$, то нет решений, если $a=-2$, то решением является любое действительное число

3) если $a\ne \pm 5$, то $x=\frac{5a}{a+5}$, если $a=-5$, то нет решений, если $a=5$, то решением является любое действительное число;

4) если $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$, то $x_{1,2}=\frac{a-2\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$, если $a\in(-2;2)$, то нет решений, если $a=-2$, то $x=-2$, если $a=2$, то $x=2$;

5) если $a \in (-\infty; -20) \cup (-20; -11) \cup (5; +\infty)$, то $x_{1,2} = \dfrac{-a-5 \pm \sqrt{a^2+6a-55}}{2(a+20)}$, если $a \in (-11; 5)$, то нет решений, если $a = 5$, то $x = -\dfrac{1}{5}$, если $a = -11$, то $x = \dfrac{1}{3}$, если $a = -20$, то $x = \dfrac{1}{15}$;

6) если $a < 0$, то $x = \dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$, если $a = 0$, то $x = 0$ и $x = -1$;

7) если $a \neq -2$ и $a \neq 3$, то $x = \dfrac{2a^2-3}{a+2}$, если $a = -2$ и $a = 3$, то решений нет;

8) если $a \neq -1$ и $a \neq 3$, то $x = \dfrac{a+3}{a-1}$, если $a = -1$, то решений нет, если $a = 3$, то $x = 6$;

9) если $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)$, то $x = \dfrac{2a+1}{a-2}$, если $a \in \left(\dfrac{1}{3}; 2\right]$, то нет решений;

10) если $a \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$, то $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a^2}}{2a^2}$, если $a \notin \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$, то нет решений, если $a = 0$, то $x = 1$;

11) если $a > 2$, то $x > a+2$, если $a \in = 2$, то нет решений, если $a < 2$, то $x < a+2$;

12) если $a < 0$, то $2a < x < a$, если $a = 0$, то нет решений, если $a > 0$, то $a < x < 2a$;

13) если $a < 0$, то $x = a$ или $x \leq 2a$, если $a = 0$, то $x \leq 0$, если $a > 0$, то $x \leq 2a$;

14) если $a \leq -1$, то решением является любое действительное число, если $-1 < a < 4$, то $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}; \dfrac{1}{\sqrt{a+1}}\right)$, если $a = 4$, то нет решений, если $a > 4$, то $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}; +\infty\right)$;

15) если $a < -1$ и $a > 1$, то $\dfrac{1}{a+1} < x < \dfrac{1}{a-1}$, если $a = -1$, то $x < -\dfrac{1}{2}$, если $-1 < a < 1$, то $x < \dfrac{1}{a-1}$ или $x > \dfrac{1}{a+1}$, если $a = 1$, то $x > \dfrac{1}{2}$;

16) если $a < 0$, то решением является любое действительное число, если $a \geq 0$, то $a \in (-\infty; -2a) \cup (0; +\infty)$;

17) если $a>0$, то $x<-a$ и $0<x<a$, если $a<0$, то $a<x<0$ и $x>-a$, если $a=0$, то нет решений;

18) если $a>0$, то $x<-a$ и $\frac{a}{2}<x<a$, если $a<0$, то $\frac{a}{2}<x<-a$ и $x<a$, если $a=0$, то $x<0$;

19) если $a>0$, то $x\in\left[-\frac{4}{3}a;-a\right)\cup(0;+\infty)$, если $a=0$, то $x\in(0;+\infty)$, если $a<0$, то нет решений;

20) если $a<2$, то $a\le x<2$ или $x>2$, если $a=2$, то $x>2$, если $a>2$, то $x\ge 2$.

2. Задачи на определение количества корней

1) $a=0$ и $a=1$; 2) $a\in[-8;6]$; 3) $a=\frac{2}{3}$; 4) $a\le 0$ и $a=3$; 5) $a\in(-1{,}5;1{,}5)\cup\left\{-\sqrt{4{,}5}\right\}$; 6) $a=0$; 7) $a=-\frac{1}{2}$; 8) $a\in\left(-4;\frac{17}{4}\right)$; 9) $a\le-\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$; 10) $a\in(-1;7)$.

3. Другие виды задач

1) $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-0{,}5;+\infty)$; 2) $a\in(1;2)\cup(5;+\infty)$; 3) $a=2$ или $a=-1\frac{1}{37}$; 4) $a\in(0{,}75;1)\cup(1{,}75;+\infty)$; 5) $a=1$ и $a=1\frac{1}{3}$; 6) $a=0{,}75$; 7) $a\in\left(\frac{4}{3};2\right)$; 8) $a<\sqrt{2}$; 9) $a<0{,}4$; 10) $a\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup[1;+\infty)$;

2.8. Обзор литературы по современным подходам к обучению решению задач с параметрами

В завершении приведем лишь небольшой обзор некоторой литературы по теме «Решения задач с параметрами» за последние три года. И не потому, что ее мало, а для того, чтобы еще раз акцентировать внимание на актуальности данной темы:

1. *Усова Д.А. Замена переменной в задачах с параметрами // Актуальные вопросы современной науки и образования: сборник статей Международной научно-практической конференции : в 2 ч. Пенза: Изд-во «Наука и Просвещение», 2020. С. 170–173.*

В статье представлены методические рекомендации по решению задач с параметрами методом замены переменной. На основе анализа заданий, входящих в итоговую государственную аттестацию школьников, приводятся случаи, в которых рационально применять метод замены переменной, а также выявляются основные затруднения при решении задач с параметрами этим методом.

2. *Хайрутдинова Е.М. Основные способы решения задач с параметрами в школьном курсе алгебры 9 класса // Инновационное развитие науки и образования: сборник статей IX Международной научно-практической конференции : в 2 ч. Пенза: Изд-во «Наука и Просвещение», 2020. С. 159–164.*

В статье рассмотрены основные способы решения задач с параметром, взятых из учебных программ по алгебре для 9 класса. Приводятся примеры некоторых задач с параметрами и их решение различными способами. Спроектирована учебно-исследовательская карта по теме «Графический метод решения задач с параметрами».

3. *Черемисина К.А. Графический метод при решении задач с параметром в системе заданий ЕГЭ // Инновационное развитие науки и образования: сборник статей IX Международной научно-практической конференции : в 2 ч. Пенза: Изд-во «Наука и Просвещение», 2020. С. 172–176.*

В статье актуализируется проблема решения задач с параметрами графическим методом в системе заданий единого государственного экзамена по математике. Приведено подробное решение таких задач с построением графиков в интерактивных геометрических системах.

4. *Лапин К.А. Некоторые особенности подготовки учащихся к решению задач с параметрами с использованием графических представлений // Педагогика в теории и на практике: актуальные вопросы и современные аспекты: сборник статей III Международной научно-практической конференции. Пенза: Изд-во «Наука и Просвещение», 2020. С. 190–193.*

В статье рассмотрены особенности вводных занятий по подготовке учащихся к решению задач с параметрами графическим методом с использованием информационных технологий.

5. *Далингер В.А. Математика: задачи с параметрами в 2 ч.: учебное пособие, 2-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2020. 466 с.*

В первой части дано понятие параметра, простейшие линейные и квадратные уравнения с параметрами и методы их решений. Во второй части представлены неравенства с параметрами, системы уравнений и неравенств с параметрами, текстовые сюжетные задачи с параметрами, а также различного рода задачи с параметрами. Отдельная глава посвящена организации поисково-исследовательской деятельности учащихся в процессе решения задач с параметрами.

6. *Калиев И.А., Суйундукова А.К. Некоторые методы исследования задач с параметрами // Kazakhstan Science Journal. 2019. Т. 2. № 3 (4). С. 68–76.*

Статья посвящена некоторым методам решения задач с параметрами. Приведены решения задач, иллюстрирующие функционально-графический и аналитический методы.

7. *Иванов В.В. Текстовые задачи с параметром // Перспективы развития математического образования в Твери и тверской области : Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. Тверь, 2019. С. 91–95*

В работе рассматриваются текстовые задачи, содержащие в условии параметр. Приводятся исследования решений полученных уравнений в зависимости от значений параметра, обсуждается правдоподобность полученных результатов. Показаны возможности составления текстовых задач с параметром.

8. *Шилова Г.Н., Панфилова Т.Л. Задачи с параметром: система подготовки учащихся // Современные проблемы и перспективы обучения математике, физике, информатике в школе и вузе : межвузовский сборник научно-методических трудов / Отв.ред С.Ф. Митенева. Вологда, 2019. С. 137–139*

В статье обобщается опыт подготовки школьников к решению задач с параметром.

9. *Володина Е.В., Ильина И.И. Решение задач с параметрами средствами Geogebra // Состояние и перспективы развития ИТ-образования : сборник докладов и научных статей Всероссийской научно-практической конференции. Чебоксары, 2019. С 382–387*

В статье изучаются возможности использования программы Geogebra для графического решения уравнений, систем уравнений и неравенств, содержащих параметр.

10. *Борискина И.П., Нуштаева А.В., Макарова Н.В. и др. Основы решения задач с параметрами для подготовки абитуриентов к ЕГЭ по математике // Образовательные технологии и общество. Казань, 2019. С. 120–128*

Статья посвящена исследованию методов решения задач с параметрами. Рассмотрены и проанализированы основные моменты решения уравнений с параметрами. Помимо представленных решений с подробным описанием и различными подходами, описываются также возможности овладения подобными навыками с помощью современных информационных технологий.

11. *Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А. Замена переменной в задачах с параметрами // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2018. № 7. С. 82–92.*

В статье приводятся некоторые методические рекомендации для обучения школьников графическим методам решения задач с параметрами с помощью замены переменной.

12. *Юрьева А.С. Решение задач с параметром как средство формирования исследовательских способностей учащихся 10–11 классов // Дни науки студентов Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых : сборник материалов научно-практических конференций. Владимир, 2018. С. 2153–2158*

В статье рассматривается проблема - как решение задач с параметром способствует формированию исследовательских способностей школьников. Отображена важность задач с параметрами. Показан результат анализа школьных учебников по данной теме. Выявлены проблемы реализации темы в школьном курсе.

13. *Мельникова А.А. Развитие творческого, нестандартного мышления учащихся в процессе решения задач с параметрами // Современные проблемы подготовки специалистов для предприятий атомной отрасли : материалы международной научно-практической конференции / ред. Г.М. Ильмушкин, Е.Н. Пискунова. Димитровград, 2018. С. 134–138*

В данной статье рассматриваются особенности процесса развития творческого, нестандартного мышления учащихся в процессе решения задач с параметрами, возможности использования таких задач в обучении математике в течение всего школьного курса, для развития навыков решения задач по разным темам, а также более глубокого понимания теоретического материала учащимися, использования различных способов решения, геометрической интерпретации задачи.

14. *Зеленский, А. С. О ЕГЭ-2018 вообще и о задаче с параметром в частности / А. С. Зеленский, И. И. Панфилов, Е. А. Панфилова // Математика в школе. 2018. № 7. С. 14–21.*

Анализируются особенности прошедшего ЕГЭ и, в частности, рассматриваются задачи 18 из вариантов ЕГЭ 2018 года. Приводятся различные способы их решения и рекомендации для учителей и учащихся. Дается подборка задач, которая может стать основой для серии школьных уроков по подготовке к решению задач с параметрами.

15. *Кислякова М. А. Этап актуализации в обучении решению задач с параметрами // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2017. Т. 15. С. 80–82. URL: http://e-koncept.ru/2017/573016.htm.*

В статье автор обосновывает методику обучения решения задач с параметрами с опорой на актуализационные задачи. На нескольких примерах автор показывает, как система актуализационных задач облегчает учащемуся поиск решения задачи.

Дополнительная рекомендуемая литература

1. Амелькин В.В. Задачи с параметрами / В.В. Амелькин. М.: Асар, 1996.

2. Гусев В.А. Задачи с параметрами / В.А. Гусев. М: Просвещение, 2004. 296 с.

3. Дорофеев Г.В. Решение задач, содержащих параметр / Г.В. Дорофеев. М.: Науч. -пед.об-ние «Перспектива», 1990, 38 с.

4. Ивлев Б.М. Абрамов А.М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа для 10–11 классов / Б.М. Ивлев, А.М. Абрамов. М.: Просвещение, 1990.

5. Козко А.И., Панферов В.С., Сергеев И.Н. и др. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи. 2-е изд., стер. М.: МЦНМО, 2018. 232 с.

6. Локоть В.В. Задачи с параметрами. Линейные и квадратные уравнения, неравенства, системы / В.В. Локоть. М.: «Аркти», 2005.

7. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике. Решение задач: учеб.пособие для 11 кл. сред. шк. / И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. М.: Посвещение, 1991. 384 с.

8. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами на экзаменах / А.Х. Шахмейстер. 6-е изд. СПб.: «Виктория плюс» : М.: МЦНМО : СПб.: «Петроглиф», 2020. 256 с.

9. Шахмейстер А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами / А.Х. Шахмейстер. 4-е изд. СПб.: «Виктория плюс» : М.: МЦНМО : СПб.: «Петроглиф», 2019. 304 с.

10. Юрченко Е.В., Юрченко Е.В. Уравнения с параметром и нестандартные задачи. 7–9 классы. Живая методика математики. 2-е изд., доп. М.: МЦНМО, 2017. 88 с.

2.9. Некоторые методические рекомендации по обучению решению задач с параметрами

Задачи с параметрами под номером 18, включены в единый государственный экзамен по математике (профильный уровень). Как показывает анализ, эти задачи вызывают затруднения, как у учащихся, так и у педагогов. Сложность в обучении решения этих задач состоит в том, что эти задачи трудно классифицируемые, что осложняет процесс выбора и составления алгоритмов решения.

Успешность в решении задач этого типа зависит от умений ученика выполнять действия с уравнениями, геометрическими фигурами, координатами, функциями. Для решения таких задач необходимо применять знания и умения, полученные на протяжении всего курса математики. Именно поэтому этап актуализации в методике обучения решению задач с параметрами является необходимым.

На примере нескольких задач приведем примеры из ЕГЭ и соответствующие им наборы задач, подводящие учащихся к выполнению экзаменационного задания.

Пример № 1.

Найти все значения параметра а, при которых система имеет 4 решения $\begin{cases}(x^2+y^2)^2-2\sqrt{2}(x+y)(x^2+y^2)+8xy=0\\ y-x=a\end{cases}$.

Для решения предложенной задачи, учащийся должен уметь:

– выполнять разложение многочленов на множители,

– приводить алгебраическое выражение к канонической записи уравнения окружности,

– строить окружность в системе координат,

– находить точки пересечения прямой и окружности, двух окружностей методом решения соответствующей системы уравнений,

– находить уравнение прямой, проходящей через две точки,

– находить значения параметров в простейших случаях.

Поэтому на этапе актуализации учащимся может быть предложена следующая система задач.

Задача 1. Разложить на множители: $a^2-2\sqrt{2}\left(b+c\right)a+8bc$.

Задача 2.Выделить полный квадрат $x^2-\sqrt{2}x-1$.

Задача 3. Построить следующие окружности в системе координат:

а) $(x-\sqrt{2})^2+(y-1)^2=3$, б) $(x-3)^2+(y+\sqrt{3})^2=7$.

Задача 4.Решить системы уравнений

а) $\begin{cases}x^2+y=y^2+x,\\ y^2+x=6,\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2+y^2-2x+y-2=0.\end{cases}$

Задача 5. Написать уравнение прямой, если известно, что она проходит через две точки *А (2,-1), В (*$\sqrt{3},0$*)*.

Задача 6. а) При всех *а* решить уравнение $(2a-4)x=3a+1$.

б) При каком *а* точка М (1,-2) принадлежит прямой $y=2x+a$.

Пример № 2.

Решить уравнение $2\arcsin\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)=\pi\log_{2a^2-x}\left(ax+2\right)$

Для решения задачи, учащийся должен уметь:

– находить область определения функций *y=arcsin f(x), y=*$\log_{f(x)}g(x)$,

– находить значения функции *y=arcsin f(x)*;

– решать логарифмические уравнения вида $\log_{f(x)}g(x)=a$.

На этапе актуализации может быть предложена следующая система задач и вопросов:

Задача 1. Найти область определения функций

а) $f(x)=\arcsin(x-2)$, б) $f(x)=\arccos(x^2-1)$.

Задача 2. Найти значения функции

а) $f(x)=\arcsin(x-2)$, при *x=3*; б) $f(x)=\arccos(x^2-1)$ при *x =0, 0,5*.

Задача 3. Решить уравнение $\log_{x-3}(x^2-4x)^2=4$

<u>Пример № 3.</u>

Найдите при различных значениях параметра a множество значений функции $y=\dfrac{x^2}{x^2+2ax+a}$

{Идея решения данной задачи заключается в том, что функция y(x) рассматривается как параметр, и задача сводится к нахождению значений параметра *a*, при которых уравнение $y-f(x,a)=0$ }.

Для решения задачи, учащийся должен уметь исследовать систему уравнений с параметром, *a*, следовательно, и каждое уравнение.

Задача 1. Найдите все значения *a*, при которых число x=1 не является корнем уравнения $|zx+a|(x^2+1)+3\text{-}2a=0$.

Задача 2. При всех значениях параметра *a* решить неравенство $\left(a^2-a\right)x<3-3a$.

Задача 3. При каких значениях *a* неравенство $x^2-2(a+1)+9a-5>0$

<u>Пример № 4</u>.

Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$ *выполняется для любого x.*

{Исследование представленного неравенства сводится не к решению его, а к выяснению его выполнимости при всех значениях неизвестной}.

Для этого необходимо:

– уметь раскрывать модули и представлять правую часть в виде кусочно линейной функции,

– уметь исследовать кусочно-линейную функции на монотонность,

– связать наименьшее значение функции с неравенством $f(x)>a$,

– решить систему неравенств с модулем.

Предлагаем следующие задачи.

Задача 1. При каких значениях *x*, функция $f(x)>2, f(x)=|1-x|$.

Задача 2. Решить систему неравенств $\begin{cases}|x-1|>2{,}5\\|x-1|>2x+3\end{cases}$

Задача 3. Какое наименьшее значение принимает функция $y=\left|(x-2)^2-1\right|$ на отрезке [2,4]?

<u>Пример № 5</u>.

Найти все значения а, при каждом из которых график функции $f(x)=x^2-\left|x^2+2x-3\right|-a$ *пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.*

{Идея решения заключается в том, чтобы ввести вспомогательную функцию без параметра и рассмотреть ее свойства}.

Для решения задачи учащийся должен уметь исследовать функцию, содержащую знак модуля.

Задача 1. Построить график функции

а) $y=\begin{cases} x^2+4x+4, x\geq -4, \\ 3x+16, x<-4, \end{cases}$ б) $y=|x|(x+2)-3x.$

Задача 2. При каком значении параметра а, прямая $y=a$ пересекает функцию $y=\left|4-(x-2)^2\right|-1$ в 1 точке, ровно в двух точках, более чем в двух точках.

<u>Пример № 6</u>.

При каком а, уравнение $ax+\sqrt{-15-8x-x^2}=4a+1$ *имеет единственный корень*.

{Выполнение предложение задания возможно разными способами, одним из них является решение уравнения с использований графического метода}.

Для решения этой задачи, учащийся должен уметь:

– левую и правую часть уравнения представлять, как функции;

– строить графики этих функций;

– находить область определения и множество значений функций, содержащих знак корня;

– находить значения параметра *а* при известных значениях других переменных.

Задача 1. Решить уравнение графически $\sqrt{3-x^2}=x$

Задача 2. Найти область определения и множество значений функции $y=\sqrt{x^2+4x+2}$.

Задача 3. Найти при каких значениях параметра а, прямая $ay-(4a+1)x-a-5=0$ проходит через точку М (-1,2).

Особенностью решения задач с параметрами является комбинация различных математических понятий, теорем, примеров, частных случаев. Задачи с параметрами, предлагаемые на ЕГЭ и олимпиадах различного уровня, предполагают наличие у учащихся достаточно высокой математической культуры и значительного объема математических фактов, которые в школе либо не изучаются, либо не достаточно отрабатываются. Поэтому необходима целенаправленная методическая работа по обучению решению задач с параметрами, обязательным этапом которой является этап актуализации уже имеющихся у учащихся знаний и умений.

Выводы по главе 2

В заключение подведем некоторые итоги, но сформулируем их в форме «вопрос – ответ». Можно обойтись без вопросов и сразу предлагать какие-то действия, однако вопросы способствуют постановке цели на каждом шаге решения. Вопросы позволяют выявить причину, по которой то или иное действие должно быть выполнено, при этом набор предлагаемых ниже вопросов может быть изменен или дополнен с учетом имеющихся знаний [5].

1) *Что рассматривается в задаче?*

Данный вопрос задает направление, которое направит дальнейшее решение либо к соотношениям, либо к функциям или множествам.

2) *Какая задача ставится для соотношения?*

Следующий вопрос ставит цель при изучении соотношения. Если речь идет о наиболее простом описании множеств семейства, то есть о решении соотношения, занимаемся решением соотношения, ориентируясь на собранные выше наблюдения. Результатом служит наиболее простое описание семейства множеств, задаваемых данным соотношением.

Если говорится о каких-то связанных с этими множествами обстоятельствах, полезно поставить вопрос: рассматриваются свойства множеств, описываемых соотношениями, или взаимодействие таких множеств?

Если требуется исследование свойств множеств (решений), то уместен вопрос: речь идет о количественных характеристиках или качественных свойствах? Иногда используется симметрия, иногда четность, исходя из которых выводятся необходимые условия, сужающие множество изучаемых значений параметра до обозримого и доступного для выбора искомых значений. Нередко количественные характеристики можно получить на основе одной из графических интерпретаций.

В случае, когда в постановке задачи просматривается взаимодействие двух множеств (например, множества решений одного неравенства включаются в соответствующие множества решений другого или содержатся в каком-то множестве, множества решений двух неравенств пересекаются, то есть система неравенств имеет решения и другие), в первую очередь полезен вопрос: какой путь выбрать – аналитический или геометрический? Для соотношения с одной переменной приемлемы обе возможности, с двумя переменными чаще используются геометрические соображения.

3) *Какой метод выбрать?*

Какой путь решения предпочтителен (или возможен): аналитический или геометрический, метод решения относительно параметра или нестандартный? От ответа на этот вопрос зависит характер решения.

При рассмотрении соотношения полезен вопрос: каковы особенности соотношения? Можно обратить внимание на тип соотношения (уравнение, неравенство, система и другое), количество переменных, особенности их участия в соотношении, наличие единообразных выражений, служащих поводом для замены, и другое.

Рассмотрим несколько примеров, в которых будет проиллюстрирована организация процесса решения на основе постановки вопросов, используя, кроме указанных выше, также вопросы, уместные на соответствующем шаге решения.

Пример 35:

Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$ *имеет единственный корень.*

Решение:

1) *Что рассматривается в задаче?*

Уравнение с радикалом. Данное уравнение решается путем возведения в квадрат с учетом неотрицательности того выражения, которое сопоставляется с корнем. А именно, уравнение может быть заменено системой:

$$\begin{cases} -7-8x-x^2=(2a+3-ax)^2 \\ 2a+3-ax\geq 0 \end{cases}$$

2) *Какая задача ставится для соотношения?*

Рассматривается задача, в которой ставится вопрос о количественной характеристике множества корней, а именно о единственности корня.

3) *Какой метод выбрать?*

Можно попробовать посмотреть, когда уравнение имеет один корень, а затем изучить ситуацию нескольких корней, из которых только один удовлетворяет неравенству. Однако уравнение в последней системе получилось не из простых, в нем везде присутствует параметр, а после нахождения его корней надо решать непростое неравенство относительно параметра. Это приводит к мысли о поиске альтернативных путей, связанных с геометрической интерпретацией.

В уравнении не просматривается простого выражения одной из величин a и x через другую, поэтому представим уравнение в виде сравнения двух функций, то есть в виде $f(x)=g_a(x)$, где

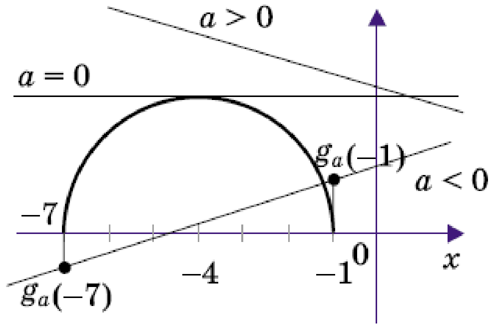
$$f(x)=\sqrt{-7-8x-x^2} \text{ и } g_a(x)=2a+3-ax.$$

Тогда вопрос задачи станет таким: при каких значениях параметра а графики этих функций имеют одну общую точку?

Заметим, что равенство $y=\sqrt{-7-8x-x^2}$ при условии $y \ge 0$ можно преобразовать к виду $(x+4)^2+y^2=9$ и тогда график функции $f(x)$ представляет собой верхнюю половину окружности с центром в точке $(-4;0)$ и радиусом 3.

Графики функций $g_a(x)=2a+3-ax$ есть прямые, принимающие в нуле значение $2a$ и имеющие угловой коэффициент a.

Сопоставим графики функций $f(x)$ и $g_a(x)$:



4) *Как провести анализ?*

Надо исследовать взаимодействие графиков при различных значениях параметра.

Из рисунка видно, что если $a>0$, то точка пересечения с осью ординат расположена выше 3 и к тому же у прямой $g_a(x)$ отрицательный угловой коэффициент, так что она не пересечет полуокружности.

Если $a=0$, то $g_a(x)$ – горизонтальная прямая, касающаяся полуокружности, то есть имеет с ней одну общую точку, и $a=0$ условиям задачи удовлетворяет.

Если $a<0$, тогда при небольших по абсолютной величине значениях a будет две точки пересечения прямой с полуокружностью, затем такая точка станет одна, и с увеличением абсолютной величины a пересечение исчезнет.

Характеристической особенностью одноточечного пересечения может служить тот факт, что $g_a(-7)<0$ и $g_a(-1)\ge 0$, то есть $a<-\frac{1}{3}$ и $a\ge -1$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{1}{3};-1\right]\cup\{0\}$

Пример 36:

Найти все значения параметра a, при каждом из которых общие решения неравенств $y+2x\ge a$ *и* $y-x\ge 2a$ *являются решениями неравенства* $2y-x\ge a+3$.

Решение:

1) *Что рассматривается в задаче?*

Взаимодействие множеств решений системы неравенств и одного неравенства с двумя переменными.

2) *Какой путь анализа выбрать?*

Поскольку здесь участвует неравенство с двумя переменными, возможен только геометрический путь.

3) *Как можно описать множество решений неравенства с двумя переменными?*

Необходимо понять, что представляют собой множества, описываемые каждым из трех неравенств задачи? Это верхние полуплоскости, ограниченные прямыми, задаваемыми соответствующими уравнениями. Пересечение верхних полуплоскостей, определяемых неравенствами системы, представляет собой уголок, заполняющий верхнюю часть плоскости, расположенную над обеими ограничивающими эти полуплоскости прямыми.

Описываемое последним неравенством множество — также верхняя полуплоскость, и вопрос задачи переформулируется так: при каких *a* полученный в результате пересечения уголок содержится в задаваемой третьим неравенством полуплоскости?

Ответ на этот вопрос можно дать, например, так. Заметим, что определяющая последнюю полуплоскость прямая наклонена к оси абсцисс под меньшим острым углом, чем прямые, задаваемые первыми двумя уравнениями. Поэтому если вершина уголка лежит в отвечающей третьему неравенству полуплоскости, то и весь уголок там содержится. Остается найти координаты точки пересечения и записать тот факт, что полученная точка удовлетворяет третьему неравенству.

Для нахождения точки пересечения приравняем значения y из равенств $y = a - 2x$ и $y = x + 2a$, получим $x = -\frac{a}{3}$, $y = \frac{5a}{3}$, и высказанное выше условие даст неравенство относительно a: $2\frac{5a}{3} + \frac{a}{3} \geq a + 3$, которое выполняется при $a \geq \frac{9}{8}$.

Ответ: $a \geq \frac{9}{8}$.

Библиографические ссылки к главе 2

1. Большой энциклопедический словарь [Электронный ресурс] Режим доступа: https://rus-big-enc-dict.slovaronline.com (дата обращения 29.02.2020 г.)

2. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. М.: Илекса; Харьков: Гимназия, 2005. 328 с.

3. Дятлов В.Н. Технологии решения задач: Лекция 2. Общие методы анализа уравнений и неравенств. Уравнения с радикалами // Математика. 2012. № 6. С. 46–52.

4. Дятлов В.Н. Технологии решения задач: Лекция 7. Задачи с параметрами. Основные понятия. Уравнения с параметрами // Математика. 2012. № 11.

5. Дятлов В.Н. Технологии решения задач: Лекция 8. Неравенства с параметрами // Математика. 2013. № 1. С. 51–57.

6. Итоги проведения государственной итоговой аттестации в Хабаровском крае. Хабаровск: КГКУ РЦОКО, 2017 [Электронный ресурс] Режим доступа: https://rcoko.khb.ru/gia-11/stat-ege/stat-2017/ (дата обращения 27.02.2020 г.)

7. Итоги проведения государственной итоговой аттестации в Хабаровском крае. Хабаровск: КГКУ РЦОКО, 2018 [Электронный ресурс] Режим доступа: https://rcoko.khb.ru/gia-11/stat-ege/stat-2018/ (дата обращения 27.02.2020 г.)

8. Итоги проведения государственной итоговой аттестации в Хабаровском крае. Хабаровск: КГКУ РЦОКО, 2019 [Электронный ресурс] Режим доступа: https://rcoko.khb.ru/gia-11/stat-ege/stat-2019/ (дата обращения 27.02.2020 г.)

9. Козко А. И., Чирский В. Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. М.: МЦНМО, 2007. 296 с.

10. Математический энциклопедический словарь / Ю. В. Прохоров. М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия», 1995. 847 с.

11. Методы решения задач с параметрами [Электронный ресурс] Режим доступа: https://infourok.ru/metody_resheniya_zadach_s_parametrami-398722.htm (дата обращения 29.02.2020 г.)

12. Ожегов С.И. Толковый словарь русского языка / под ред. проф. Л.И. Скворцова. – 28-е изд. перераб. М.: Мир и образование, 2014. 1376 с.

13. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. М.: МИЭТ, 2004. 258 с.

14. Свободная энциклопедия «Википедия» [Электронный ресурс] Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения 29.02.2020 г.)

15. Социологический словарь / Акад. учеб.-науч. центр РАН-МГУ им. М.В. Ломоносова; отв. ред. Г.В. Осипов, Л.Н. Москвичев; ученый секретарь О.Е. Чернощек. М.: Норма, 2008. 606 с.

16. Ушаков Д.Н. Толковый словарь русского языка. в 3 т., на основе 4-томного издания 1948 г. М.: «Вече», «Си ЭТС», 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

Кислякова Мария Андреевна
Жулидова Юлия Владимировна

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННОГО
И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ:
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ
ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Монография

Отпечатано с авторского оригинал-макета
Дизайнер обложки *Е. И. Саморядова*

Подписано в печать 26.11.21. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 7,5. Тираж 500 экз. Заказ 211.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136