Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тихоокеанский государственный университет»

М. А. КИСЛЯКОВА

МЕТОДИКА РЕФЛЕКСИВНОГО ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

*Утверждено издательско-библиотечным советом университета
в качестве учебно-методического пособия*

Хабаровск

Издательство ТОГУ

2020

УДК 378.016:51(075.8)
ББК Ч426.221я73
К445

Р е ц е н з е н т ы:

канд. психол. наук, директор научно-исследовательского центра краевого государственного автономного образовательного учреждения дополнительного профессионального образования «Хабаровский краевой институт развития системы профессионального образования» *И. В. Пахно;*

директор МАОУ «Математический лицей» *Г. Я. Готсдинер*

Н а у ч н ы й   р е д а к т о р
канд. физ.-мат. наук, д-р пед. наук, профессор *А. Е. Поличка*

Кислякова, М. А.
К 445 Методика рефлексивного обучения решению математических задач: учебно-методическое пособие / М. А. Кислякова [науч. ред. А. Е. Поличка]; Министерство науки и высшего образования Российской федерации, Тихоокеанский государственный университет. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2020. – 208 с.

ISBN

Учебно-методическое пособие содержит теоретические и практические подходы к обучению решению математических задач на основе произвольного регулирования собственной интеллектуальной деятельности. В пособии раскрываются понятие рефлексии, концептуальные основы рефлексивного обучения математике, понятие математической задачи, описываются некоторые виды математических задач, рассматриваются основные методы решения математических задач, приводится методика рефлексивного обучения решению математических задач.

Учебное пособие предназначено для студентов педагогических профилей, магистрантов по направлению «Математическое образование», слушателей курсов повышения квалификации, всех, интересующихся проблемами математического образования и методикой обучения математики.

УДК 378.016:51(075.8)
ББК Ч426.221я73

ISBN

ВВЕДЕНИЕ

Моим учителям
посвящается

Методика обучения математике имеет многовековую историю, в которой отражаются все успехи педагогов по созданию системы математического образования как в России, так и в мире. Несмотря на то, что эта система, функционируя длительное время, давала выдающиеся результаты, к настоящему времени математические дисциплины являются самыми трудными предметами для учащихся как в школе, так и в вузе. Это приводит к тому, что появляются крайние точки зрения, призывающие исключить учебный предмет «Математика» из школьного и вузовского курсов из-за его трудности и низкой успеваемости учащихся.

Решением этой проблемы в современном мире может стать привлечение психолого-ориентированных концепций обучения, одной из которых является теория рефлексивного обучения. В настоящем пособии будет рассмотрен один из аспектов применения этой теории к практике математического образования, а именно рефлексивное обучение решению математических задач.

Психологические аспекты взаимосвязи рефлексии и математической деятельности учащихся частично раскрываются в работах М.А. Холодной, Э.Г. Гельфман, И.Г. Липатниковой и др. Изучая структуру и строение интеллекта, как формы организации ментального опыта, М.А. Холодная выделяет метакогнитивный опыт, который обеспечивает различные формы саморегуляции интеллектуальной активности в математической деятельности учащегося. В работах М.А. Холодной и Э.Г. Гельфман показано, что наиболее успешное развитие рефлексивных умений возможно, если при обучении математике учить планировать интеллектуальную деятельность по решению математических проблем, учить прогнозировать свои интеллектуальные действия и изменения в проблемной ситуации, учить контролировать и оценивать собственную математическую деятельность на основе выбранных критериев и т.д. На основании исследований сделан вывод о том, что эти рефлексивные умения являются основой способности к интеллектуальной саморегуляции, и, следовательно, условием продуктивной интеллектуальной математической деятельности [13; 61].

В педагогике основной и высшей школы рассмотрение проблемы развития рефлексии при обучении математике идет в русле формирования рефлексии как общей способности, без которой невозможно осуществление математической деятельности.

В работах С.П. Боженькиной и Е.И. Смирнова обосновывается, что рефлексия в исследовательской деятельности учащихся является структурным механизмом анализа и разрешения затруднений в поисковой активности при изучении математики. Рефлексия – есть необходимый элемент самоорганизации и самоконтроля учащихся в математической деятельности учащегося.

Особо следует отметить работы И.Г. Липатниковой, которая разработала рефлексивный подход к изучению математике в школе. Суть рассматриваемого подхода заключается в том, что обучение математике строится на основе совместно-распределительной деятельности учителя и ученика с четко выраженными «микроцелями» учеников, которые проявляются в том, что ученик сам осуществляет выбор целей на основании анализа своих способностей и потребностей при поддержке учителя. Такой подход позволяет реализовать развивающий потенциал математики, т.е. способствует развитию у учащихся мыслительных операций и стратегий самостоятельной познавательной деятельности в математике [39].

Методические особенности исследования влияния рефлексии на процесс обучения математике проявляются при обучении решению математических задач. Ряд авторов (Л.М. Фридман, Г.Д. Тонких, Н.И. Фирстова, А.Б. Ильясова и др.) рассматривает рефлексию как заключительный, оценочный этап при решении любой математической задачи.

Так, например, В.А. Далингер предлагает использовать рефлексивные задачи в устной работе школьников при решении текстовых математических задач. Под рефлексивными он понимает такие задачи, которые направлены на формирование у учащихся умения проводить самостоятельный анализ решения задачи, умения рассматривать способы собственных действий.

Ряд авторов (М.И. Калинина, Г.Д. Тонких и др.) связывают рефлексию при решении математических задач с идеей «выхода» за рамки деятельности в случае невозможности ее осуществления, перехода к новой деятельности и ее механизмам через рефлексию (идея раскрыта в работах Г.П. Щедровицкого).

В работе С.А. Парыгиной, стратегией преодоления трудностей в обучении математике студентов вуза выступает организация математической деятельности, основанная на формировании мотивационно-личностных характеристик (способности адекватно отражать уровень собственных трудностей, способности к саморегуляции, уверенности в себе), что свидетельствует о том, что рефлексивные механизмы влияют на процесс преодоления познавательных трудностей и психологических барьеров, с которыми неизменно сталкиваются все, изучающие математику.

В настоящем учебно-методическом пособии описан рефлексивный подход к обучению решения математических задач.

В первом разделе рассматриваются теоретические основы рефлексивного обучения математике. Определяется феномен «рефлексии» в психологии, определяются рефлексивные стратегии учебной математической деятельности. Описывается педагогический потенциал математических дисциплин в развитии личности учащегося на всех этапах его обучения. Формулируются принципы рефлексивного обучения математики и условия их реализации в образовательном процессе.

Раскрывается модель рефлексивного обучения решению математических задач, включающая в себя педагогические условия, приемы, методы и критерии оценки эффективности рефлексивного обучения математике.

Во втором разделе рассматривается задачный подход к обучению математике. Определяются различные подходы к понятию «математическая задача» и приводится один из вариантов классификации математических задач. Формулируется «обобщенный алгоритм» решения любой математической задачи и приводится обзор методов решения математических задач. Поднимается проблема алгоритмизации в решениях математических задач.

Описываются типичные особенности в решении задач по алгебре и геометрии, которые проявляются в особенностях поиска в решении математических задач.

В третьем разделе описываются рефлексивные стратегии решения математических задач: на этапах анализа условия, поиска решения и осуществление решения задачи. Приводятся методические приемы обучения самоконтролю при решении математических задач и способы проверки проведенного решения.

Приведена концепция автора организации педагогической поддержки учащимся, испытывающим трудности при решении математических задач. Концепция педагогической поддержки включает в себя разнообразные методики.

Пособие сопровождено большим количеством примеров математических задач с решениями и комментариями автора.

Для реализации принципов дифференциации и индивидуализации обучения в высшем педагогическом образовании в пособии представлены варианты индивидуальных заданий для студентов, магистрантов, аспирантов и практикующих учителей, позволяющие организовать индивидуальную траекторию обучения каждого учащегося.

РАЗДЕЛ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕФЛЕКСИВНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

«Себя как в зеркале я вижу,
но это зеркало мне льстит»
А.С. Пушкин

Проблема стимулирования познавательной активности субъектов на основе рефлексии своих мыслительных процессов послужила толчком к развитию рефлексивного подхода к обучению (рефлексивное обучение). В настоящее время важность и необходимость развития этого подхода в образовании не просто не оспаривается, но и подчеркивается ведущими научными школами нашей страны [30].

1.1. Понятие рефлексии в науке

Рефлексия. Виды рефлексии. Механизм рефлексии. Психологические механизмы регуляции деятельности.

Понятие «рефлексии» в философии, психологии и педагогике неоднозначно и очень актуально.

У нас всегда есть по меньшей мере два типа знаний. Это знания об объектах нашей деятельности, а с другой – знания о самой деятельности и ее процессуальных или операциональных компонентах. Кто бы и когда не действовал, он всегда должен фиксировать свое сознание, во-первых, на объектах своей деятельности – он видит и знает эти объекты, а во-вторых, на самой деятельности – он видит и знает себя действующим, он видит свои действия, свои операции, свои средства и даже свои цели и задачи [69, с. 126].

В связи с этим родилась проблема рефлексии как механизм развертывания мышления и деятельности человека. Люди строят и перестраивают свою деятельность, а условиями этого являются механизмы рефлективного анализа самой деятельности [69, с. 97].

Из традиций мы получили «рефлексию» как некоторый смысл, фиксирующий опыт философского самосознания.

Подход В.А. Лефевра характеризует «рефлексию как способность человека встать в позицию наблюдателя, исследователя, контролера по отношению к своим действиям, своим мыслям, а также встать в аналогичную позицию по отношению к другому персонажу, его мыслям и действиям». У Дж. Локка и Г. Лейбница рефлексия начинает трактоваться как сознавание сознания, или самопознание, как «поворот духа к "Я"» [69, с. 124].

Дж. Локк рассматривал рефлексию как внутренний опыт, являющийся основным источником знаний, он впервые выделил рефлексию как особую психическую реальность. Он определял ее как действие ума над самим собой, «наблюдение, которому ум подвергает свою деятельность и способы ее проявления, вследствие чего в разуме возникают идеи этой деятельности» [4, с. 8].

В работах Г.П. Щедровицкого рефлексия выступала, прежде всего, как особый способ осознания индивидом своей собственной работы, как переход от «практической» деятельности как таковой к осмыслению ее средств, процедур, условий. Но в этом контексте она была неразрывно связана с процессами усвоения и выступала как один из важнейших моментов механизмов усвоения [69, с. 127].

Рефлексия, подчеркивает Г.П. Щедровицкий, есть всегда рефлексия деятельности [69, с. 135].

Другими словами, рефлексия – это представление в сознании человека того, что и как он делает. Она сугубо субъективна и полна переживаний [69, с. 141].

В своем теоретическом концептуальном понимании рефлексия выступает как форма активного переосмысления человеком тех или иных содержаний индивидуального сознания, деятельности, общения.

В широком практическом смысле рефлексия рассматривается как способность человека к самоанализу, осмыслению и переосмыслению своих предметно-социальных отношений с окружающим миром и представляет собой необходимую составную часть развитого интеллекта [4, с. 18].

«То, что было некогда диалогом между разными людьми, становится диалогом внутри одного мозга», – писал Л.С. Выготский, имея в виду естественное тяготение развитого интеллекта к внутреннему диалогу [4, с. 20].

Рефлексия как психологическая основа саморегуляции человеком своей деятельности находит свое выражение в том, что человек выступает для себя и как объект управления (как Я-исполнитель) и как субъект управления (как Я-контролер), который планирует, организует и анализирует собственные действия [4, с. 20–21].

Рефлексия – такое осмысление человеком своих действий, такое размышление о них, в ходе осуществления которого человек отдает себе полный и ясный отчет в том, что и как он делает, т.е. осознает те схемы и правила, в соответствии с которыми он действует. Смысл рефлексии как особого познавательного действия заключается в уточнении человеком своих знаний, в выяснении оснований своих знаний, в выяснении того, как вырабатывались те или иные знания и представления. Рефлексия позволяет личности выйти из полной поглощенности непосредственной ежедневной деятельностью для выработки соответствующего отношения к ней, для занятия позиции «над ней, чтобы с высоты этой позиции осознать свою деятельность, критически ее проанализировать и конструктивно ее усовершенствовать» [51].

В современной науке понятие рефлексии употребляется в двух значениях:

– как принцип человеческого мышления, направляющий его на осмысление и осознание деятельности самопознания;

– как процесс отражения одним человеком внутреннего мира другого человека.

Разделение рефлексии на две категории не является четким, даже наоборот, способность человека рефлексивно отнестись к себе есть результат интериоризации личностью социальных отношений [51].

Рефлексия содействует тому, что внутренние силы выступают главным резервом и побудителем активности человека.

Вместе с тем, надо отметить, что процесс исследования «рефлексии» и ее роли в жизни человека сопровождается рядом сомнений. «Дело в том, – говорит А.В. Карпов, что по своей природе рефлексия – это, так сказать, «апогей субъективности», это сфера осознанного как произвольного, то есть зависящего от субъекта, его воли, а поэтому не вполне объективного. Иными словами, рефлексия – это та область, где существуют максимальные возможности для «отступления» от объективных законов и закономерностей как таковых [25, с. 8].

Виды рефлексии. В зависимости от функций, которые выполняют рефлексивные процессы в конкретной ситуации, выделяют три вида рефлексии.

1. Ситуативная рефлексия. Эта форма выступает в виде «мотивировок» и «самооценок» и обеспечивает непосредственную включенность субъекта в ситуацию, осмысление ее элементов, анализ происходящего. Она включает способность субъекта соотносить с предметной ситуацией собственные действия, а также координировать и контролировать элементы деятельности в соответствии с меняющимися условиями.

2. Ретроспективная рефлексия. Служит для анализа уже выполненной деятельности, событий, имевших место в прошлом. Эта форма может служить для выявления возможных ошибок.

3. Перспективная рефлексия. Данный вид рефлексии включает в себя размышление о предстоящей деятельности, представление о ходе деятельности, планирование, выбор наиболее эффективных способов выполнения, прогнозирование возможных результатов [28, с. 32].

Кроме того, обычно проводится дифференциация на интеллектуальную и личностную рефлексию [28, с. 32].

Интеллектуальный аспект рефлексии. Здесь рефлексия понимается как способность интроспективно просматривать и отслеживать ход своей интеллектуальной деятельности: выделять, анализировать и соотносить с предметной ситуацией собственные действия по решению задачи.

Рефлексия как интеллектуальный процесс раскрывается как принцип человеческого мышления, направляющий его на осмысление и осознание собственных форм и предпосылок, критический анализ его содержания, методов и результатов познания или, проще говоря, как способность думать об основаниях собственного мышления [4, с. 19].

Особо значимая сфера рефлексии – мыслительные процессы, недаром ее иногда определяют как *мышление о мышлении*. Как известно, человек не только понимает что-то, но и понимает, что он понимает, или понимает, что он не понимает, или не понимает, что именно он не понимает. Это уже начало рефлексии, внутренний призыв к выходу в неё. Человек прибегает к рефлексии, когда оказывается в проблемной ситуации. Именно рефлексивный обзор всех составляющих данную задачу и своих собственных действий позволяет ему, заняв иную умственную позицию, отыскать недостающее звено в данных задачи или осознать собственное заблуждение [4, с. 35].

М.А. Холодная, изучая ментальный опыт человека, выделила в нем ментальные структуры, отвечающие за «где, когда и как будут использоваться наличные индивидуальные интеллектуальные ресурсы» человека, среди которых с рефлексией тесно связаны произвольный и непроизвольный интеллектуальный контроль, метакогнитивная осведомленность, открытая познавательная позиция [61, с. 127].

Вопросы интеллектуальной рефлексии разрабатываются в работах Paris и Winograd, которые доказывают, что учащиеся могут улучшить свое обучение, изучая свое собственное мышление [71].

Механизм рефлексии. Ядро и сущность рефлексии составляет такая организация ситуации, единой для всех действующих индивидов, которая дает возможность всем индивидам, несмотря на различие их позиций и объективное различие тех смыслов, которые должны в этих ситуациях образовываться, видеть, понимать и восстанавливать один и тот же объективированный, а, следовательно, и нормированный смысл.

«Я утверждаю, – пишет Г.П. Щедровицкий, – что каждый раз, когда возникает такая ситуация, то вместе с ней возникает рефлексия или, во всяком случае, появляется потребность в рефлексии» [69, с. 123].

Потребность в разрешении сомнения является постоянным и руководящим фактором во всем процессе рефлексии. Вопрос, на который надо ответить, затруднение, из которого надо выйти, ставит определенную цель и направляет течение мыслей по определенному каналу. Каждое возникающее заключение оценивается по отношению к регулирующей цели, по его соответствию данной проблеме. Эта потребность распутать затруднение контролирует предпринимаемое исследование. *Проблема устанавливает цель мысли, а цель контролирует процесс мышления* (Дьюи, 1997) [4, с. 22].

«Для того чтобы две деятельности – рефлектируемая и рефлексирующая – могли выступить в кооперации друг с другом как равноправные, нужно, чтобы между ними установились те или иные собственно кооперативные связи деятельности. Объединение рефлектируемой и рефлексирующей позиции может проводиться либо на уровне сознания, либо на уровне логически нормированного знания [69, с. 100].

Рефлексивный выход означает, что индивид должен выйти из своей прежней позиции деятеля и перейти в новую позицию, внешнюю, как по отношению к прежним, уже выполненным деятельностям, так и по отношению к будущей, проектируемой деятельности. Новая позиция деятеля, характеризуемая относительно его прежней позиции, будет называться рефлексивной позицией, а знания, вырабатываемые в ней, будут называться рефлексивными знаниями, поскольку они берутся относительно знаний, выработанных в первой позиции [69, с. 99].

В практическом смысле для выхода в рефлексию достаточно задать себе вопрос типа *«Что происходит? Что со мной? Что я делаю и почему?».* Такой же эффект произведет и осознание человеком проблемности ситуации, в которой он оказался. Невозможность поступать прежним образом вызовет остановку текущего психического процесса, и человеку будет представлена возможность отрефлексировать себя и ситуацию [4, с. 28].

Внутренний диалог с самим собой – это и есть рефлексия [4, с. 32]. Рефлексия дает человеку возможность увидеть себя со стороны глазами другого "Я", понять себя, свои желания, свои переживания, свои поступки, т.е. помочь себе объяснить самого себя [4, с. 32].

Механизм выхода в рефлексию состоит из четырех этапов: «остановка» – «фиксация» – «анализ» – «решение».

Структура рефлексивной мысли включает:

- ✓ уяснение для себя фактов, подлежащих анализу;
- ✓ осмысление основных идей и принципов, лежащих в их основе;
- ✓ анализ всех составляющих компонентов данной ситуации;
- ✓ синтез знаний и идей для принятия решения;
- ✓ оценка принятого решения [4, с. 34].

Таким образом, ***под рефлексией будем понимать мыслительный (рациональный) процесс, направленный на анализ, понимание, осознание себя (собственных действий, поведения, речи, опыта, чувств, состояний, способностей, характера, отношений, своих задач, назначения, трудностей, проблем и т.д.).***

Рефлексия начинается в младшем школьном возрасте, а у подростков и взрослых людей становится основным механизмом регуляции поведения и личностного саморазвития [67].

В процессе регуляции собственной деятельности учащимися существенное значение имеют функции самоконтроля и саморегуляции.

Самоконтроль – способность контролировать свои эмоции, мысли и поведение. Самоконтроль основывается на воле – высшей психической функции, определяющей способность человека принимать осознанные решения и претворять их в жизнь.

Самоконтроль является неотъемлемым компонентом процессов самоуправления и саморегуляции учащихся в обучении. Его назначение заключается в предупреждении возможных или обнаружении уже совершённых ошибок.

При этом в практике обучения следует учитывать наличие прямой зависимости между уровнем самостоятельности учащихся и степенью их овладения навыками самоконтроля.

Осознанная целенаправленная саморегуляция – системно-организованный процесс внутренней психической активности человека по инициации, построению, поддержанию и управлению разными видами и формами произвольной активности, непосредственно реализующей достижение принимаемых человеком целей [34, с. 6].

Саморегуляция имеет две формы – произвольную (связанную с целевой деятельностью и доступная самоконтролю) и непроизвольную.

Вовне общая способность к саморегуляции проявляется, прежде всего, в успешном овладении новыми видами и формами деятельности. Она выражается также в успешном решении нестандартных задач и действенном преодолении нетипичных, незнакомых ситуаций на всех ступенях овладения различными видами деятельности и сферами жизни в продуктивной самостоятельности, в упорстве и настойчивости в достижении принятой цели.

«Внутренняя» же, субъективная сторона саморегуляции характеризуется осознанностью, пониманием оснований осуществляемой деятельности в целом, ее важнейших структурных моментов – цели, условий, применяемых способов действий, необходимых коррекций, оценки результатов. При этом осознанно учитываются как объективные внешние условия деятельности, так и собственные субъективные возможности. Как правило, самостоятельно определяются причины возникающих трудностей неудач [34, с. 129].

В процессе осознанной регуляции субъект преломляет объективные требования к деятельности через систему своих внутренних детерминант произвольной активности [34, с. 133].

Саморегуляция есть один из видов самовоспитания, как самостоятельной целеустремленной, систематической работы человека по формированию и развитию своих лучших, социально ценных свойств и изжитию недостатков, осуществляемая с целью максимальной самореализации.

Стоит отметить важное значение, которое отводится рефлексии в процессе саморегуляции психических состояний. А.В. Карповым установлено, что самоконтроль, выступая в качестве регулятивной рефлексии и оценки субъектом собственных действий может оказывать значительное влияние на интеллектуальную деятельность посредством актуализации соответствующих психических состояний.

Рефлексия «включена» как центральное, основное звено в регуляторный процесс субъекта, как самодетерминирующее и саморегулирующее начало его регуляторных действий. Благодаря рефлексии осуществляется осознание, оценка, сличение актуального состояния с искомым, и, соответственно, в случае необходимости, субъектом вносится коррекция в применяемые способы и приемы регуляции.

Рефлексия позволяет спрогнозировать, «проиграть» возможные варианты и результаты регуляции состояний в тех или иных обстоятельствах и ситуациях жизнедеятельности, перестроить сложившиеся способы действия, проанализировать структуру действий, не приводящих к успеху.

Включенность рефлексивных механизмов обусловливается целью регуляции – необходимостью изменения психического состояния, как неадекватного ситуации, событию, цели деятельности [52, с. 12].

Важно отметить, что сформированные способности к самоконтролю, саморегуляции, высокий уровень рефлексии позволят создать условия для формирования у человека критического мышления, без наличия которого, человеку сложно существовать в информационно-насыщенном современном мире.

Надо понимать, что рефлексия – это способ осмысления человеком полученного результата деятельности и способов, которыми он был достигнут. Саморегуляция – то, что рефлексию неизменно сопровождает, т.к. человек корректирует свою деятельность по ходу ее осуществления.

Таким образом, можно выделить три направления исследования рефлексии:

– при исследовании теоретического мышления;

– при исследовании процессов коммуникации и кооперации действий участников этих процессов;

– при исследованиях самосознания личности, связанных с проблемами формирования личности, воспитания и самовоспитания.

Анализ публикаций последних лет показал, что чем активнее рефлексивные механизмы включены в математическую деятельность, тем выше уровень успеваемости учащихся по математическим дисциплинам.

Все вышесказанное свидетельствует о важности включение рефлексивных механизмов в математическое образование учащихся.

.

1.2. Рефлексивные стратегии учебной деятельности

«Рефлексивное понимание должно перерастать в деятельность»
Г.П. Щедровицкий

Учебная деятельность. Рефлексия в обучении. Рефлексивные умения. Рефлексивные стратегии.

Кратко рассмотрим понятие ***учебной деятельности***. В самом широком смысле учебная деятельность есть деятельность субъекта по овладению обобщенными способами учебных действий и саморазвитию в процессе решения учебных задач, специально поставленных преподавателем, на основе внешнего контроля и оценки, переходящих в самоконтроль и самооценку. И.А. Зимняя выделяет пять основных характеристик учебной деятельности:

– она специально направлена на овладение учебным материалом и решение учебных задач;

– в ней осваиваются общие способы действий и научные понятия;

– общие способы действия предваряют решение задач;

– учебная деятельность ведет к изменениям в самом субъекте;

– изменения психических свойств и поведения обучающегося «в зависимости от результатов своих собственных действий» [21, с. 4].

К основным средствам и способам учебной деятельности относят интеллектуальные действия (анализ, синтез, обобщение, классификация и др.), знаковые (вербальные, языковые) средства и фоновые знания.

В процессе учебной деятельности с помощью разнообразных способов рефлексируется и воспроизводится индивидуальный опыт учащегося. Продуктом учебной деятельности является структурируемое и актуализируемое знание.

В общей структуре учебной деятельности значительное место отводится рефлексивным действиям самоконтроля и самооценки.

Рефлексия в учебной деятельности. Есть ли связь между уровнем рефлексии учащихся и его успешностью в обучении?

Исследования, проведенные разными учеными, свидетельствуют о том, что чем выше уровень осознанной саморегуляции, тем легче учащийся овладевает новыми знаниями, чувствует себя более раскрепощенно и легко. Высокорефлексивные субъекты лучше планируют, прогнозируют и оценивают результаты своей деятельности, чем средне- и низкорефлексивные индивиды [52, с. 15].

Какова же реальная ситуация с рефлексивным включением в деятельность у школьников?

Критическая, оценочная деятельность крайне слабо развита у школьников: затруднено их смысловое самоопределение в изучаемом материале, в последовательности его расположения, абсолютно отсутствует понимание учебного курса и связей внутри него. Крайне низок уровень сформированности самооценки: в большинстве случаев в своих негативных результатах учащиеся обвиняют учителя и различные внешние обстоятельства и практически никогда не видят своих собственных ошибок, просчетов и недоработок» [51, с. 268].

Использование результатов исследования феномена рефлексии способно привести к существенному расширению возможностей образования.

Во-первых, это приобретенная учеником возможность управлять собственным мышлением – уметь продуктивно думать и совершенствовать это умение.

Так, например, при направленной рефлексии учащийся будет осознавать «знаниевую» сторону образовательного процесса и структуру самой деятельности, ее каркас, придавая ей мотивационную обусловленность.

Во-вторых, понимание и принятие им рефлексии как неторопливого и углубленного осмысления событий, явлений и самого себя позволяют ему получить новый взгляд на окружающий и свой внутренний мир [4].

Как утверждает М.А. Лопарева, педагогический потенциал учебно-познавательной деятельности в формировании рефлексивных умений учащегося реализуется путем актуализации коммуникативной составляющей, которая побуждает учащегося к самопознанию, способствует переходу внешнего диалога во внутренний (с самим собой), запускает механизмы рефлексии, приводит к осознанию самодвижения и самопроявления в познавательной учебной деятельности.

В-третьих, развитие рефлексивных умений позволит оптимизировать учебную деятельность учащегося.

Рефлексивные умения учащегося есть система осознанных действий и операций, направленных на понимание, осмысление и оценку субъектом собственного «Я», своей деятельности и поведения, обеспечивающая совершенствование и успешность учебной деятельности.

К рефлексивным умениям можно отнести:

– умение планировать – выдвигать цели и подцели собственной интеллектуальной деятельности, продумывать средства их реализации, выстраивать последовательность собственных действий;

– умение прогнозировать – учитывать последствия принимаемых решений, а также прогнозировать возможные изменения проблемной ситуации;

– умение объективно оценивать собственное знание (незнание) и качество отдельных действий;

– умение анализировать ход собственных мыслей, аргументировать собственные интеллектуальные поступки;

– умение настраивать себя на работу;

– умение отстаивать или пересматривать свое мнение в соответствии с осознанием допущенных ошибок;

– умение высказывать конструктивную критику в адрес собеседника.

Рефлексия в обучении подразумевает исследование уже осуществленной деятельности с целью фиксации её результатов и повышения в дальнейшем её эффективности. Рефлексивный подход помогает учащимся вспомнить, выявить и осознать основные компоненты деятельности – ее смысл, типы, способы, проблемы, пути их решения, полученные результаты, а затем поставить цели для дальнейшей работы [4, с. 48].

А.В. Хуторской предлагает методику организации рефлексии ученика на уроке. Она строится в соответствии с внутренней структурой рефлексивного акта и включает в себя следующие этапы.

1. Остановка предметной деятельности означает, что все внимание учеников обращается на предстоящий анализ деятельности.

2. Восстановление последовательности выполненных действий. Ученикам предлагается устно или письменно описать все свои действия при выполнении рефлексируемой деятельности.

3. Изучение составленной последовательности действий с точки зрения её эффективности, продуктивности, соответствия поставленным задачам. Параметры для анализа рефлексивного материала предлагаются учителем или определяются самими учениками на основе учебных целей.

4. Выявление и формулирование результатов рефлексии. Результаты рефлексии могут быть представлены как:

– идеи, предположения, ответы на вопросы и по содержанию предметной деятельности;

– приемы и способы действий, которые использовались в ходе деятельности;

– гипотезы, прогнозы по отношению к осуществлению дальнейшей деятельности, по ее качественной и количественной стороне.

5. Проверка гипотез на практике в последующей предметной деятельности [62].

Как известно, в педагогической психологии выделяются два основных вида организации осознания учениками собственной деятельности – текущая и итоговая рефлексия. Текущая рефлексия связывается с выполнением каждого поискового действия, она вплетается в ткань предметного действия. Текущая рефлексия нацелена на активизацию процесса осознания и осмысления осуществляемой в данное время предметной деятельности: ее направление, цель, основные этапы, проблемы, противоречия, способы деятельности, результаты.

Итоговая рефлексивная деятельность обычно осуществляется учащимся после того, как учебно-познавательная задача решена. Прослеживая выполнение реализованных действий, учащийся осмысливает в целостном виде, как осуществленная последовательность действий обеспечивает поиск искомого.

Итоговая рефлексия отличается от текущей большим объемом рефлексируемой деятельности и большей формализованностью. Методы, формы и содержание итоговой рефлексии определяет учитель на основе образовательной программы. Итоговую рефлексию проводят в виде специального занятия в конце изучения большого раздела учебного предмета или, например, в конце четверти или учебного года, на котором ученикам предлагается ответить на специальные вопросы [4, с. 48–50].

В соответствии с моделью образовательного процесса на основе обратной связи при самоконтроле ученика и под контролем учителя учащийся осмысливает весь ход выполнения последовательной цепочки действий.

Таким образом, ***под рефлексивным обучением будем понимать целенаправленный педагогический процесс организации и стимулирования активной учебно-познавательной деятельности учащихся по овладению знаниями, умениями и навыками с применением рефлексивных стратегий обучения***.

Понятие «стратегия» происходит от греческого «στρατηγία» и поначалу представляло собой часть военного искусства и охватывало вопросы подготовки и ведения войн. При этом под стратегией подразумевалась норма оптимального поведения. Сунь-цзы, например, писал: «Тот, кто одержал сотни побед в сотнях конфликтов, вряд ли обладает высоким мастерством. Тот, кто владеет высоким мастерством использования стратегии, покоряет других, не вступая с ними в конфликт». Впоследствии этот термин стал использоваться в политике, экономике и других областях, что привело к появлению в научной литературе множественности определений термина «стратегия». Всестороннее исследование данного понятия было проведено Г. Минцбергом в 1987 году, в результате которого автором было выделено пять основных толкований слова «стратегия»: 1) стратегия как план; 2) как ловкий прием; 3) как паттерн (принцип поведения, устойчивая схема действий); 4) как позиция (соотношение «организации» с «внешней средой»); 5) как перспектива (концепция) [66].

Приведенные определения взаимосвязаны, стратегия подразумевает рассмотрение наиболее фундаментальных аспектов процесса обучения. Так, под учебной стратегией будем понимать множество процедур, которые учащиеся использует для решения учебной задачи.

Суть рефлексивной стратегии многие исследователи определяют, как управление процессами обработки информации с помощью процедур контроля, планирования и антиципации [56, с. 23].

Рефлексивные стратегии в учебной деятельности – это множество процедур управления процессами рефлексии над учебной деятельностью, над когнитивным действованием.

Под рефлексивными стратегиями учебной деятельности будем понимать комплексную организацию собственной учебной деятельности, включающую такие компоненты, как осознание цели и критериев ее достижения, операции по достижению

цели, коррекцию процесса деятельности, фиксация полученного результата.

Приведем некоторые виды рефлексивных стратегий в учебной деятельности:

1. *Четкое разделение известного и неизвестного в проблемных ситуациях.* Исследуя какую-либо проблему, необходимо, в первую очередь, провести *тщательный анализ* ситуации, т.е. четко разделять всю информацию на ту, которой учащийся владеет и ту, которую необходимо получить для решения. По ходу решения обе категории информации следует дополнять и уточнять.

2. *Вербализация процесса мышления.* Эта стратегия позволяет отработать умение «говорить о мышлении», вербально обозначать его этапы, трудности, результаты и мыслительные стратегии. Два основных приема формирования этого умения – демонстрация мышления вслух, рассуждение о мышлении и дискуссии об особенностях мышления при решении различного рода задач. Эффективно также «парное» решение задач, когда один из решающих размышляет вслух, а его партнер задает уточняющие вопросы, резюмирует, комментирует ход мышления, направляя его в правильное русло.

3. *Планирование и саморегуляция мышления.* Рефлексивное обучение само по себе предполагает организацию, планирование и регуляцию обучающимися своего мышления в процессе обучения. Следует обучать учащихся планировать учебные мероприятия – их частоту, продолжительность, объем материала, для того, чтобы вовремя и успешно решать поставленные задачи.

4. *Формулирование стратегий мышления.* Этот метод включает три этапа: решение задачи с отслеживанием тех процессов, мыслей и чувств, которые сопровождают решение; обобщение, классификация полученной информации и первичная формулировка стратегий; окончательная формулировка и операционализация способов мышления. Используя логику рассуждений, учащийся пытается хладнокровно разобраться в ситуации, убеждая себя, что положение дел его не

удовлетворяет и целесообразно поменять это состояние на противоположное. Самоприказ действовать согласно выбранной стратегии.

5. *Самооценивание.* Самооценивание эффективности мышления, должно быть дифференцированным и опираться на выработанные заранее критерии оценки [24, с. 311].

Рефлексивное обучение определяет педагогу сопровождающую позицию по отношению к учебной деятельности ученика, помощь ему в применении рефлексивных стратегий. Педагог, обращаясь к учащимся с вопросом «Какие трудности возникали у Вас при ...?», ориентирует на выполнение рефлексивных действий:

– остановка (определение момента возникшего затруднения);

– фиксация (попытка выяснить причину и сформулировать, в чем именно заключается затруднение);

– отстранение (осознание причины возникшего затруднения), собственно и есть рефлексивный выход из деятельности;

– объективация (затруднение рассматривается как объект новой (внешней) по отношению к прежней деятельности);

– оборачивание (побуждение к выходу из затруднения на основе выбранного варианта дальнейших действий) [63].

Таким образом, рефлексивные стратегии в учебной деятельности помогают учащемуся отдавать себе ясный отчет в том, что и как он делает, основания, цели, планы, правила, согласно которым он реализует свою учебную деятельность. Использование рефлексивных стратегий в обучении позволит учащемуся быть более самостоятельным, независимым от педагогов, поскольку средствами преодоления трудностей будут являться собственные ресурсы учащегося.

1.3. Педагогический потенциал математических дисциплин

«Задача заключается не в том,
чтобы учить математике, а в том,
чтобы при посредстве математике
дисциплинировать ум»
М.В. Остроградский

Развивающий потенциал математики. Воспитательный потенциал математики. Образовательный потенциал математики. Мировоззренческий потенциал математики.

О возможностях математики в развитии личности учащегося говорят давно. Многовековая практика математического образования только подтверждает мнение большинства, что без развитой математической культуры человек не может эффективно выполнять свою деятельность.

Понятие педагогического потенциала математических дисциплин в теории и методике обучения математике занимает важную роль, поскольку разрешает вопрос о необходимости изучения математических дисциплин на всех этапах обучения. В настоящем пункте опишем возможности математических дисциплин в развитии личности учащегося в образовательном процессе.

Развивающий потенциал математики. Изучение математики вносит определяющий вклад в интеллектуальное развитие учащегося. В процессе обучения математике в арсенал приемов и методов мышления учащегося естественным образом включаются индукция и дедукция, обобщение и конкретизация, анализ и синтез, классификация и систематизация, абстрагирование, аналогия. Объекты математических умозаключений и правила их конструирования вскрывают механизм логических построений, вырабатывают умения формулировать, обосновывать и доказывать суждения, тем самым развивают логическое мышление. Ведущая роль принадлежит математике в формировании аналитического мышления, воспитании умений действовать по заданному алгоритму и конструировать новые [23, с. 35].

Математическая деятельность способствует «обогащению» ментального (умственного) опыта учащегося. М.А. Холодная, отмечая нецелесообразность отождествления опыта субъекта только с прошлым опытом, пишет, что опыт субъекта это «и фиксированные формы опыта (то, что человек усвоил в прошлом), и оперативные формы опыта (то, что происходит в ментальном опыте этого человека в настоящем), и потенциальные формы опыта (то, что появится в его ментальном опыте в качестве новообразований в ближайшем или отдаленном будущем [61, с. 82–83].

Важным показателем интеллектуального развития учащегося служит наличие разнообразных когнитивных схем ментального опыта. В работе М.А. Холодной определение когнитивной схемы дается так: «это обобщенная и стереотипизированная форма хранения прошлого опыта ... Когнитивные схемы, отвечают за прием, сбор и преобразование информации в соответствии с требованием воспроизведения устойчивых, нормальных, типичных характеристик происходящего» [56, с. 113]. Иными словами, когнитивные схемы являются структурами, которые отвечают за выполнение ряда сходных действий. Когнитивные схемы, отвечающие за различные алгоритмы решения математических задач, недостаточно представлены у многих учащихся, именно поэтому они каждую типовую задачу воспринимают как принципиально новую.

Показателем развития когнитивных структур являются развитые когнитивные умения. В литературе часто под когнитивными умениями понимают «интеллектуальные умения»: слушать и слышать, выделять главное (общее и отличное), сравнивать, систематизировать, обобщать, делать выводы, устанавливать взаимосвязи, составлять тезисы, воспринимать и выстраивать цепь суждений, анализировать, доказывать, формулировать проблему, мысленно проигрывать варианты ее решения [13; 25; 41]. Другими словами, под «интеллектуальными умениями» надо понимать освоенные способы выполнения действий и операций, которые обеспечены совокупностью знаний, реализуемые под контролем сознания, и направленные на получение, переработку и применение информации [26].

Проведенные многочисленные исследования в области применения математики и математических дисциплин для развития интеллекта, когнитивных способностей, мышления свидетельствуют о том, что математический стиль мышления в наиболее яркой форме выражает научно-теоретический стиль мышления. Именно поэтому математическая деятельность является в некоторых отношениях наиболее подходящим инструментом для развития интеллектуальных умений когнитивного опыта, характеризующихся такими свойства, как логичность, абстрактность, критичность, разумность, дисциплинированность [27].

Математическое познание есть особый тип функционирования разума. Логическое мышление является одним из основных стержневых качеств личности. В основе каждого правильно построенного рассуждения лежит формально-логическая схема, так, независимо от стиля мышления (адаптивного, эвристического, исследовательского, инновационного, смыслопорождающего (Холодная, 1999), эта схема должна подчиняться определенным правилам функционирования. Известно, что для математики характерно «доведенное до предела доминирование логической схемы рассуждения» [60, с. 36]. Следовательно, специфическая для математики строгость и стройность умозаключений призвана совершенствовать логическую составляющую мышления каждого человека (Хинчин, 2006).

В качестве обоснования возможностей математики как инструмента для развития мышления, выступает специфика математической деятельности. Ее отличительные черты мы видим и в построении математики как науки, и в исторически сложившейся традиции обучения математическим дисциплинам. Разнообразная, многофункциональная математическая деятельность характеризуется следующими отличительными чертами:

- независимостью от положений других наук;
- обоснованием каждого практического действия теоретическим положением;
- жесткими требованиями доказательства каждого высказанного положения;
- пониманием, как основным критерием усвоения математических знаний;
- стремлением к критичности найденного решения, поиску кратчайшего, рационального пути решения;
- наличием математических закономерностей;
- существованием математического языка, отличающегося от естественного по ряду важных показателей, таких как однозначность, универсальность и т.д.

Исследования отечественных ученых (В.А. Крутецкий, Н.А. Менчинская, П.Я. Гальперин, и др.) показали, что математические и логические структуры формируются в сознании одновременно и во взаимосвязи, и усвоение математических знаний тем самым обязательно повлечет за собой развитие логической составляющей мышления [38].

Развивающий потенциал математики заключается в том, чтобы с помощью всей системы методов, форм и средств обучения математики способствовать развитию культуры мышления учащихся.

Занятия математической деятельностью позволят сформировать у учащегося навыки критического мышления, что будет проявляться в его умении отслеживать цепочки логических выводов, осмысливать их, замечать пропуски в обосновании выводов, распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта, приводить примеры и контрпримеры.

Развивающий потенциал математики будет проявляться в том, что учащиеся будут интеллектуально активны, каждая ситуация будет представляться им как математическая задача (что дано / что требуется найти). Умения работать с математической задачей ярко проявятся у учащихся в процессах принятия решений.

Навыки математического мышления позволят учащимся преодолевать мысленные стереотипы, навеянные обыденным опытом. Более того, занимаясь математикой у учащегося будет развиваться доверие к собственному мышлению. Интуиция, подсказывающая, что, например, треугольники равны, в тандеме с мышлением, опирающимся на признаки равенства треугольников, позволит обогатить ментальный опыт учащегося, сделав его уникальным индивидуальным складом ума.

Развивающий потенциал математики, как никакой другой учебный предмет, направлен на гармоничное развитие личности учащегося.

Воспитательный потенциал математики. Занятия математической деятельностью не только развивают культуру мышления, но и существенно влияют на формирование личностных качеств учащихся, таких как саморегуляция, способность организовывать свою деятельность, ответственность, умение настраивать себя на работу, на решение трудных задач, способность преодолевать интеллектуальное затруднение, потому что «математика дает возможность учащемуся почувствовать силу человеческого разума, т.е. силу его собственного разума» [55, с. 40]. Математические дисциплины ввиду объективности математического знания обладают глубокими возможностями для формирования гармоничной личности учащегося. У учащегося есть возможность как бы со стороны наблюдать за своим мышлением в процессе занятий математической деятельностью.

Е.М. Вечмотов говорит: «Математика – самая честная и творческая из наук. Она воспитывает не только правдивость, критичность, самостоятельность, справедливость, благородство, трудолюбие и дисциплинированность, но и учит «свободному полету мысли», несмотря на заданность строгих логических правил» [10, с. 235]. Это значит, что содержание и методика обучения математическим дисциплинам не только влияют на культуру мышления учащегося, но и существенным образом воздействуют на духовную составляющую, тем самым развивая многогранную личность учащегося.

Математическая деятельность воспитывает у учащегося способность принимать самостоятельные решения, появляется уверенность в собственных силах, формируется опора на собственные силы и интеллект.

Овладение студентами фундаментальными понятиями математики (функциональная зависимость, вероятность, доказательство, статистики, статистическая гипотеза, игра и т.д.), позволит учащимся использовать концептуальные понятия математики, для того, чтобы «отличать истину от лжи, смысл от бессмыслицы, понятное от непонятного» (В.А. Успенский).

Образовательный потенциал математики. В процессе изучения математики, учащиеся осваивают дидактически адаптированный математический аппарат для того, чтобы познакомится с основами науки «Математика». Усвоенные математические понятия и сформированные математические умения позволят учащемуся решать практические задачи, возникающие в его повседневной деятельности.

Математика является языком многих наук, таких как физика, химия, экономика. Готовясь к освоению будущей профессиональной деятельности, учащиеся будут использовать математический язык для описания гуманитарных, экономических, технических объектов, а математические методы для решения прикладных задач.

Изучение математики на всех этапах обучения позволит учащемуся:

– овладеть системой теоретических сведений, необходимых для изучения общенаучных, общеинженерных, гуманитарных дисциплин и последующего приложения математики;

– познакомиться с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода изучения реальных объектов;

– выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов: навыки перевода реальной задачи на адекватный математический язык, выбора оптимального метода ее исследования и оценки его точности;

– выработать навыки доведения решения задачи до практического результата – числа, графика, точного количественного вывода, применяя для этого соответствующие вычислительные средства;

– научиться работать с математическим текстом, самостоятельно осваивая математические разделы [53, с. 52].

Усвоение математического аппарата на всех этапах обучения позволит учащемуся быть более квалицированным и осведомленным в своей профессиональной деятельности.

Мировоззренческий потенциал математики. В многочисленных исследованиях показано, что математика способствует становлению целостного индивидуального мировоззрения, в котором математика видится не как свод правил, теорем и абстрактных задач, а как инструмент познания мира.

При реализации этих идей в образовании в рамках учебного предмета представлено несколько концепций, одна из таких была сформулирована Л.А. Жоховым как «концепция мировоззренчески направленного обучения математике». Автор полагает, что успешное разрешение проблемы становления личности обучающегося «можно ожидать не в русле навязывания какой-то определенной системы взглядов на мир, пусть даже и кажущейся на сегодняшний день правильной, но на путях, прежде всего, оказания ему посильной и целенаправленной помощи в постепенном и последовательном «выращивании» у него системы обобщенных математико-мировоззренческих ориентиров и качеств» [16, с. 367].

А.Л. Жохов в своей теории мировоззренчески направленного обучения математики отличительные особенности математики представил через «мировоззренческий потенциал математики как грани культуры», который он видит «в системе исторически сформировавшихся в математической культуре математико-мировоззренческих ориентиров, механизмов разрешения мировоззренческих ситуаций – способов и средств саморазвития человека, математического познания и идеального преобразования мира как в его фрагментах, так и в целом» [16, с. 382]. Эти ориентиры А.Л. Жохов видит в следующем.

1. В том, что математика оперирует идеальными объектами, т.е. существует возможность отвлечься от естественных свойств объекта и тем самым упростить задачу исследования.

2. В том, что математика ориентируется на предельные, универсальные истины.

3. В том, что верным способом идеального познания и преобразования служит мышление человека.

4. В том, что в математике исторически сложились надежные способы фиксирования и обоснования результатов видения мира (символизация, математический язык, опора на понятия, алгоритмизация).

5. В том, что в математике наряду с аналитическим представлен и ее рефлексивный характер, который дает не просто примеры, но и образцы принципа рефлексивности в научном познании.

6. В том, что в современной математической науке представлены математические модели объектов окружающего мира.

7. В том, что в математике наблюдается правильный баланс между опытным и умозрительным в решении сложных задач.

8. В том, что математика и ее аппарат лежат в основе переработки информации, что является первостепенной задачей для современного информационного общества.

Таким образом, математикой накоплены «математико-мировоззренческие ориентиры», знакомство с которыми позволит учащимся лучше понимать закономерности окружающего мира и своевременно решать мировоззренческие проблемы на основе общих способов интеллектуальной деятельности. У учащегося сформируется представление о математике как о части человеческой культуры, о ее значимости в историческом развитии и современном мире [16].

Рефлексивный потенциал математики заключается в возможностях математической дисциплины для развития рефлексивных стратегий учащегося, таких как:

– знание собственных интеллектуальных и эмоциональных ресурсов;

– умение учащихся корректировать собственное мнение в зависимости от объективных фактов;

– умение понимать, принимать и объективно оценивать различные точки зрения на математические объекты и действия с ними.

Педагогический потенциал математических дисциплин способствует развитию таких способностей учащихся, как *способность к критическому мышлению; способность находить и обосновывать решения в нестандартных ситуациях; способность формализовать и строить модели реально существующих процессов и явлений, применять методы обработки результатов исследований; способность формулировать новые цели и достигать новых результатов в соответствующей предметной области; способность применять математические методы для решения прикладных задач* [27; 28; 29].

Исключение математики из общего и высшего образования повлечет за собой односторонность и неэффективность в развития личности учащегося и подготовки будущего профессионала.

Таким образом, педагогический потенциал математических дисциплин позволяет создать условия для формирования у учащегося способности к адекватному восприятию окружающего мира и себя в нем.

1.4. Процесс обучения математике и его трудности

Математическая деятельность. Принципы обучения математике. Особенности обучения математике в школе. Неуспеваемость по математике.

Математическая деятельность учащегося. Процесс обучения математике заключается в освоении учащимися математической деятельности. На вопрос, что такое математическая деятельность, нет однозначного ответа.

Математическая деятельность видится как:

– интуиция и догадка (А. Пуанкаре);

– черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству (Р. Курант);

– правдоподобные рассуждения наряду с доказательствами (Д. Пойа);

– связь бессознательного и сознательного в творческой математической деятельности (Ж. Адамар);

– взаимосвязь логики и интуиции (А.Д. Александров, П.С. Александров, Я.С. Дубнов, Л.Д. Кудрявцев, А.А. Ляпунов и др.).

Наиболее общий подход к пониманию математической деятельности предложил А.А. Столяр, определяя ее как «мыслительную деятельность, протекающую по следующей схеме: математическая организация эмпирического материала, логическая организация математической деятельности, применение математической теории» [54, с. 109].

Процесс обучения математической деятельности заключается в том, что с помощью специально организованной деятельности под руководством педагога, каждый учащийся открывает для себя математические истины (то, что уже открыто в науке), логически организовывает добытый опытным путем математический материал, а затем применяет освоенный материал в различных конкретных ситуациях.

Важная педагогическая проблема состоит в определении целесообразного соотношения трех стадий математической деятельности на различных этапах обучения:

– накопление фактов с помощью общенаучных эмпирических методов (наблюдение, сравнение, анализ) и частных методов математики (вычисление, построение, измерение, моделирование);

– выдвижение гипотез с помощью гипотетико-дедуктивных методов (анализ, синтез, аналогия, неполная индукция, обобщение, абстрагирование, интуиция, конкретизация, дедукция);

– проверка истинности с помощью дедуктивных методов доказательств и опровержений (синтетический метод, аналитический метод, метод от противного, полная индукция, метод исчерпывающих проб, метод математической индукции, контрапозиция, приведение контрпримера) и специальных методов;

– построение теории с помощью аксиоматического метода;

– выход в практику с помощью математического моделирования.

В результате освоения математических дисциплин на уровне основной школы учащийся должен овладеть базовым понятийным аппаратом по основным разделам содержания математики, иметь представление об основных изучаемых понятиях (число, геометрическая фигура, уравнение, функция, вероятность и т.д.) как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать реальные процессы и явления.

Учащийся должен научиться работать с математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи с применением математической терминологии и символики, использовать различные языки математики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений.

Учащийся должен владеть опытом:

– использования приобретенного математического аппарата в практической деятельности и повседневной жизни;

– выполнения вычислений (иметь представления о числе и числовых системах, владеть навыками устных, письменных, инструментальных вычислений с действительными числами);

– преобразования математических выражений;

– решения уравнений и неравенств;

– оперирования системой функциональных понятий (функциональным языком и символикой, умением использовать функционально-графические представления для описания и анализа реальных зависимостей);

– оперирования геометрическими фигурами (умение использовать геометрический язык для описания предметов окружающего мира, сформированные пространственные представления и изобразительные умения, приобретение навыков геометрических построений, усвоение систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, умение измерять длины отрезков, величины углов, использовать формулы для нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур);

– применения математических методов решения задач (арифметический, алгебраический, геометрический и т.д.);

– построения и исследования математических моделей.

Принципы обучения математике. В методике обучения математике сформировались следующие принципы эффективного освоения учебной математической деятельности.

1. Принцип развивающего и воспитывающего обучения математике.
2. Принцип научности в обучении математике.
3. Принцип сознательности, активности и самостоятельности в обучении математике.
4. Принцип систематичности и последовательности в обучении математике.
5. Принцип доступности в обучении математике.
6. Принцип наглядности в обучении математике.

7. Принцип индивидуального подхода к учащимся в обучении математике.
8. Принцип прочности знаний в обучении математике.
9. Принцип всеобщности и непрерывности математического образования на всех ступенях.
10. Принцип преемственности и перспективности содержания образования, организационных форм и методов обучения.
11. Принцип дифференциации и индивидуализации математического образования.
12. Принцип гуманизации математического образования.
13. Принцип практической направленности обучения математике.
14. Принцип информатизации и компьютеризации обучения.

Перечисленные принципы обучения математике выступают как основной ориентир в деятельности педагога, как руководящие идеи, нормативные требования к организации и проведению процесса обучения математике.

Особенности обучения математике в школе заключаются в том, что математика является самым сложным предметом для многих учащихся, поэтому необходимо уделить пристальное внимание разработке авторских методик обучения математике. Для этого нужно учитывать особенности в проведении уроков по математике, особенности формирования математических понятий и умений, особенности методики обучения решению математических задач.

Обучение математике – есть непрерывная цепь базовых знаний, сотканная из математических понятий, их определений, свойств, признаков, и сформированная система математических умений выполнять определенные виды математических действий.

Для эффективного обучения необходимо личностно-ориентированное взаимодействие педагога и учащегося, потому, как только в процессе общения, установленного контакта и обоюдного желания возможно обучение математической деятельности.

Роль учителя при обучении математике невероятно значима, личность учителя оказывает на учащегося сильнейшее влияние. Сложность математики и практическая невозможность освоить самостоятельно математические дисциплины ставит учащегося в зависимое от педагога положение.

Таким образом, при обучении математике особую роль играют технологии педагогической поддержки учащихся, испытывающих трудности при изучении математики.

При формировании математических понятий, учитель опирается на особенности состава и строения ментального опыта учащегося, на выделенные когнитивные стили, на закономерности в поэтапном формировании умственных действий. Игнорирование психологических закономерностей в формировании математических понятий и умений приведет к формализму в обучении математике и слохастическому обучению.

В настоящей работе более подробно рассмотрены особенности методики обучения решению математических задач учащимися на основе применения рефлексивных стратегий, позволяющих преодолеть ряд трудностей в процессе обучения математике.

Неуспеваемость по математике. Рассмотрим одну из основных проблем математического образования – неуспеваемость учащихся по математическим дисциплинам.

Неуспеваемость – несоответствие учебных успехов учащегося требованиям учебной организации. Выделим эту проблему как ключевую, поскольку причины неуспеваемости охватывают целый комплекс психолого-педагогических и методических трудностей процесса обучения математике [40, с. 10].

Проблема неуспеваемости тесно связана с такой способностью учащегося как обучаемость, под которой понимают совокупность интеллектуальных свойств человека, от которых зависит продуктивность учебной деятельности.

Специалисты выделяют три группы факторов, влияющих на школьную неуспеваемость:

– нейропсихологические факторы (особенности морфогенеза, особенности функциогенеза);

– психологические факторы (уровень умственного развития, психологическая готовность к изучению предмета, индивидуально-психологические особенности);

– педагогические факторы (методическая система обучения в школе, эмоциональная среда в школе, личность учителя).

Анализ практики математического образования позволил конкретизировать психолого-педагогические и методические ***трудности, возникающие в процессе обучения*** математике, которые способствуют появлению феномена «неуспеваемости» учащихся.

Психолого-педагогические трудности у учащихся связаны с:

– особенностями мотивационной сферы учащихся (неправильное негативное отношение к математике, отсутствие познавательного интереса);

– недостатками в развитии познавательной сферы в области математики (интеллектуальная пассивность, познавательные барьеры, плохое усвоение математического учебного материала, непонимание учебного материала);

– недостаточным включением рефлексивных стратегий в учебную математическую деятельность (неумение настраивать себя на работу, неумение оценивать собственные интеллектуальные ресурсы, незнание своих познавательных особенностей, неумение преодолевать математическую тревожность, проявляющуюся как апатия, неуверенность скованность, беспомощность);

– несформированными общеучебными умениями и навыками (неумение работать с математической книгой, неумение задавать вопросы, неумение самостоятельно организовывать свою деятельность, недисциплинированность).

В последнее время принято говорить о падении мотивации к изучению математики на всех уровнях обучения. Следует иметь ввиду, что основной причиной сложившейся ситуации является непонимание или неприятие целей изучения математики большинством учащихся. Практико-ориентированность в обучении, направленная на вооружение конкретными умениями, которые учащиеся могут применить «тут же», выйдя за двери образовательного учреждения, приводит к тому, что учащиеся не осознают необходимость в изучении математики.

Практика работы с неуспевающими показывает, что у многих учащихся наблюдается «интеллектуальная пассивность», которая проявляется в нежелании или неумении думать, размышлять, анализировать, делать выводы, искать ошибки, находить истину, доказывать свою правоту.

Эта проблема тесно связана с проблемой познавательных затруднений при изучении математических дисциплин. При возникновении трудностей в процессе овладения математическими знаниями и умениями, учащийся остается «один на один с проблемой», что еще больше снижает его мотивацию к изучению математики.

Недостаточное включение рефлексивных умений проявляется в том, что учащиеся не могут определить свои наличные интеллектуальные ресурсы, не знают, что они знают, а что умеют, каким опытом владеют, не умеют полученный опыт запечатлевать в памяти, эмоциях и мышлении. Именно поэтому при решении математических задач, каждая задача им кажется новой, непонятной, неизвестной и трудной. Неумение определять собственный наличный уровень знаний и умений и стремление действовать по шаблону, доверяя «учебнику и товарищу» больше, чем самому себе, приводит к познавательным затруднениям при изучении математики.

Нередко именно низкий уровень саморегуляции, ее конкретные дефекты лежат в основе неуспеваемости, различных трудностей в математической деятельности [34, с. 130].

В реальной действительности при обучении математике наряду с психолого-педагогическими трудностями возникают

методические трудности обучения математике, связанные с:

– наличием пробелов в знаниях и умениях учащихся (несформированность основных математических понятий и умений, нет опыта решения разнообразных математических задач, сформированная привычка при решении задач действовать только по указаниям учителя);

– отбором содержания обучения в соответствии с общедидактическим принципами обучения (систематичность, последовательность, профессиональная направленность, доступность и т.д.);

– недостаточным количеством времени на индивидуализацию и дифференциацию обучения учащихся в соответствии с их познавательными способностями;

– оптимальным сочетанием традиционных и инновационных подходов к методике обучения разным математическим разделам;

– организацией самостоятельной работы учащихся по математике;

– оценкой результатов освоения математики.

Методические трудности обучения решения математических задач зачастую связаны с одним из двух факторов. Возможно, учащиеся не владеют обобщенным алгоритмом решения математических задач, т.е. их деятельность характеризуется:

– неумением записывать схематично условие задачи и работать с ним;

– неумением искать аналогии и закономерности в формулировках задачи и методах их решения;

– неумением соотносить условия задачи с известными теоретическими положениями (искать и пользоваться формулами, определениями, правилами, теоремами, которые связывают данные в задаче);

– неумением логично рассуждать;

– неумением искать и исправлять собственные ошибки;

– неумением работать с готовыми примерами задач с решениями, позволяющие «извлекать идеи типовых решений».

Вторым наиболее частым фактором, препятствующим эффективной методике обучения решения задач является наличие знаниевых пробелов по конкретной математической теме: неумение строить график функции, незнание формул тригонометрии, неумение применять формулы сокращенного умножения для преобразования тождественных выражений и т.д.

Третьим фактором являются недостаточно сформированные математические умения, необходимые для решения задач. Например, неумение выполнять арифметические действия с обыкновенными дробями будет служить причиной неуспеваемости учащегося по теме «Решение текстовых задач арифметическим способом».

Перечисленные трудности существенным образом влияют на процесс обучения математике и препятствуют эффективной реализации педагогического потенциала математики в развитии личности учащегося.

В зависимости от влияния перечисленных факторов, психолого-педагогических и методических трудностей выделяют разные типологии неуспевающих по математике. Приведем только две из них.

Н.И. Мурачковский выделяет три типа неуспевающих:

I тип характеризуется низким качеством мыслительной деятельности и положительным отношением к изучению математике.

II тип – высоким качеством мыслительной деятельности и отрицательным отношением к изучению математики.

III тип – низким качеством мыслительной деятельности и отрицательным (беспечным) отношением к учению вообще [40].

На основании типологии неуспевающих, представленных Л.С. Славиной [40], рассмотрим пять типов неуспевающих по математике:

I тип – школьники с неправильным отношением к изучению математике. Как правило, это учащиеся с негативным отношением к изучению математики, характеризующиеся отсутствием интереса к учебному предмету, сложностями в общении с учителем, эмоциональным дискомфортом при выполнении математических заданий.

II тип – дети, усваивающие учебный материал с трудом. Для этого типа характерен низкий уровень развития когнитивных способностей (внимание, память, мышление, речь, воображение) при занятиях математической деятельностью. Дети этого типа плохо воспринимают математические понятия, тратят много времени на формирование математических умений, плохо запоминают и воспроизводят математические формулы.

III тип – учащиеся, у которых не сформированы навыки и способы учебной работы. Учащиеся не умеют работать с математической книгой (с учебником, с задачником, со справочником), не знают обобщенного алгоритма решения математических задач.

IV тип – школьники, не умеющие трудится. Не знают способов организации самостоятельной работы по математике, сильно зависят от посторонней помощи. У детей этого типа наблюдается низкий уровень включенности рефлексивных стратегий в математическую деятельность.

V тип – школьники, у которых отсутствуют познавательные и учебные интересы в области изучения математики.

Очевидно, что представленные типологии являются неполными и «неуспевающий» школьник может иметь целый комплекс причин совей неуспеваемости.

Для решения проблемы неуспеваемости в рамках рефлексивного обучения математике в каждом конкретном случае необходимо выделить наиболее сильный фактор и выстраивать методику обучения математике с опорой на определенные типы.

1.5. Модель рефлексивного обучения математике

«Математика – это то, посредством чего люди управляют наукой и собой»
Н. А. Колмогоров

Характерные признаки рефлексивного обучения математике. Принципы рефлексивного обучения математике. Педагогические условия рефлексивного обучения математике. Методы рефлексивного обучения математике. Критерии эффективности рефлексивного обучения математике.

В предыдущих пунктах показано, что математическая деятельность обладает огромным потенциалом для гармоничного развития личности учащегося, однако на пути к этому стоят психолого-педагогические и методические трудности обучения математике.

Ошибки, которые учащиеся допускают на протяжении многих лет при изучении математики блокируют доверие к собственному разуму. Негативный опыт изучения математики и объективно низкий уровень знаний и математических умений многих учащихся создает препятствия для освоения математической науки.

Одним из путей повышения эффективности образовательного процесса является организация рефлексивного обучения математики.

Рефлексивное обучение математике определим, как обучение, главный акцент которого делается на умении учащегося осмысливать математическую деятельность, ее цели, структуру и результат.

Рефлексивное обучение, которое заключается в обучении обучающихся рефлексивным стратегиям, таким как сопоставление поступающей информации с уже существующей в ментальном опыте, подбор и итоговый выбор оптимальных для данной задачи стратегий мышления, планирование, мониторинг и оценка процесса мышления, будет способствовать эффективному обучению математике разных групп учащихся.

Внедрение обучения рефлексивным стратегиям в математическое образование позволит учащимся:

– четко разделять известное и неизвестное в решении математических задач;

– вербализировать собственные познавательные трудности при решении математических задач;

– выбирать оптимальные пути решения математической задачи на основании собственных метакогнитивных знаний;

– преодолевать познавательные затруднения при решении математических задач на основании собственных метакогнитивных знаний;

– оценивать эффективность собственного мышления, анализировать достигнутый результат при выполнении математических заданий.

Рефлексивное обучение математике, направленное на активизацию имеющихся знаний, их обобщение и систематизацию, применение знакомых математических методов в незнакомых ситуациях, ликвидацию познавательных пробелов на основе рефлексивных стратегий, позволит обогатить ментальный опыт учащихся.

Необходимость разработки рефлексивного обучения математике обуславливается отсутствием концептуальных основ и методических рекомендаций в теории и практике математического образования.

В работах В.И. Моросановой [47], А.В. Карпова [24; 25], А.К. Осницкого, О.А. Конопкина [34] показано, что психологическую основу самостоятельности в практической деятельности составляет сформированная система саморегуляции. Чем выше индивидуальная степень осознанного саморегулирования, тем легче и продуктивнее происходит познавательная деятельность. Чем лучше учащийся осознает свои интеллектуальные ресурсы в области математических знаний, тем лучше он знает характер собственных трудностей при изучении математики. Если учащийся знает пути преодоления познавательных затруднений, то легче происходит наращивание новых знаний и усвоение новых умений.

В предметно-ориентированном нормативном образовании, как говорит Г.П. Звенигородская, сложилась устойчивая тенденция отбирать личную ответственность у учащегося, а вместе с ней и личный выбор [18, с. 32]. Другими словами, учащийся привык, что учитель математики должен ему все объяснить, и если учащемуся что-то не понятно, то он обвиняет в этом учителя. Приходя в высшее учебное заведение учащийся так же пассивно ждет от преподавателей математики подробного разъяснения темы, не желая брать ответственность за результаты свой учебной деятельности ввиду сложности математики. Однако в процессе развития личности учащегося необходимо создавать условия для развития самостоятельности мышления в принятии решений. Учащийся должен уметь строить собственные процессы формирования умений и управлять ими, сконцентрировать в себе одном всю структуру учебной математической деятельности. Учащийся должен знать, что происходит у него в сознании, когда он думает над своим познанием и его особенностями.

Рефлексивному обучению математике характерны следующие черты:

1. Границы обучающего воздействия задаются детерминированным уровнем развития рефлексивных функций субъекта.

Каждый учащийся «заполнен» своим ментальным опытом, который и определяет характер его индивидуальной активности в конкретных ситуациях. Состав и строение ментального опыта у каждого учащегося различны, каждый имеет свой «диапазон» наращивания интеллектуальных сил [61].

Регуляторный процесс совершается при активном участии основных когнитивных процессов (восприятии, представлений, мнемических процессов, мышления и др.), интегральных (целеобразование, антиципация, принятие решения, прогнозирование, планирование, контроль, самоконтроль) и метакогнитвных процессов (метавосприятие, метапамять, метамышление и др.) с опорой на свойства личности (темперамент, характер).

2. Процесс обучения математике зависит от осознанной включенности учащегося в математическую деятельность.

Принцип сознательности, активности и самостоятельности учащегося является одним из главных принципов в обучении математике. Учащийся должен понимать зачем он изучает математику, что именно он изучает в математике, какие он испытывает эмоции при изучении математики, как он справляется с изучением математики самостоятельно, в какой мере ему нужна помощь педагога и т.д. Обучение математике будет эффективным только в том случае, когда учащийся принимает сознательное и активное участие в процессе овладения математикой.

3. При использовании рефлексивных стратегий особое значение имеет последовательность и системность обучающих воздействий.

Для обеспечения условий реализации принципов обучения математике педагог использует различные формы, методы и средства обучения, в этом ему помогают остальные принципы. Так, обеспечение наглядности в обучении математике позволит учащимся «увидеть», «ощутить» абстрактные математические объекты. Изучение математических понятий последовательно и в системе позволит сформировать целостные психологические конструкты, проявляющиеся в сформированных математических умениях. Последовательность в обучении математике означает, что обучение осуществляется по следующим правилам: от простого к сложному, от известного к неизвестному, от легкого к трудному, от представления к понятию, от знания к умению, от умения к навыку.

4. Рефлексия выполняет регулирующую функцию, позволяя сознательно управлять мыслительными приемами (сравнение, индукции, анализ и синтез, конкретизация, классификация) для решения математических задач.

5. Наличие отрицательных переживаний, связанных с математикой, значительно снижает активность учащихся на занятиях по математике, поэтому проводится осознанная саморегуляция психологических состояний учащегося.

Действия процесса осознанной саморегуляции позволяют учащемуся при решении математических задач осуществлять самостоятельную интеллектуальную процедуру в системе его учения, а именно:

- ✓ выделение познавательной задачи;
- ✓ подбор, определение и применение адекватных способов действий, ведущих к решению задачи;
- ✓ выполнение операций контроля над тем, решается ли постановленная цель [6, с. 32].

6. В процессе рефлексивного обучения происходит стимулирование интеллектуального развития учащегося, поскольку исключено пассивное освоение математики.

Рефлексивное обучение математике позволяет учащемуся осознанного продвигаться по пути обучения. В процессе обучения математике происходит развитие когнитивных способностей: увеличение объема произвольного внимания, развитие логического мышления, расширение объема памяти, положительная динамика в развитии грамотной речи.

На основании вышеперечисленного **основными принципами рефлексивного обучения математике** являются: принцип системности и логической последовательности изложения материала, принцип вовлеченности учащегося в учебную деятельность, принцип доступности при достаточном уровне трудности, принцип продуктивности, принцип эмоциональной насыщенности.

Педагогические условия рефлексивного обучения математике.

Условие первое. Обучение учащихся математической деятельности осуществляется через развитие обобщенного умения решать задачи. Необходимо научить учащихся видеть то общее, что есть в математических задачах и методах их решения.

Условие второе. Преодоление познавательных затруднений учащихся при изучении математики осуществляется с помощью использования рефлексивных стратегий. Необходимо научить учащихся прибегать к помощи собственного разума. Важно развивать у учащегося доверие к собственному разуму, привычку обращаться к самому себе, снизить зависимость от педагога или товарищей.

Условие третье. При обучении математике учащийся осуществляет управление собственными интеллектуальными ресурсами.

Учащийся концентрирует свое внимание на проблеме, наблюдает, что происходит с его пониманием, отслеживает когнитивные процессы, осознает свою математическую деятельность. Учащийся учится доверять своему разуму, опираясь на правила, теоремы, алгоритмы, которые в математике приняты за истины.

Условие четвёртое. В процессе рефлексивного обучения математике педагог оказывает педагогическую поддержку учащимся на всех этапах обучения.

Преподаватель не ведет за собой, не руководит деятельностью учащихся и не берет ответственность за результаты этой деятельности на себя. Преподаватель является помощником, который помогает преодолеть затруднения, подтвердить правильность выбранного решения, подсказать пути дальнейшего продвижения мысли.

Роль педагога как помощника, консультанта, означает так же отказ от категорических суждений и личностных оценок.

Условие пятое. Рефлексивное обучение математике предполагает соотнесение полученных результатов и методов их получения не только с принятыми нормами и эталонами, но и с личными достижениями учащегося. Требование минимальной оценочности со стороны педагога позволит учащемуся самому выбирать критерии оценки собственной деятельности и осознавать пути своего движения.

Методы рефлексивного обучения математике. Выбор основных приемов и методов рефлексивного обучения математике основан на психологически-ориентированных моделях обучения. Как нужно действовать, чтобы наиболее рациональным и оптимальным путем достигнуть желаемого образовательного результата? Во многом, это зависит от выбора методов обучения. Методы обучения – одна из наиболее важных категорий в педагогике, и в самом общем смысле обозначает способы взаимосвязанной деятельности преподавателя и учащихся, направленные на овладение знаниями, умениями и навыками, на их воспитание и развитие в процессе обучения.

Методы обучения в настоящее время представлены в различных видах классификаций с учетом их практических функций и возможностей организации обучающего взаимодействия педагогов и обучающихся. Цель обучения математическим дисциплинам подразумевает активизацию рефлексивных механизмов деятельности, поэтому в рефлексивном обучении основным фактором выбора методов обучения служит задача организации продуктивной деятельности учащегося.

В связи с приведенными рассуждениями, рассмотрим классификацию методов обучения, представленную Ю.К. Бабанским. Так, он утверждает, что совокупность методов будет относительно целостной, если в нее будут входить, по крайней мере, три группы методов: методы организации и самоорганизации учебно-познавательной деятельности, методы стимулирования и мотивации учения, методы контроля и самоконтроля эффективности обучения [1]. Каждая группа методов содержит подгруппы методов и приемы деятельности педагога и учащегося.

Методы стимулирования и мотивации учения, направленные на формирование интереса к математике как средству обогащения своего интеллектуального и личностностного потенциалов, состоят из учебных дискуссий, из демонстраций необходимости применения математического аппарата, из шутливых задач, из парадоксов и софизмов, из математических игр.

Методы формирования ответственности за процесс собственного обучения включают методы учебного поощрения, порицания, предъявления учебных требований. Учащийся должен четко понимать, что от него требуется.

Методы организации и осуществления учебных действий и операций можно классифицировать, определяя способы деятельности преподавателя и обучающегося. Обьяснительно-иллюстративный метод преподавания (рассказ, беседа, лекция, инструктаж) сочетается с деятельностью учащегося, которая может быть выполнена под руководством преподавателя, с частичной консультацией преподавателя, самостоятельно.

Методы обучения обобщенному алгоритму решения математических задач – это, прежде всего, демонстрация, действия по алгоритму, самостоятельная работа с книгой, упражнения. Большую роль в обучении обобщенному алгоритму в решении задач играют вопросно-ответные процедуры.

Для активизации рефлексивных механизмов применяются методы эмоционального стимулирования, вопросно-ответные процедуры, объяснение, практическая тренировка.

В рефлексивном обучении математике создаются ситуации успеха, в которых учащийся чувствует силу своего разума.

Основным методом рефлексивного обучения математике является стимулирование учащихся использовать рефлексивные стратегии в решении математических задач.

Под рефлексивной стратегией решения математических задач будем понимать специально организованный процесс, направленный на формирование личностных новообразований (рефлексии и личностно-смысловой сферы) и развития личностных образований (мышления, воображения, памяти,

внимания, самостоятельности и др.) на основе усвоения определенных знаний, умений и навыков математической учебной деятельности.

При обучении решению математических задач используется иерархия методов: репродуктивные (учащий воспроизводит решение, предложенное педагогом, или действует строго по образцу), продуктивные (учащийся самостоятельно находит решение задачи, пользуясь различными средствами, в том числе и консультацией педагога), творческие (учащиеся выполняют нестандартные задания).

Критериями эффективности рефлексивного обучения математике будут выступать показатели динамики развития рефлексивных умений при решении математических задач.

Критерий № 1. Умение обнаруживать знания о своем незнании в соответствии с выбранными нормами и эталонами.

Учащийся знает свой интеллектуальный потенциал, может определить границы своего незнания.

Критерий № 2. Умение создавать программу или план выхода из ситуации незнания, включая обращение за помощью к учителю с конкретными вопросами.

Учащийся знает обобщенный алгоритм решения математических задач, специальные методы решения разных математических задач. Учащийся определяет необходимость применения математического метода к решению предложенной задачи, обосновывает свою точку зрения на ситуацию, содержащую количественные данные, опираясь на фундаментальные математические идеи. Учащийся может определить объем необходимой помощи.

Критерий № 3. Умение реализовывать составленный план.

Учащийся знает необходимые для каждой конкретной ситуации основные математические понятия, теоремы и методы. Учащийся владеет высоким уровнем математической культуры.

Критерий № 4. Умение осуществлять проверку правильности выполненных действий и зафиксировать полученный результат.

Учащийся может провести анализ проведенного решения, оценить его эффективность, сделать выводы из допущенных ошибок.

На рис. 1.5.1 представлена модель рефлексивного обучения математике.

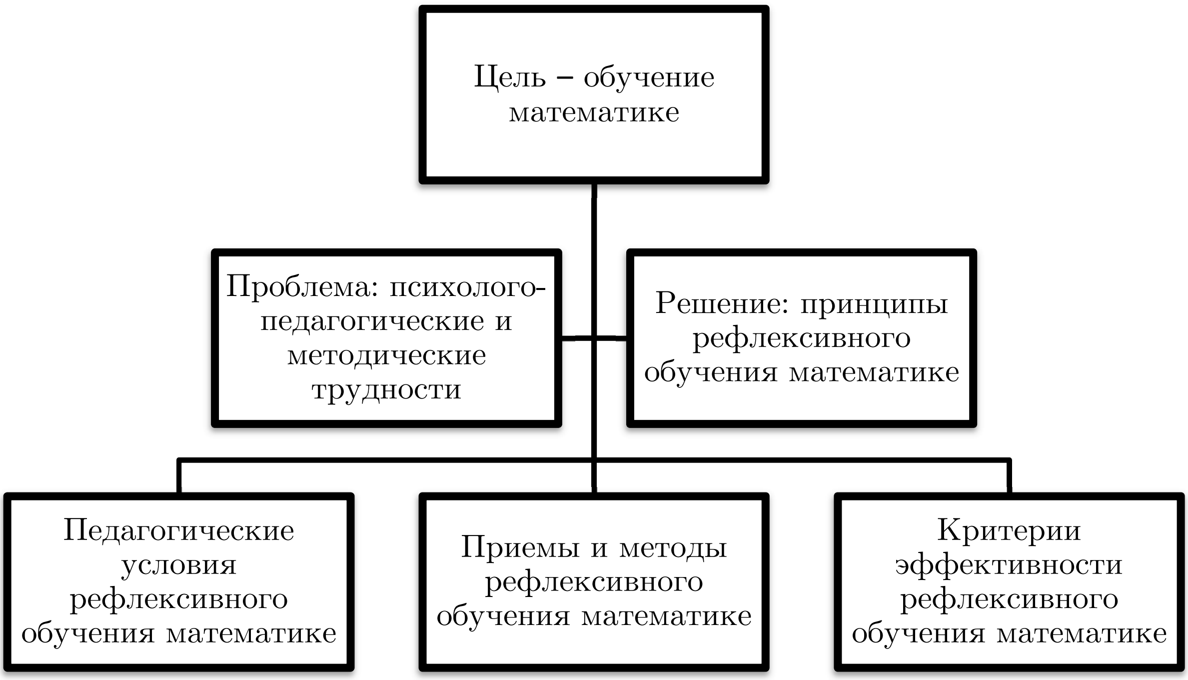


Рис.1.5.1 Модель рефлексивного обучения математике

Выбор модели рефлексивного обучения математике позволит гарантировать более благоприятные условия для личностного и интеллектуального развития учащихся, чем те, которые обеспечивает традиционная система обучения математике. Рефлексивное обучение математике гарантирует развитие уверенности в силах и знаниях учащихся, освоивших рефлексивные стратегии. Предложенная модель позволит решить проблему самостоятельности мышления учащихся при обучении математике.

РАЗДЕЛ 2. ЗАДАЧНЫЙ ПОДХОД КАК МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЕ ОСНОВАНИЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Задачный подход в образовании представляет собой метод реализации содержания образования, основанный на применении системы разнообразных задач и их решений с целью формирования умений и навыков учащихся выполнять определенные виды деятельности.

Исторически, решение задач было направлено на развитие умственных способностей учащихся, обогащение их интеллектуального потенциала, расширение мировоззренческой позиции учащихся.

Задачный подход включает в себя такие понятия как «задача», «математическая задача», «решение задачи», «классификация задач», «уровни задач», «методы решения задач», «методика обучения решению задач».

Рассмотрим эти понятия более подробно.

2.1. Понятие «математическая задача»

Задача. Математическая задача. Что значить решить математическую задачу? Умения учащегося решать математическую задачу.

Общее психологическое определение задачи приводится в теории деятельности А.Н. Леонтьевым: «задача – это цель, данная в определённых условиях» [2, с. 249]. Ряд психологов (В.В. Давыдов, А.В. Запорожец, А.М. Матюшкин, А.В. Петровский и др.) приводят такое определение задачи: «задача (она же проблема) – цель деятельности, данная в определенных условиях и требующая для своего достижения использования адекватных этим условиям средств» [17, с. 106.]

Основой содержания задачи у Э.Ф. Эсаулова выступает проблема, т.е. задача является продуктом некоторого анализа лежащей в ее основе проблемы [68, с. 62].

Одним из наиболее разработанным и детально проанализированным определением задачи является определение, данное Г.А. Баллом.

Г.А. Балл объединил в определении «задача» три основных аспекта:

– задача есть цель деятельности, определенная ситуация, которая требует от субъекта некоторого действия;

– задача есть ситуация, требующая от субъекта некоторого действия, направленного на нахождение неизвестного на основании его связей с известным;

– задача есть ситуация, требующая от субъекта некоторого действия, направленного на нахождение неизвестного на основании его связей с известным, когда субъект не обладает способом этого действия [2].

Анализ психологических подходов к понятию задачи, показывает, что как психологический объект задача представляет собой:

– условие, обеспечивающее усвоение теоретических положений (Г.А. Балл);

– как средство формирования и развития мышления (Л.В. Занков, О.К. Тихомиров);

– как форма усвоения знаний (З.И. Калмыкова, А.Ф. Есаулов);

– как результат усвоения знаний и показатель их эффективности (Н.А. Менчинская).

Любая задача является элементом учебной деятельности и ее основными компонентами являются содержание и методы решения.

Интересен подход к определению задачи Д. Пойа. Он отмечает, что «задача предполагает необходимость сознательного использования, соответствующего средства для достижения ясно видимой, но непосредственно недоступной цели» [50, с. 143].

Л.М. Фридман понимает под математической задачей «требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче» [58, с. 6].

В.М. Брадис говорит так: «математической задачей следует называть любой математический вопрос, для ответа на который, недостаточно простого воспроизведения чего-либо из пройденного курса: какого-нибудь определения, текста или доказательства теоремы, текста аксиомы или правила» [7].

Согласно определению В.И. Крупича, «задача есть замкнутая система $S = \{A, C, R, D, B\}$:

A – *условие задачи*, то есть данные и отношения между ними;

B – *требование задачи*, то есть искомые и отношения между ними;

R – *основные отношения* между данными и искомыми;

D – *способ*, определяющий процесс решения задачи, то есть способ действия по преобразованию условия задачи для нахождения искомого;

C – *базис решения задачи*, то есть теоретические основы, необходимые для обоснования решения» [37].

Среди исследований, посвященных вопросам изучения математических задач, прежде всего следует выделить работы Ю.М. Колягина. В его работах выявлены роль и место математических задач в процессе формирования математической культуры, рассмотрены основные функции задач, охарактеризованы основные этапы процесса решения задач, разработана система требований к использованию задач и комплекс требований к системе задач школьного курса математики.

Ю.М. Колягин подходит к характеристике задачи, используя понятие системы, при этом он определяет ее как нечто целое, абстрактное и реальное, состоящее из взаимозависимых частей, являющихся компонентами некоторой системы, их свойств и отношений между ними. Он считает математическими все задачи, в которых переход от начального состояния к конечному осуществляется математическими средствами.

Вслед за Ю.М. Колягиным под математической задачей будем понимать совокупность компонентов, характеризующих:

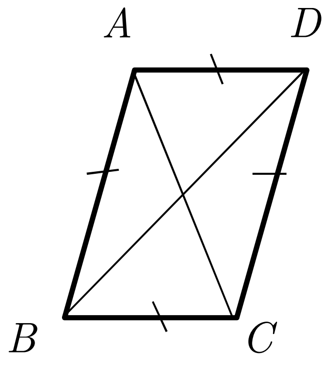
– *начальное состояние,* характеризует условие конкретной задачи;

– *конечное состояние,* характеризует частный результат решения задачи;

– *решение задачи,* характеризует способ преобразования условия для получения, требуемого результата математическими методами;

– *базис решения,* характеризует объем теоретических или практических знаний из математики, необходимых для решения задачи [32, с. 52].

Пример математической задачи. Сторона ромба равна $2\sqrt{5}$, одна диагональ равна 4. Найдите площадь ромба.

Начальное состояние	Ромб со стороной $2\sqrt{5}$ и диагональю равной 4.
Конечное состояние	Площадь ромба.
Базис решения	Свойства ромба, формула для вычисления площади ромба, теорема Пифагора.
Решение задачи  	1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны. 2. $S_{ромба} = \frac{1}{2} d_1 d_2$. 3. Известна длина одной диагонали $d_1 = 4$, следовательно, неизвестно только d_2. 4. Рассмотрим $\triangle AOB$: $\angle AOB = 90^\circ \to OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} =$ $= \sqrt{20-4} = 4, \to d_2 = 2 \cdot OB = 8.$ 5. $S_{ромба} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$ *кв. ед.* Ответ: $S_{ромба} = 16$ *кв. ед.*

Основу задачного подхода составляет ***процесс решения задачи***, под которым вслед за Л.М. Фридманом будем понимать ***«нахождение такой последовательности общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче, – ее ответ»*** [58, с. 25].

Как составляется математическая задача?

Во-первых, при составлении задач необходимо помнить, что любая задача должна быть грамотно сформулированной и литературно оформленной, т.е. сформулированное предложение имеет смысл, условие, заключение и результат решения непротиворечивы и число элементов в условии необходимо и достаточно для того, чтобы задача имела решение.

Во-вторых, при работе с математической задачей необходимо, наряду со всем вышеперечисленным различать три элемента: сюжетную сторону, числовые данные и математические зависимости и действия, посредством которых решается задача.

Учебные математические задачи являются эффективным средством обучения математике, реализующим ее образовательное, практическое и воспитательное значение.

При обучении теоретическим знаниям задачи способствуют мотивации введения понятий, выявлению их существенных свойств, усвоению математической символики и терминологии, раскрывают взаимосвязи одного понятия с другими.

В результате рефлексивного обучения математике, учащийся при решении математических задач будет владеть системой следующих умений.

Умение 1: записывать схематично условие задачи и работать с ним. Это значит: по условию задачи определять, какие элементы даны, а какие требуется найти; умение выделять главные (существенные) переменные, отличать их от второстепенных переменных; умение видеть в условии задачи комплекс взаимосвязанных величин, уметь определять тип и вид задачи, относить ее к классу сложных, трудных, проблемных задач.

Умение 2: искать аналогии и закономерности и применять эти знания для решения задач. Это значит: искать сходство в отношении приемов и методов решения задач; на основании этого выделять общее, подводить под понятие; выделять ключевые задачи, класс схожих задач по условию или по методам решения.

Умение 3: соотносить условия задачи с известными теоретическими положениями. Это значит: искать формулы, определения, правила, теоремы, связывающие данные в задаче; развертывать свернутые алгоритмы в пошаговые программы; подбирать теоретические сведения, необходимые для конкретной задачи.

Умение 4: логично рассуждать – то есть в соответствии с законами логики. Это значит: уметь решение задачи представлять последовательно, без противоречий, опираясь на данные задачи и верные теоретические положения.

Умение 5: проигрывать разные варианты решений. Это значит: искать разные варианты решений, сравнивать их, выбирать достоинства и недостатки каждого; осуществлять математически грамотное и верное решение задачи.

Умение 6: делать выводы, т.е. соотносить условие задания с полученными результатами. Фиксировать полученный опыт решения задачи у себя в сознании.

Решение задач хорошо служит достижению всех целей, которые ставят перед обучением математике. Именно поэтому для решения задач используется половина учебного времени уроков математики.

2.2. Виды математических задач

Классификации математических задач. Принятая типология математических задач. Примеры разных типов задач.

В литературе математические задачи классифицируют по разным основаниям: предмету, требованию, методу решения, сложности, характеру умственной деятельности при решении, форме предъявления условия, дидактическим функциями, реализуемым в процессе обучения и т.д.

Так, например, Л.М. Фридман указывает на следующие наиболее распространенные типы задач: задачи, решаемые составлением уравнения, системы уравнений (или неравенств); задачи на доказательство; задачи на тождественные преобразования (на построение) [32, с. 58].

А.А. Столяр, говоря о типологии математических задач, распределил их по следующим разделам:

– задачи, решаемые арифметическими средствами;

– задачи, решаемые геометрическими средствами;

– задачи, решаемые средствами алгебры и анализа [54, с. 183–184].

Ю.М. Колягин, опираясь на предложенное им определение математической задачи как системы из четырех компонентов, предлагает типологию проводить по количеству неизвестных компонентов.

Первый тип он называет *«обучающими заданиями»*, когда неизвестен конечный результат. Например, «Сложить дроби $0,25+1,25$» или «Решить неравенство $2x+4 \geq 0$».

Задачи второго типа – *«поисковые задачи»* – чаще всего встречаются на математических олимпиадах, когда четко определено условие, четко определена цель задачи, но неизвестно не только решение, но и тот раздел теории – базис, на котором может быть основано это решение [32, с. 61].

Задачи третьего типа Ю.М. Колягин называет «проблемными», когда известна лишь цель задачи, условия и средства решения определяет сам учащийся.

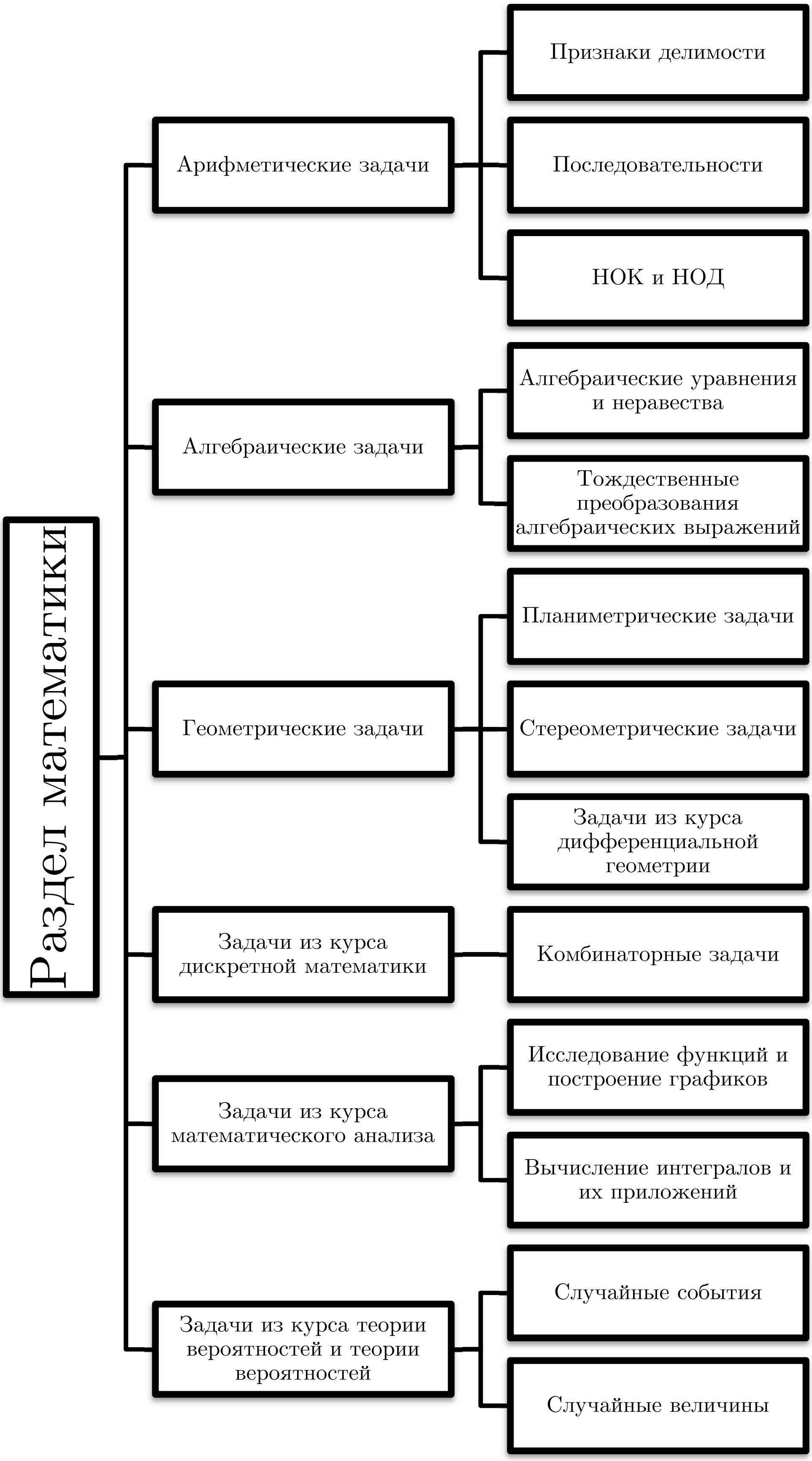


Рис 2.2.1. Задачи, классифицируемые по разделу математики

Рис. 2.2.2. Задачи, классифицируемые по требованию в условии задачи

Задачи на подготовку к изучению нового материала

- Мотивационные задачи
- Подводящие задачи
- Задачи на актуализацию знаний

Задачи на усвоение новых знаний

- Устные задачи
- Задачи "на готовых чертежах"

Задачи на формирование умений и навыков

- Задачи - упражения
- Задачи - тренажеры

Задачи на обобщение и систематизацию

- Задачи - проблемы
- Комбинированные задачи

Прикладные задачи

- Исследовательские задачи
- Практико-ориентированные задачи
- Тематические задачи (экономические, химические, физические и т.д.)

Контрольные задачи

Рис. 2.2.3. Задачи, классифицируемые по дидактическим функциям

В настоящей работе будем рассматривать три типологии математических задач, выделенные по структуре математической задачи, по методу ее решения (см. пункт 2.4) и по ее дидактическому назначению (см. рис. 2.2.3).

По структуре математические задачи будем классифицировать по разделу математики, в котором изучается задача (см. рис. 2.2.1), по требованию в условии задачи (см. рис. 2.2.2), по степени проблемности.

По разделу математики, в котором изучаются методы решения задачи, математические задачи делятся на **предметные задачи**: арифметические задачи, алгебраические задачи, комбинаторные задачи, задачи по теории вероятностей, планиметрические задачи, стереометрические задачи, задачи из курса математического анализа, задачи из курса математической логики и т.д.

При встрече с новой задачей, учащемуся рекомендуется определить, к какому разделу математики относится задача.

Пример № 2.2.1 задачи из раздела «Теория чисел».

Сравните: 65^{23} и 255^{17}.

Решение.

$$65^{23} > 64^{23}=(2^6)^{23}=2^{138}.$$

$$255^{17} < 256^{17}=(2^8)^{17}=(2^{136}).$$

$$\text{Так как } 65^{23} > 2^{138},\ 2^{138} > 2^{136},\ \text{а } 2^{136}>255^{17},$$

$$\text{то } 65^{23} > 255^{17}.$$

Пример № 2.2.2 арифметической задачи. Когда Ваню спросили, сколько ему лет, он подумал и сказал: «Я втрое моложе папы, но зато втрое старше Сережи». Тут подбежал маленький Серёжа и сообщил, что папа старше его на 40 лет. Сколько лет Ване?

Решение. Рассуждаем следующим образом. Папа в три раза старше Вани, который в три раза старше Сережи, следовательно, папа в девять раз старше Сережи. Другими словами, папа старше Сережи на восемь возрастов, что составляет 40 лет. Таким образом, Сереже 5 лет, а Вани – 15.

Пример № 2.2.3 комбинаторной задачи. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три строительные фирмы, куда берут только юношей, два салона красоты, куда приглашаются только девушки и две торговые фирмы, куда требуются и юноши, и девушки?

Решение.

1. Задано два множества рабочих мест:

– для девушек $X_1 = \{2$ салона красоты, 2 торговые фирмы$\}$, n_1=4;

– для юношей $X_2 = \{3$ строит. фирмы, 2 торговые фирмы$\}$, n_2=5.

2. Задача сложная, т.к. задано два множества. Сформулируем простые задачи и охарактеризуем выборку в каждом случае.

3. Сколькими способами можно устроить на работу двух девушек?

Выборка: из четырех мест нужно выбрать два, выборка упорядоченная, с повторением (т.к. важно какая девушек на какую работу устроится): n_1=4, m=2;

4. Сколькими способами можно устроить на работу трех юношей?

Выборка: из пяти мест нужно выбрать три: выборка упорядоченная, с повторением (т.к. важно какой юноша на какую работу устроится): $n_2=5,\ m=3$;

Характер выборки говорит о размещении с повторением:

$$\tilde{A}_n^m = n^m: \begin{array}{l} \tilde{A}_{n_1}^m = n^m = 4^2 = 16, \\ \tilde{A}_{n_2}^m = n^m = 5^3 = 125. \end{array}$$

5. По условию задачи устроить надо «И» юношей, «И» девушек, поэтому используем принцип умножения: $16 \cdot 125 = 2000$.

6. Ответ: существует 2000 способов устроить пять человек на рабочие места.

Пример № 2.2.4 стереометрической задачи. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M

стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 8. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

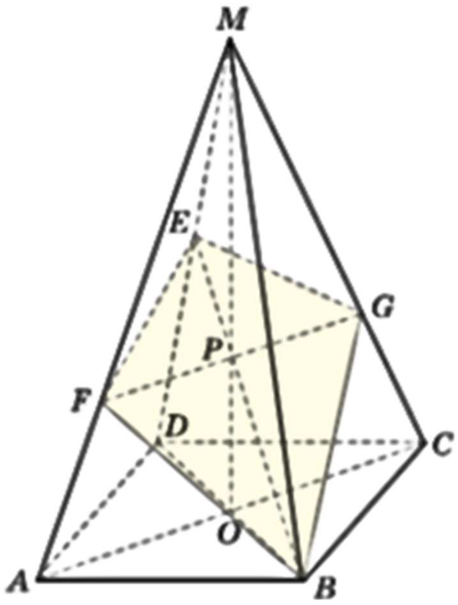


Рис. 2.2.4

1. Пусть точка E – середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP{:}PO=2{:}1$, где O – центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G – ребру MC), откуда

$MF{:}FA=MG{:}GC=MP{:}PO=2{:}1$,

$$FG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3} = 2\sqrt{2}.$$

2. Четырехугольник $BFEG$ – искомое сечение. Отрезок BE – медиана треугольника MBD, значит, по формуле:

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{36+128-64}}{2} = 5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярно прямой AC, то прямая BE перпендикулярная прямой AC, а значит, и прямой FG. Площадь сечения $S_{BFEG} = \dfrac{BE\cdot FG}{2} = \dfrac{5\cdot 2\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Пример № 2.2.5 задачи из курса математического анализа. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

Решение. Предел является неопределённостью типа $\infty-\infty$, домножим и разделим на сопряженное выражение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\left(\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+\frac{n}{n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Пример № 2.2.6 задачи из аналитической геометрии. Найти точку, симметричную точке *P (1, -1, 1)* относительно плоскости $2x-y+z+2=0$.

Решение. Указанием на то, что предложенная задача относится к разделу аналитической геометрии, является то, что плоскость задана уравнением. Идея решения задачи состоит в нахождении точки пересечения плоскости и прямой, проходящей через точку P, перпендикулярно плоскости.

Для решения задачи необходимо обратиться к теории взаимного расположения прямой и плоскости, а именно – уравнению прямой, условию коллинеарности вектора нормали плоскости и направляющего вектора прямой, с применением формулы для нахождения середины отрезка.

Пример № 2.2.7 задачи из теории вероятностей. Для сдачи зачета студентам необходимо подготовить *30* вопросов. Из *25* студентов *10* подготовили ответы на все вопросы, *8* – на *25* вопросов, *5* – на *20* вопросов и двое – на *15.* Вызванный наудачу студент ответил на поставленный ему вопрос. Найти вероятность того, что этот студент подготовил все вопросы.

Решение.

1. Испытание: студент отвечает на вопрос.

Событие A: студент ответил на поставленный вопрос.

Гипотезы:

H_1 – студент подготовил все вопросы, $P(H_1) = \frac{2}{5}$,

H_2 – студент подготовил 25 вопросов, $P(H_2) = \frac{8}{25}$,

H_3 – студент подготовил 20 вопросов, $P(H_3) = \frac{1}{5}$.

H_4 – студент подготовил 15 вопросов, $P(H_4) = \frac{2}{25}$.

2. Найдем условные вероятности:

$P\left(A /_{H_1}\right) = 1$, $P\left(A /_{H_2}\right) = \frac{5}{6}$, $P\left(A /_{H_3}\right) = \frac{2}{3}$, $P\left(A /_{H_4}\right) = \frac{1}{2}$.

3. По формуле полной вероятности найдем вероятность события А:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P\left(A /_{H_1}\right) + P(H_2) \cdot P\left(A /_{H_2}\right) + P(H_3) \cdot P\left(A /_{H_3}\right) +$$

$$+P(H_4) \cdot P\left(A /_{H_4}\right) = \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{8}{25} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{25}.$$

4. По формуле Байеса:

$$P\left(H_1 /_{A}\right) = \frac{P(H_1) \cdot P\left(A /_{H_1}\right)}{P(A)} = \left(\frac{2}{5} \cdot 1\right) : \left(\frac{21}{25}\right) = \frac{10}{21}.$$

Ответ: вероятность равна $\frac{10}{21}$.

В приведенных выше семи примерах на то, что задача принадлежит к определенному разделу математики указывает объект, заданный в математической задаче. Так, в первой задаче рассматривалось число в натуральной степени, в третьей задаче рассматривались всевозможные комбинации элементов множества, удовлетворяющие определенным условиям, в четвертой задаче рассматривалась пирамида, в пятой задаче требовалось найти предел последовательности. Таким образом, распознавание вида задачи в зависимости от математического объекта, изучаемого в конкретном математическом разделе, позволит в дальнейшем сузить область поиска решения задачи.

По характеру требования в условии задачи Л.М. Фридман математические задачи подразделяет на задачи на вычисление или нахождение, на доказательство или объяснение, на построение или преобразование.

Дадим более подробную типологию задач, выделенную по характеру требования (см. рис. 2.2.2), которые наиболее часто встречаются в учебных математических задачах:

– задачи на вычисление (вычислить);

– задачи на тождественные преобразования (упростить);

– задачи на решение уравнения или неравенства (найти решения уравнения или неравенства);

– задачи на исследование функции и построение графика функции (исследовать функции и построить ее график);

– задачи на доказательство математических утверждений (доказать);

– задачи на построение нового математического объекта (построить);

– задачи на решение текстовых задач;

– задачи на нахождение геометрических величин (угол, длину, площадь, объем).

Пример № 2.2.8 задачи на тождественные преобразования. Упростить $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Пример № 2.2.9 задачи на решение уравнения.

Решить уравнение $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2$.

Решение.

1. Сделаем замену переменных и введем два новых параметра:

$$z=\sqrt[4]{1-x}\quad (x\le 1,\ z\ge 0),$$
$$t=\sqrt[4]{15+x}\quad (x\ge -15,\ t\ge 0).$$

2. Составим систему уравнений относительно новых параметров:

$$\left.\begin{aligned}1-x&=z^4\\15+x&=t^4\end{aligned}\right\}\to 16=z^4+t^4,$$
$$\begin{cases}z+t=2,\\z^4+t^4=16.\end{cases}$$

3. Решим систему методом подстановки:

$$\begin{cases} z = 2 - t, \\ (2 - t)^4 + t^4 = 16. \end{cases}$$

4. Решим последнее уравнение $(2 - t)^4 + t^4 = 16$.

5. Используем разложение в Бином Ньютона:

$$(2 - t)^4 = t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16.$$

6. Получим уравнение четвертой степени:

$$2\,t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 = 16.$$

7. Найдём корни полученного уравнения:

$$2t(\,t^3 - 4t^2 + 12t - 16) = 0.$$

8. Уравнение имеет два действительных корня:

$$t_1 = 0,\ t_2 = 2.$$

9. Найдем второй параметр:

$$t_1 = 0 \ \rightarrow z_1 = 2,$$
$$t_2 = 2 \ \rightarrow \ z_2 = 0.$$

10. Вернемся к исходным переменным:

$$\sqrt[4]{15 + x} = 0 \ \rightarrow \ x = -15,$$
$$\sqrt[4]{15 + x} = 2 \ \rightarrow \ x = 1,$$
$$\sqrt[4]{1 - x} = 0 \ \rightarrow \ x = 1,$$
$$\sqrt[4]{1 - x} = 2 \ \rightarrow \ x = -15.$$

11. Ответ: $x = 1$, $x = -15$.

Пример № 2.2.10 задач на исследование функции и построение графика функции. Построить график функции $|y| + |x| = 4$.

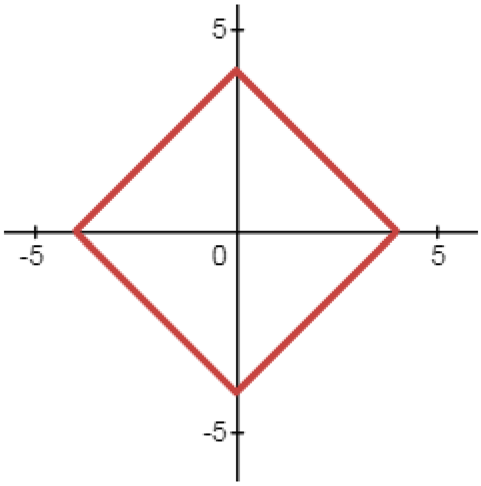


Рис. 2.2.5

Решение.

1. Построим график функции $y + x = 4$.

2. Отобразим отрезок прямой, заключенный в первой четверти между точками *A (0, 4)* и *B (4, 0)*, относительно оси *OX* и оси *OY*.

Пример № 2.2.11. Найти все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 2x - 1 + |x - a|$ больше 2.

Пример № 2.2.12 задачи на доказательство математических утверждений. Докажите, что если $a \geq 0, b \geq 0, \text{то } \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Решение.

1. Если $a = b = 0$, то получаем верное равенство.
2. Рассмотрим случай, когда $a > 0, b > 0$.

Предположим противное: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

3. Проведем ряд тождественных преобразований.

Обе части неотрицательны, возведем неравенство в квадрат:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Перенесем дробь из правой части неравенства в левую и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{a^2+b^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-a^2+2ab-b^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(a-b)^2}{4} \geq 0.$$

4. Как видно при $a > 0, b > 0$ неравенство не выполняется, следовательно, предположение было неверное.

5. Ответ: Если $a \geq 0, b \geq 0, \text{то } \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ справедливо.

Пример № 2.2.13 задачи на доказательство математических предложений. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм – ромб.

Решение.

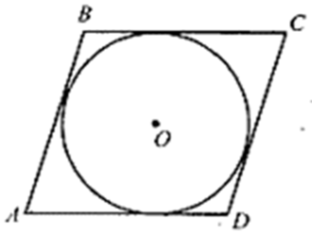


Рис. 2.2.6

Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
$\gamma(O;r)$ – вписанная окружность,
Доказать: $ABCD$ – ромб.

Доказательство.

1. Рассмотрим $ABCD$ – параллелограмм, по свойству $AB=CD$, $AD=BC$.

2. $ABCD$ – описанный четырехугольник, поэтому $AB+CD=AD+BC$.

3. Из этих равенств следует, что $AB+AB=AD+AD$, $AB=AD$.

4. Тогда $AB=AD=CD=BC$, $ABCD$ – ромб.

Что и требовалось доказать.

Пример № 2.2.14 задачи на решение текстовых задач. Расстояние между городами A и B равно *600 км*. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью *90 км/ч* выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Решение.

1. Введем обозначения, пусть:

X – скорость автомобиля;

t – время пути автомобиля до города C;

xt – расстояние до города C от A (это расстояние мотоциклист проехал за t-*2* часа);

$xt=90(t\text{-}2)$ – первое уравнение системы, обозначающее равные промежутки дороги.

2. Тогда общее расстояние что проехал автомобиль

$xt+x(t\text{-}2)=600$ – второе уравнение системы.

3. Система из *2* уравнений с *2* неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} xt = 90(t-2), \\ xt + x(t-2) = 600. \end{cases}$$

Из второго равенства выразим x и подставим в первое уравнение:

$$x(2t-2) = 600; \quad x = \frac{600}{2t-2} = \frac{300}{t-1} \to$$

$$90(t-2)(t-1) = 300t \to 3(t^2 - 3t + 2) = 10t \to$$

$$3t^2 - 9t + 6 - 10t = 0 \to 3t^2 - 19t + 6 = 0.$$

$$D = 361 - 72 = 289 \to t_1 = \frac{1}{3}, \; t_2 = 6.$$

$$t_2 = 6 \to x = \frac{300}{t-1} = \frac{300}{6-1} = \frac{300}{5} = 60\,.$$

Ответ: *60 км/ч* скорость автомобиля.

Во всех приведенных выше примерах, поиск решения задачи осуществляется на основании анализа требования задачи.

По величине проблемности (трудности, сложности) задачи математические задачи делятся на стандартные и нестандартные. Понятия простоты и сложности являются весьма общими и понятиями.

Сложность задачи определяется на основе сложности и опосредованности условий предъявляемой задачи и на основе числа операций, необходимых для ее решения.

А.М. Матюшкин сложность задачи определяет следующими факторами:

– числом условий задачи (числом конкретных данных);

– числом существенных взаимосвязей между данными, данными и искомыми;

– числом опосредований, необходимых для достижения искомого;

– числом преобразований, приводящих к искомому [43].

Характеризуя понятие трудности, А.М. Матюшкин пишет: «Трудность проблемной ситуации характеризуется соотношением двух главных показателей: степенью новизны и обобщенности усваиваемого неизвестного и интеллектуальными возможностями учащегося» [44, с. 196].

Г.А. Балл не ограничивается одним показателем для характеристики трудности задачи, под которой он понимает объем умственного труда, необходимого для решения задачи. Помимо трудности, он вводит характеристику «проблемности задачи», которая показывает, в какой мере для решения задачи требуется выйти за пределы имеющихся в распоряжении решающего алгоритмов, и характеристику, названную им «дефицитом определённости», выражающую возможность применения какого-либо алгоритма проверки предложенного решения [2].

Вообще говоря, вопрос соотношения трудности, сложности и проблемности математической задачи в каждом конкретном случае решается отдельно. В настоящей работе будем рассматривать два типа задач – стандартные и нестандартные.

Стандартными называют математические задачи, для решения которых в образовательном курсе математики имеются готовые правила (в любой форме) или они непосредственно следуют из каких-либо определений или теорем, определяющих программу решения этих задач в виде последовательности шагов. К стандартным задачам относят:

– обучающие задачи-упражнения, метод решения которых известен учащимся;

– ключевые задачи, алгоритмы решения которых помогают учащимся решать большой класс математических задач.

Пример № 2.2.15 стандартной задачи. Решить уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.

Решение.

Алгоритм	Решение
1. Найдите ОДЗ. 2. Приведите исходное уравнение к виду $\sin x = a$.	1. ОДЗ: $x \in R$. 2. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

3. Оцените $\lvert a \rvert$ и выберете нужный случай. 4. Если $\lvert a \rvert > 1$, то уравнение не имеет решений. Если $\lvert a \rvert < 1$, то уравнение $\sin x = a$ решайте по общей формуле: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ 5. Упростите ответ, записав решение как два множества, для случая $n = 2k$ и $n = 2k + 1$.	3. $a = \frac{1}{2}$. 4. $x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ $x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ 5. Если $n = 2k$, то $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ Если $n = 2k + 1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi \cdot (2k+1) =$ $= -\frac{\pi}{2} + \pi \cdot (2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$

Нестандартными называют такие задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения. К нестандартным задачам относят поисковые задачи, задачи-проблемы, задачи-монстры. Такие задачи являются эвристическими по своей сути, это задачи, для решения которых необходимо выявить некоторые скрытые связи между элементами условия и требования или найти способ решения, причем этот способ не является очевидной конкретизацией некоторого обобщенного правила известного ученику, или сделать и то, и другое.

Под словами «нестандартные задачи» подразумеваются такие задачи, которые хотя и сформулированы с использованием только обычных понятий элементарной математики, тем не менее, не могут быть решены стандартными приёмами. Порой такие задачи трудно отличить от стандартных задач, опираясь только на их формулировку, и «нестандартность» задачи выявляется только в ходе её решения.

Пример № 2.2.16 нестандартной задачи. Найти произведение $P = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Решение.

1. Запишем разность в каждой скобке в виде произведения:

$$1-\frac{1}{4}=\frac{2^2-1}{4}=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{2+1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2},$$

$$1-\frac{1}{9}=\frac{3^2-1}{9}=\frac{3-1}{3}\cdot\frac{3+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3},$$

$$1-\frac{1}{16}=\frac{4^2-1}{16}=\frac{4-1}{4}\cdot\frac{4+1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4},$$

....

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

2. Перемножив все равенства, получим:

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=$$

$$=\frac{\left[1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\right]\cdot\left[3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)\right]}{(2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)\cdot(2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)}=$$

$$=\frac{n+1}{n\cdot2}=\frac{n+1}{2n}.$$

Пример № 2.2.17 нестандартной задачи. От какой точки в выпуклом четырехугольнике сумма расстояний до каждой из вершин будет минимальной?

Решение. Пусть M – точка пересечения диагоналей AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Тогда для произвольной точки K верны следующие неравенства: $AK+KC\geq AC$, $BK+KD\geq BD$. Поэтому

$KA+KC+KB+KD\geq AC+BD$, а

$AC+BD=MA+MC+MB+MD$, причём равенство достигается только в том случае, когда точка K совпадает с M.

Таким образом, от точки пересечения диагоналей четырехугольнике сумма расстояний до каждой из вершин будет минимальной.

Рассмотрим третью классификацию математических задач, выделенную **по их дидактическому назначению**. В литературе выделяют три системы задач:

– система математических задач, способствующая усвоению учащимися математического материала;

– система прикладных математических задач;

– система математических задач, способствующая развитию личности учащегося.

Каждая математическая задача в разной степени способствует развитию личности учащегося, формированию его мировоззренческой активности и обогащению его интеллекта. В настоящей работе предложенная типология математических задач по дидактическому назначению соответствует традиционной методике обучения математике:

– задачи, способствующие подготовке учащихся к изучению нового материала по математике;

– задачи, способствующие усвоению нового материала;

– задачи, способствующие формированию математических умений и навыков;

– задачи, способствующие обобщению и систематизации накопленных знаний, умений и навыков;

– прикладные задачи;

– контрольные задачи.

К задачам, способствующим подготовке учащихся к изучению нового материала по математике, относятся:

– мотивационные задачи, демонстрирующие необходимость изучения нового материала;

– актуализационные задачи, позволяющие актуализировать знания и умения учащегося, необходимые для изучения нового материала;

– подводящие задачи, основное назначение которых состоит во введении основных понятий новой математической темы.

Пример № 2.2.18 мотивационной задачи при обучении решению текстовых задач алгебраическим способом.

«Скажи мне, знаменитый Пифагор сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

– Вот сколько, – ответил философ, – половина изучает математику, четверть – музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть три женщины».

Решение.

Обозначив число учеников Пифагора за x, получим что $\frac{1}{2}x$ изучает математику, $\frac{1}{4}x$ – музыку, $\frac{1}{7}x$ пребывает в молчании. Так как есть еще три женщины, то получаем уравнение:
$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x.$$

Решением данного уравнения будет x =28.

Ответ: Школу Пифагора посещают 28 человек.

Задачи, способствующие усвоению нового материала. При изучении нового материала, учитель должен убедиться, что все основные понятия и их свойства правильно восприняты учащимися. Для этого обычно используют систему устных задач и систему задач «на готовых чертежах».

Пример № 2.2.19. Для усвоения темы «Признаки равенства прямоугольных треугольников» можно использовать следующие задачи «на готовых чертежах»: найти пары равных треугольников и доказать их равенство.

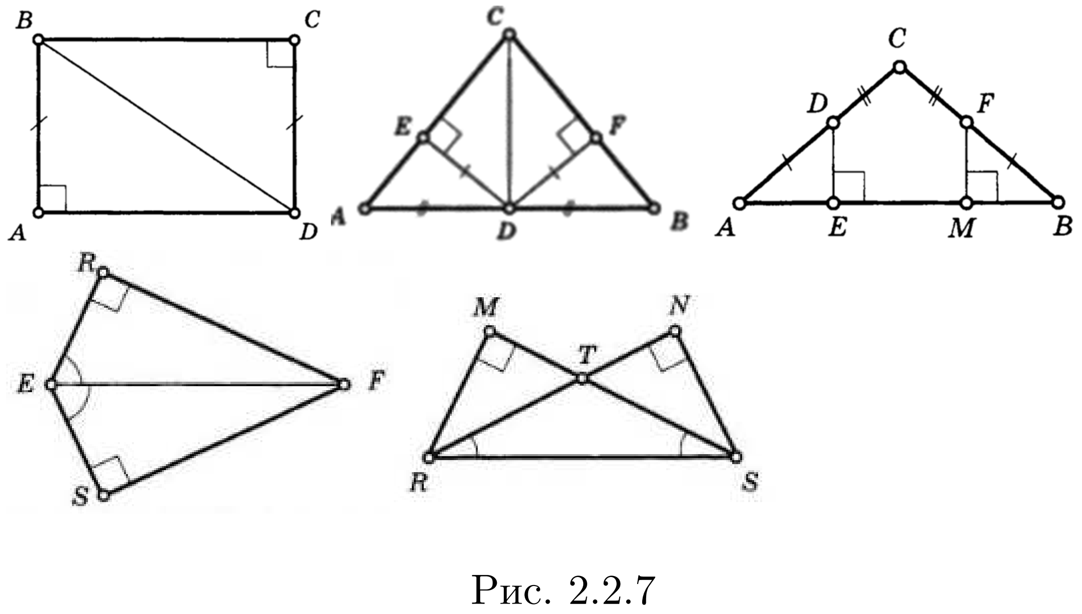


Рис. 2.2.7

Пример № 2.2.20. Для усвоения понятия «логарифм» рекомендуется использовать следующие устные упражнения.

Вычислить:

$$\log_2 4 = ? \qquad \log_{\frac{1}{2}} 4 = ? \qquad \log_3 9 = ?$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = ? \qquad \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = ? \qquad \log_3 27 = ?$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = ? \qquad \log_{\frac{1}{2}} 32 = ? \qquad \log_{\frac{1}{3}} 9 = ?$$

Задачи, способствующие формированию математических умений и навыков, направленные на закрепление усвоенного математического аппарата и автоматизацию навыков.

Пример № 2.2.21 системы задач, направленной на формирование умения приводить подобные члены многочлена.

1. $x + 2x + 4x - 3x$,
2. $x + y + 2x - 2y$,
3. $10xy - 8xy + 3xy$,
4. $7ab + 3ab - 4ab$,
5. $3x^4 - 5x + 7x^2 - 8x^4 + 5x$,
6. $-\left(2ab^2 - ab + b\right) - \left(5ab - ab^2\right) + 3ab^2 - 4b$,
7. $4a^2 - 4b - a^2 + 17b - b$,
8. $2ax - 4xa + 5xa - 6x^2 + a^2$,
9. $\left(1 + 3a\right) + \left(a^2 - 2a\right)$,
10. $\left(8n^3 - 3n^2\right) - \left(7 + 8n^3 - 2n^2\right)$.

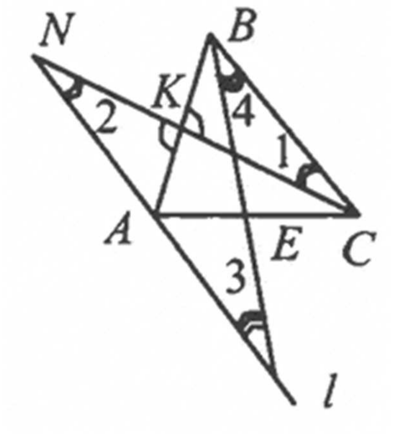
Задачи, способствующие обобщению и систематизации математических знаний и умений по математическим разделам. К таким задачам относятся задачи, решение которых аккумулирует в себе разные подходы, методы и способы решения.

Пример № 2.2.22 задачи на обобщение и систематизацию. Даны треугольник ABC и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC, а середина отрезка CN – с серединой стороны AB. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

Решение.

I. Анализ условия задачи.

Дано: $\triangle ABC$, $CK = KN$, $AK = KB$, $BE = EM$, $AE = EC$.



Доказать, что N, A, $M \in l$.

II. Поиск решения.

Дан произвольный треугольник. Что значит доказать, что три точки лежат на одной прямой?

Предположить противное и прийти в противоречие с аксиомой. Например, доказать, что через две точки проходит, две прямые параллельные данной.

Рис. 2.2.8

Для доказательства параллельности прямых необходимо найти равные накрест лежащие или равные соответственные углы. Равные углы можно найти из равных треугольников.

Сделаем дополнительное построение и соединим точки N и A, точки A и M. Будем искать равные треугольники.

III. Осуществление решения задачи.

1. Рассмотрим $\triangle NKA = \triangle KBC$ (по первому признаку), т.к. $\angle NKA = \angle BKC$ – как вертикальные, $CK = KN$ и $AK = KB$.

2. Из равенства $\triangle NKA = \triangle KBC$ следует равенство соответствующих элементов: $\angle AKN = \angle KCB$.

3. Рассмотрим прямые BC и NA при пересечении секущей NC, накрест лежащие углы $\angle AKN = \angle KCB$ равны. По признаку параллельности, $BC // NA$.

4. Рассмотрим $\triangle BEC = \triangle AEM$ (по первому признаку), т.к. $\angle BEC = \angle AEM$ – как вертикальные, $BE = EM$ и $AE = EC$.

2. Из равенства $\triangle BEC = \triangle AEM$ следует равенство соответствующих элементов: $\angle AME = \angle EBC$.

3. Рассмотрим прямые BC и NA при пересечении секущей NC, накрест лежащие углы $\angle AME = \angle EBC$ равны. По признаку параллельности $BC // AM$.

4. Согласно нашим рассуждениям, получили две прямые проходящие через точку A, параллельные BC, а это противоречит аксиоме о параллельных прямых.

5. Делаем вывод, что три точки A, M и N принадлежат одной прямой.

IV. Ответ и анализ проведенного решения. Для решения предложенной задачи учащемуся необходимо уметь находить равные треугольники, находить правильно равные элементы в равных треугольниках, знать признаки параллельных прямых и уметь их применять, знать аксиому о параллельных прямых.

Прикладные задачи способствуют формированию умений применять математический аппарат к решению практических, практико-ориентированных и контекстных задач. Особенностью этих задач является формулирование условий задачи на родном языке в контексте повседневного опыта или окружающего мира.

Пример № 2.2.23. Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной 1 кв. см. Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна быть равной 20 см. При каких размерах коробки площадь ее поверхности будет наибольшей?

Решение. Пусть x и y – длины сторон прямоугольника, лежащего в основании параллелепипеда, а z – его высота.

Тогда

$$xy = 1,\ 4x + 4y + 4z = 20,$$

или

$$xy = 1,\ z = 5 - (x + y).$$

Площадь поверхности параллелепипеда равна:

$$S = 2 + 2(x + y)z = 2 + 10(x + y) - 2(x + y)^2.$$

Эта функция достигает наибольшего значения при $x + y = \frac{5}{2}$.

Решая систему $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{2}, \\ xy=1 \end{cases}$ получим: $x=2,\ \ y=0,5$ (или наоборот). Вычислим z: $z=5-(x+y)=5-\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Ответ: площадь поверхности коробки будет наибольшей, если ее размеры будут $2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}$.

Контрольные задачи – это такие задачи, по которым делается вывод о результатах изучения математической дисциплины, о достигнутом уровне развития интеллектуальных умений, о развитии математической культуры, о развитии компетенций учащихся.

Пример № 2.2.24 контрольной задачи. Решить неравенство: $\log_{2^{|2x-1|}}\left(2^{2x+1}-2^{x+2}+2\right)\le\dfrac{x}{|2x-1|}$.

Решение.

$$ОДЗ: 2^{2x+1}-2^{x+2}+2=2\cdot\left(2^{2x}-2\cdot 2^{x}+1\right)=2\cdot\left(2^{x}-1\right)^{2}>0,$$

$$x\ne 0,\ x\ne\frac{1}{2}.$$

Преобразуем неравенство

$$\frac{1}{|2x-1|}\cdot\log_2\left(2^{2x+1}-2^{x+2}+2\right)\le\frac{x}{|2x-1|},$$

$$\log_2\left(2^{2x+1}-2^{x+2}+2\right)\le x,$$

$$2^{2x+1}-2^{x+2}+2\le 2^{x},$$

$$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^{x}+2\le 0,$$

$$\left(2^{x}-1\right)\cdot\left(2\cdot 2^{x}-1\right)\le 0,$$

$$\frac{1}{2}\le 2^{x}\le 2\leftrightarrow -1\le x\le 1.$$

Ответ: $x\in[-1;0)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};1\right]$.

Представленная задача позволяет проверить у учащихся:

– знание: определения логарифма, свойств логарифмов, область допустимых значений переменных, стоящих под знаком логарифма;

– умение: применять свойства логарифма к решению показательно-логарифмических неравенств, делать замену переменной, решать неравенство методом интервалов, верно записывать промежутки значения переменных с учетом различных ограничений.

Пример контрольной задачи по алгебре. Решить текстовую задачу.

15 января Антон взял в кредит 3 миллиона рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го февраля, апреля и июня долг должен быть на одну девятую часть от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца;

– 15-го марта, мая и июля долг должен быть на две девятых части от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 220 тысяч рублей больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть исходная сумма, взятая в кредит, была равна S млн руб. и пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Тогда ежемесячные выплаты были равны:

$$Sk - \frac{8}{9}S;\ \frac{8}{9}Sk - \frac{6}{9}S;\ \frac{6}{9}Sk - \frac{5}{9}S;\ \frac{5}{9}Sk - \frac{3}{9}S;\ \frac{3}{9}Sk - \frac{2}{9}S;\ \frac{2}{9}Sk.$$

Следовательно, общая сумма выплат составит:

$$Sk\cdot\left(1+\frac{8}{9}+\frac{6}{9}+\frac{5}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}\right)-S\cdot\left(\frac{8}{9}+\frac{6}{9}+\frac{5}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}\right)=$$
$$=\left(\frac{11}{3}Sk-\frac{8}{3}S\right).$$

По условию данное выражение на 220 тысяч рублей превышает S, следовательно, можно составить уравнение:

$$\left(\frac{11}{3}Sk-\frac{8}{3}S\right)-S=0,22.$$

Подставляя в это уравнение $S=3$ получаем:

$$11k-11=0,22 \ \to k=1,02;\ r=2.$$

Ответ: 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца.

Решение представленной задачи позволяет проверить умение учащегося строить математическую модель, вводить переменные и параметры, математически описывать с их помощью экономические процессы и поведение людей.

Таким образом в настоящем пункте представлена наиболее удобная типология видов математических задач, определённая по двум критериям.

Проводя логико-математический анализ задачи, учащийся выясняет к какому разделу математики задача может относиться согласно тому математическому объекту, о котором идет речь в задаче; требование задачи позволяет выделить класс обобщенных математических умений, с помощью которых учащийся будет осуществлять поиск решения задачи.

Одна и та же математическая задача может выполнять разные дидактические функции, поэтому для учителя математики важно каждую математическую задачу рассматривать в целостной методике обучения математике.

В следующем пункте рассмотрим еще один подход к определению видов математических задач – задачи, классифицируемые по методам их решения.

2.3. Методы решения математических задач

«Мы все убеждены в том, что любая математическая задача поддаётся решению. Это убеждение ... является для нас большим подспорьем в работе, когда мы приступаем к решению математической проблемы, ибо мы слышим внутри себя постоянный призыв: вот проблема, ищи решение. Ты можешь найти его с помощью чистого мышления, ибо в математике не существует ignorabitius (мы не будем знать).»
Давид Гильберт

Семь подходов к пониманию методов решения математических задач. Арифметический метод. Алгебраический метод. Функциональный метод. Векторно-координатный метод. Геометрический метод. Метод математического моделирования.

Сложно провести какую-то полную классификацию методов решения математических задач в виду большого разнообразия последних.

Метод – это путь исследования, способ достижения цели, совокупность приемов и операций практического и теоретического освоения действительности.

Решение задачи – это нахождение такой последовательности общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче, – ее ответ.

Под методом решения математической задачи будем понимать совокупность путей и способов нахождения такой последовательности общих положений математики, применяя которые к условиям задачи или к их следствиям, получаем то, что требуется в задаче, – ее ответ.

Многие годы ученые-математики и педагоги-математики исследуют методы решения математических задач, как с точки зрения методики решения задач, так и сточки зрения методики *обучения* решению задач.

На сегодняшний момент не существует единой классификации методов решения математических задач, однако исторически выделились семь основных подходов к пониманию методов решения математических задач.

На рис. 2.3.1 и рис. 2.3.2 представлено семь подходов к классификации методов решения математических задач.

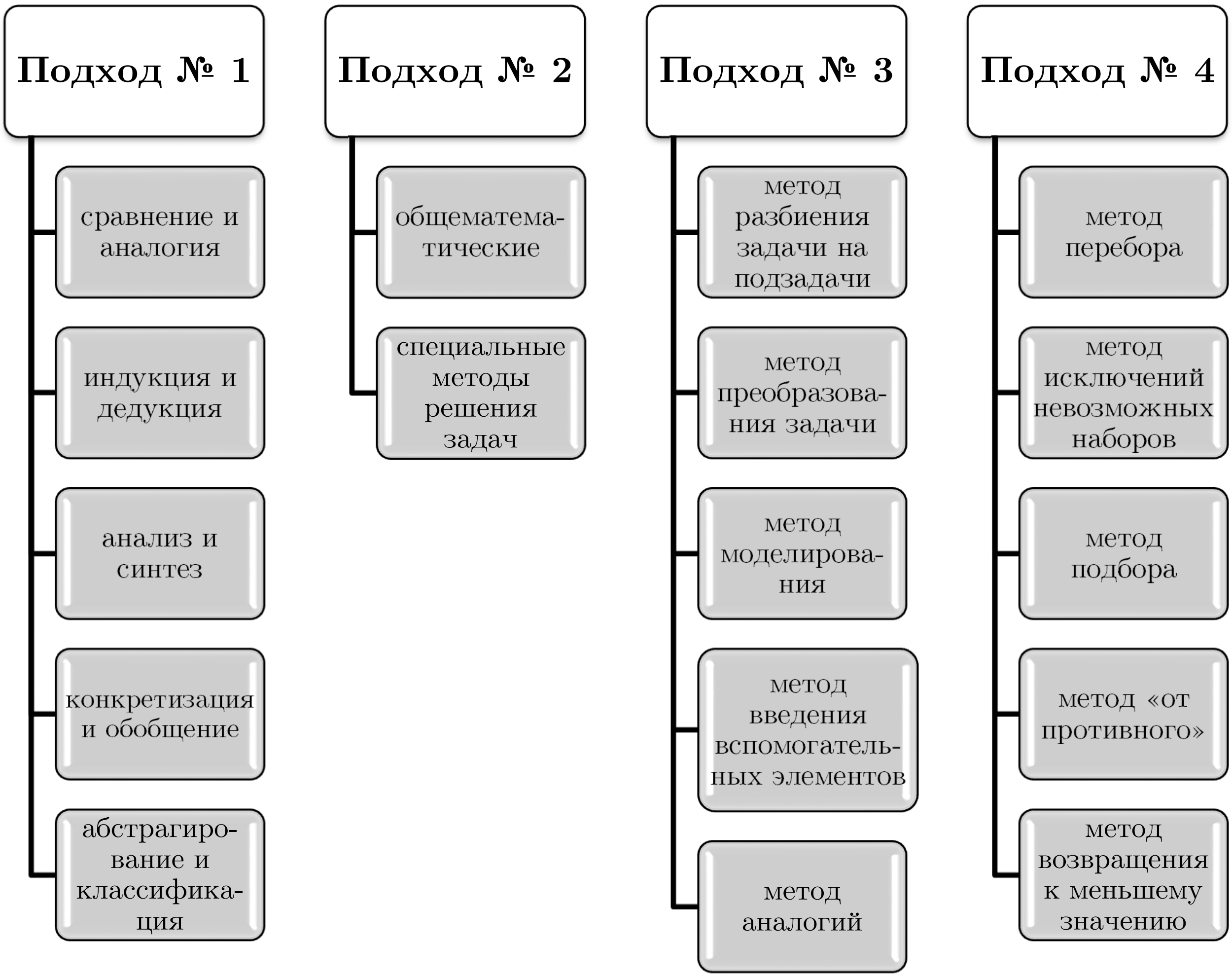


Рис. 2.3.1. Подходы к классификации методов решения задач

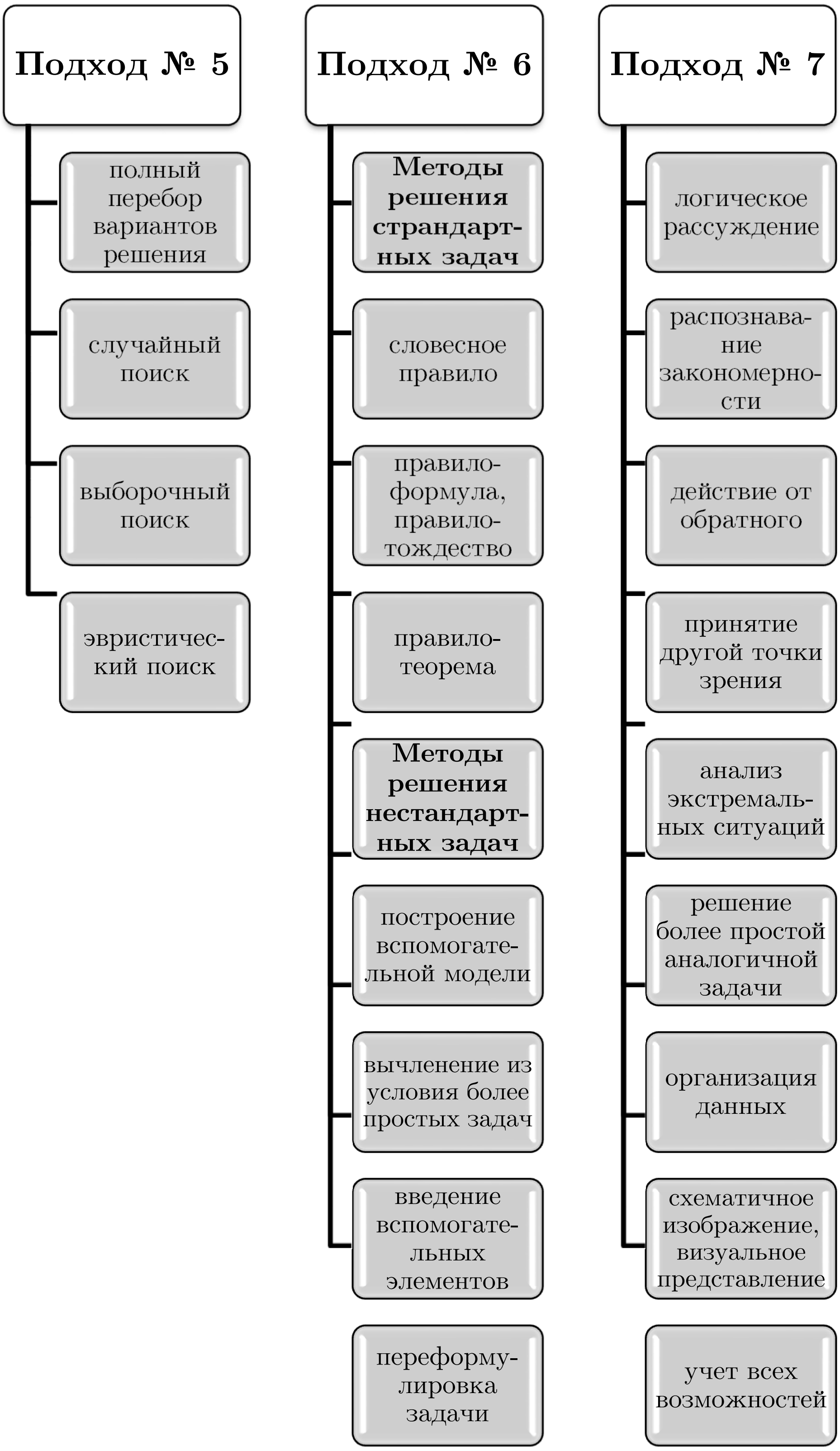


Рис. 2.3.2. Подходы к классификации методов решения задач

В первом подходе основными методами решения математических задач являются сравнение, индукция, дедукция, анализ, синтез, конкретизация, обобщение, абстрагирование, аналогия, классификация.

Согласно другому подходу, все методы можно разделить на две большие группы – общематематические методы (алгебраические, геометрические, численные и др.) и специальные методы решения задач (разложение на множители тригонометрического уравнения, векторно-координатный способ решения стереометрических задач и т.д.).

Согласно третьему подходу методы решения математических задач включают такие методы как:

- ✓ метод разбиения задачи на подзадачи;
- ✓ метод преобразования задачи;
- ✓ метод моделирования;
- ✓ метод введения вспомогательных элементов;
- ✓ метод аналогий.

Согласно четвертому подходу все методы решения задач сводятся к одному из следующих методов:

- ✓ метод перебора;
- ✓ метод исключений невозможных наборов значений неизвестных;
- ✓ метод подбора;
- ✓ метод «от противного»;
- ✓ метод возвращения к меньшему значению.

В пятом подходе, представленном в работах В.И. Крупича [37, с.99–100], выделены следующие методы решения математических задач:

1. «Полный перебор вариантов решения», то есть поиск посредством систематических проб, по порядку обследующих все возможные ходы на каждом этапе решения.

2. «Случайный поиск», при котором направление решения определяется по чисто случайному критерию.

3. «Выборочный поиск» или «слепой поиск», когда очередной ход выбирается на основании предыдущего.

4. «Эвристический поиск», использующий определенным образом эвристическую информацию, заключенную в задаче. При эвристическом поиске вследствие отбрасывания явно неперспективных направлений происходит уменьшение объема поиска.

Шестой подход представлен в работе Л.М. Фридмана и Е.Н. Турецкого, согласно им, методы решения задач делятся на стандартные методы, которые представлены правилами и алгоритмами, и нестандартные методы, для которых готовых правил не существует.

Так, например, к методам решения стандартных задач они относят следующие правила:

- ✓ словесное правило (например, правило нахождения НОК двух чисел);
- ✓ правило-формула (например, правила нахождения производной функции);
- ✓ правило-тождество (например, основное тригонометрическое тождество);
- ✓ правило-теорема (например, теорема Пифагора);
- ✓ правило-определение (например, определение параллелограмма).

Авторами подчеркивается, что для того, чтобы легко решать стандартные задачи, необходимо, во-первых, распознавать математические понятия, их свойства, признаки, знать все формулы, теоремы, на основе которых решаются типовые задачи, а, во-вторых, уметь развертывать свернутые общие правила, формулы в последовательности шагов решения задач соответствующих видов.

В работе Л.М. Фридмана и Е.Н. Турецкого приведена схема поиска решения нестандартных задач, в которой выделены следующие основные этапы:

1) анализ задачи и построение вспомогательной модели;

2) вычленение из условия более простых задач или разбиение условия на подзадачи;

3) введение вспомогательных элементов;

4) переформулировка задачи.

Решение некоторых задач существенно упрощается, если заменить условие задачи некоторым другим условием и показать, что выполнение этого условия влечёт за собой выполнение условия задачи, а сделанная замена не сужает множество решений.

Метод замены задачи следует использовать, если в процессе решения заданной задачи есть ситуация, которая явно не имеет простого аналитического решения, либо содержит неудобные для исследования выражения.

Седьмой подход описан профессором С. Круликом и профессором А. Позаментье в книге [49], методы решения математических задач они называют стратегиями и выделяют десять стратегий.

1. Логическое рассуждение.
2. Распознавание закономерности.
3. Действие от обратного.
4. Принятие другой точки зрения.
5. Анализ экстремальных ситуаций.
6. Решение более простой аналогичной задачи.
7. Организация данных.
8. Схематичное изображение, или визуальное представление.
9. Учет всех возможностей.
10. Обоснованное предположение и проверка.

Приведем несколько замечательных примеров из книги [49].

Пример № 2.3.1: использования логического рассуждения при решении математической задачи.

Ал, Барбара, Кэрол и Дэн сдают экзамен по математике. В целом они правильно ответили на 67 вопросов, и у каждого из них есть как минимум один правильный ответ. Ал дал больше всего правильных ответов. Барбара и Кэрол дали в сумме 43 правильных ответа. Сколько правильных ответов дал Дэн? [49].

Решение**.** Применим стратегию логического рассуждения. Поскольку Барбара и Кэрол вместе дали 43 правильных ответа, у одной из них таких ответов должно быть, как минимум, 22, а у другой – 21. Так как Ал оказался впереди всех, то с учетом предыдущих предположений в отношении Барбары и Кэрол у него должно быть, как минимум, 23 правильных ответа. Если допустить, что у Ала 23 правильных ответа, у Барбары – 22, а у Кэрол – 21, то в сумме у них будет $23 + 22 + 21 = 66$ правильных ответов. Это означает, что Дэн правильно ответил только на один вопрос. Поскольку у всех есть как минимум один правильный ответ, результат 1 для Дэна правилен.

Пример № 2.3.2: использования действия от обратного при решении математических задач.

Марии 24 года. Она в два раза старше, чем была Анна, когда ей было столько же, сколько Анне сейчас. Сколько лет Анне?

Решение. Подход от обратного может оказаться полезным для решения этой задачи. А раз так, то начнем со следующих рассуждений.

1. В представленной ситуации есть два временных периода:

а) Нынешнее время, когда Марии 24 года.

б) Прошлое время n лет назад.

Введем следующие обозначения:

M – возраст Марии (24), A – возраст Анны, n – разница между двумя временными периодами.

2. В первом временном периоде – Мария в два раза старше, чем была Анна: $2(A - n) = M$.

Во втором временном периоде – когда Марии было столько же, сколько Анне сейчас: $M - n = A$.

3. Получили систему: $\begin{cases} 2(A - n) = M, \\ M - n = A. \end{cases}$

4. Подставим уравнение 2 в уравнение 1:

$$2(M - n - n) = M \to n = \frac{M}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

5. Значение $n = 6$ при подстановке во второе уравнение:

$$M - 6 = A \rightarrow A = 24 - 6 = 18.$$

6. Таким образом, возраст Анны составляет 18 лет.

Пример № 2.3.3: использования стратегии принятия другой точки зрения.

При делении 450 на нечетное число частное представляет собой простое число без остатка. Чему равно нечетное число? [49].

Решение**.** Воспользуемся нашей стратегией и посмотрим на задачу с другой точки зрения. Число 450 можно записать как $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Поскольку 9 и 25 это нечетные числа, а 450 – четное число, то единственным возможным четным простым множителем для 450 является 2. Таким образом, нечетное число равно 225.

Пример № 2.3.4: анализа экстремальных ситуаций при решении математических задач. *Иногда, чтобы решить задачу, полезно присвоить одним переменным экстремальные значения, а другие переменные сохранить постоянными.*

Пусть заданы два конгруэнтных квадрата, длины сторон которых равны 4 см. Они размещены так, что вершина одного из них находится в центре другого. Чему равно наименьшее значение площади пересекающейся части?

Решение. Изобразим два квадрата. Поскольку ориентация квадратов не определена в условиях задачи, их можно разместить так, как нам захочется, лишь бы вершина одного находилась в центре другого. Обратимся к нашей стратегии анализа экстремальных ситуаций. Можно разместить квадраты так, как показано на рис. 2.3.3, где стороны этих фигур взаимно перпендикулярны.

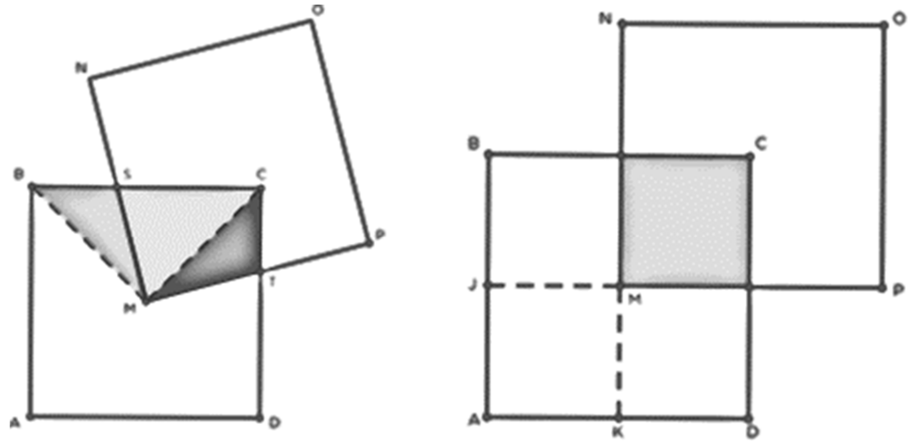


Рис. 2.3.3

Если этого недостаточно, чтобы удостовериться в равенстве закрашенной области четверти исходного квадрата, то нужно лишь продолжить линии PM и NM до пересечения со сторонами квадрата в точках J и K соответственно, как показано на рис. 2.3.3.

Очевидно, что закрашенная область равна $\frac{1}{4}$ площади квадрата, или $\frac{1}{4}$ части 16 см^2, т.е. 4 см^2. Разместив квадраты в определенном положении, мы легко нашли ответ.

Пример № 2.3.5: решения более простой аналогичной математической задачи. Дано $\dfrac{1}{x+5} = 4$.

Чему равно $\dfrac{1}{x+6} = ?$

Решение. Вместо того, чтобы находить x из предложенного уравнения, мы выразим $x+5=\dfrac{1}{4}$ и прибавим к обеим частям единицу. Получим: $x+6=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}$.

Приведем еще одну типологию методов решения математических задач. Основание для типологии вытекает из того математического объекта – числовое выражение, уравнение, неравенство, граф, функция, случайное событие, случайная величина, вариационный ряд, геометрическая фигура, который будет исследоваться при решении математической задачи.

В настоящей работе в рамках рефлексивного подхода к обучению решению математических задач рассмотрим шесть математических методов решения математических задач:

- ✓ Арифметический метод.
- ✓ Алгебраический метод.
- ✓ Функциональный метод.
- ✓ Геометрический метод.
- ✓ Векторно-координатный метод.
- ✓ Метод математического моделирования.

Арифметический метод. Суть арифметического метода состоит в том, чтобы найти ответ на вопрос задачи при выполнении арифметических действий над числами, без использования буквенной символики [59]. Особенности применения арифметического метода состоят в том, что рассуждения движутся на схеме: «зная ..., можно узнать ... », «чтобы узнать ..., надо знать ...».

Пример № 2.3.6. Катя мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 миллиона рублей. Катя может купит ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Кате придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ей придется выплатить сумму, на 180 % превышающую исходную. Вместо этого, Катя может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды – 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от ее возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За какое время в этом случае Катя сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость квартиры не измениться?

Решение. Пусть Катя купила квартиру в кредит. Тогда она должна погасить кредит за 20 лет, то есть за 240 одинаковых ежемесячных платежей. Сумма, которую она должна выплатить банку, по условию на 180 % превышает исходные

3 млн руб., то есть 3000 тыс. рублей умножить на 2,8, получится 8400 тыс. руб. Разделив эту сумму на 240 месяцев, получаем ежемесячный платеж, равный 35 тыс. руб.

Далее, если вместо этого Катя снимает квартиру, то после оплаты аренды у нее будет оставаться ежемесячно 20 тыс. руб. Тогда 3 млн руб. Катя накопит за 3000:20=150 месяцев или за 12,5 лет.

Пример № 2.3.7. Вы приобретаете в кредит холодильник по цене 16000 руб. При оформлении кредита Вы вносите 4000 руб., обязуясь погасить остальное в течение 6 месяцев, делая ежемесячно равные взносы. Определите сумму, которую Вы должны выплачивать ежемесячно, если продавец требует за кредит 6 % в год. Рассчитать график погашения процентов и основного долга.

Решение.

1) Сумма кредита с начисленными процентами составляет величину:

$$S = (16000 - 4000) \cdot (1 + 0,06 \cdot 0,5) = 12360 \text{ руб.}$$

Следовательно, ежемесячно покупатель должен выплачивать продавцу 12360/6=2060 руб.

2) По условиям рассматриваемой ситуации сумма начисленных процентов равна 360 руб. Для определения последовательных погашений следует разделить величину Р = 360 на части пропорционально числу оставшихся выплат (всего у нас их шесть), т.е. в соотношении 6:5:4:3:2:1.

$$P_1 = \frac{360 \cdot 6}{(6+5+4+3+2+1)} = \frac{2160}{21} \approx 102,85.$$

$$P_2 = \frac{360 \cdot 5}{(6+5+4+3+2+1)} = \frac{1800}{21} \approx 85,71.$$

$$P_3 = \frac{360 \cdot 4}{(6+5+4+3+2+1)} = \frac{1440}{21} \approx 68,57.$$

$$P_4 = \frac{360 \cdot 3}{(6+5+4+3+2+1)} = \frac{1080}{21} \approx 51,42.$$

$$P_5 = \frac{360 \cdot 2}{(6+5+4+3+2+1)} = \frac{720}{21} \approx 34{,}28.$$

$$P_6 = \frac{360 \cdot 1}{(6+5+4+3+2+1)} = \frac{360}{21} \approx 17{,}14.$$

Помесячная разность между срочной уплатой и процентным платежом выделяется на погашение основного долга:

$D_1 = 2060 - 102{,}85 = 1957{,}15$; $D_2 = 2060 - 85{,}71 = 1974{,}29$;

$D_3 = 2060 - 68{,}57 = 1991{,}43$; $D_4 = 2060 - 51{,}42 = 2008{,}58$;

$D_5 = 2060 - 34{,}28 = 2025{,}72$; $D_6 = 2060 - 17{,}14 = 2042{,}86$.

Имея эти значения, найдем остаток основного долга на начало каждого месяца:

$L_1 = 12000$; $L_2 = 12000 - 1957{,}15 = 10042{,}85$;

$L_3 = 10042{,}85 - 1974{,}29 = 8068{,}56$;

$L_4 = 8068{,}56 - 1991{,}43 = 6077{,}13$;

$L_5 = 6077{,}13 - 2008{,}58 = 4068{,}55$;

$L_6 = 4068{,}55 - 2025{,}72 = 2042{,}83$.

Сумма погашения долга в конце срока полностью списывает оставшуюся задолженность. Проценты уменьшаются, суммы, погашающие долг, растут.

Алгебраический метод[1], а точнее метод решения математических задач методом составления уравнений (систем уравнений). Суть метода состоит в прохождении последовательности этапов: объяснение к составлению уравнения, составление уравнения, решение уравнения, проверка, запись ответа, анализ решения задачи. Особенностью алгебраического метода является то, что при описании зависимости между величинами используются формулы для нахождения движения, работы, концентрации и т.д., представляющие систему в изменении, для которых характерны вполне определённые входные или выходные данные. Основные факторы, характеризующую ситуацию, вполне определены или известны.

[1] Оговоримся, что слово «алгебраический» выбрано учащимися, у которых это слово вызывает ассоциативные связи с уравнениями и методами их решений.

Пример № 2.3.8: задача, решаемая алгебраическим методом. В треугольнике ABC угол C равен 120^0, а биссектриса угла C равна 3. Длины сторон AC и CB относятся как *3:2* соответственно. Найти тангенс угла A и сторону BC [19, с. 18 – 19].

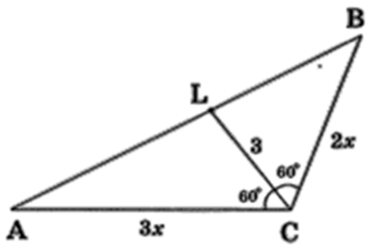


Рис. 2.3.4

Решение.

I. Анализ условия. По условию задан тупоугольный треугольник, в котором известен один угол и биссектриса. Известно отношение сторон, следовательно, удобно ввести вспомогательную переменную и составить уравнение.

II. Поиск решения. Выбор неизвестной достаточно естественен и следует из условия: *AC=3x, BC=2x.* С помощью теоремы косинусов выразим отрезки AL и BL. Затем по теореме о биссектрисе составим равенство и найдем значение переменной x.

III. Осуществление решения.

1. Рассмотрим $\triangle ACL$, по теореме косинусов имеем:

$$AL^2 = (3x)^2 + 3^2 - 2 \cdot 3x \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \to AL = \sqrt{9x^2 - 9x + 9}.$$

2. Рассмотрим $\triangle CLB$, по теореме косинусов имеем:

$$LB^2 = (2x)^2 + 3^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \to LB = \sqrt{4x^2 - 6x + 9}.$$

3. Искомое замыкающее соотношение следует из теоремы о биссектрисе: $\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$.

Подставим и преобразуем $\dfrac{\sqrt{9x^2 - 9x + 9}}{\sqrt{4x^2 - 6x + 9}} = \dfrac{3}{2} \leftrightarrow$

$$\frac{x^2 - x + 1}{4x^2 - 6x + 9} = \frac{1}{4} \leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 6x + 9 \leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

4. *BC=5.*

5. Для нахождения угла А воспользуемся теоремой синусов для $\triangle ABC$: $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{2}{3}\leftrightarrow\dfrac{\sin A}{\sin\left(60^0-A\right)}=\dfrac{2}{3}$.

6. Получили тригонометрическое уравнение

$$3\sin A=2\sin\left(60^0-A\right)\leftrightarrow 3\sin A=2\left(\sin 60^0\cos A-\cos 60^0\sin A\right).$$

7. Преобразуем получившееся уравнение к виду:

$$4\sin A=\sqrt{3}\cos A\to tgA=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

IV. Ответ: тангенс угла A равен $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, сторона *BC=5.*

Пример № 2.3.9: введение двух переменных и получение системы уравнений. Смешав 70 % и 60 % растворы кислоты и добавив два килограмма чистой воды, получили 50 % раствор кислоты. Если бы вместо 2 килограммов воды добавили два килограмма 90 % раствора той же кислоты, то получили бы 70 % раствор кислоты. Сколько килограммов 70 % раствора кислоты использовали для получения смеси?

Решение.

I. Анализ условия задачи. Речь идет о массе раствора и о массе кислоты в этом растворе.

Представим, что у нас есть три банки с разной концентрацией кислоты. Перельем все содержимое этих банок в одну двумя способами.

	1 способ		**2 способ**	
	масса раствора (кг)	масса кислоты	масса раствора (кг)	масса кислоты
1 банка с 70 % раствором	x	*0,7x*	x	*0,7x*
2 банка с 60 % раствором	y	*0,6y*	y	*0,6y*
3 банка с водой	*2*	*0· 2*	*2*	*0,9· 2*
4 банка, куда все слили	*x+y+2*	*0,5(x+y+2)*	*x+y+2*	*0,7(x+y+2)*

II. Поиск решения. Очевидно необходимо составить два уравнения для того, чтобы найти значения введенных неизвестных x и y.

Для этого, обратимся к условию задачи и найдем фразу «получили 50 % раствор кислоты», что будет означать, что количество кислоты в трех банках равно получившемуся количеству кислоты в четвертой банке:

$$0,7x+0,6y+2\cdot 0=0,5\left(x+y+2\right).$$

Аналогично получаем второе уравнение:

$$0,7x+0,6y+2\cdot 0,9=0,7\left(x+y+2\right).$$

Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений: $\begin{cases}0,7x+0,6y+2\cdot 0=0,5\left(x+y+2\right),\\0,7x+0,6y+2\cdot 0,9=0,7\left(x+y+2\right)\end{cases}.$

III. Решение системы уравнений.

$$\begin{cases}0,7x+0,6y=0,5x+0,5y+1,\\0,7x+0,6y+1,8=0,7x+0,7y+1,4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}0,2x+0,1y=1,\\0,1y=0,4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=4,\\x=3.\end{cases}$$

IV. Формулируем ответ. Для получения смеси использовали 3 кг 70% раствора.

Пример № 2.3.10: ведение трех переменных и получение системы трех уравнений. Саша и Костя вместе работают над проектом 35 часов. Костя и Наталья вместе могут выполнить этот же проект за 63 рабочих часа. Саша и Наталья выполнят этот проект за 45 рабочих часов. Сколько дней им понадобится, чтобы завершить проект, работая всем вместе?

Решение. I. Анализ условия. В текстовой задаче речь идет о совместной работе трех человек. Известно только время, которое затрачено парами для выполнения проекта. Требуется найти сколько времени займет выполнение проекта, если будут задействованы три сотрудника. Заметим, что в задаче не требуется найти время, которое тратит на проект каждый сотрудник.

II. Поиск решения задачи.

1. Для того чтобы математически описать ситуацию, введем обозначения. Пусть x_i – объем работы который выполняет каждый сотрудник за 1 час, т.е.

x_1 – объем работы, которую выполняет Саша за 1 час;

x_2 – объем работы, которую выполняет Костя за 1 час;

x_3 – объем работы, которую выполняет Наталья за 1 час.

Весь объем работы по проекту мы обозначим за 1.

2. По формуле $A = Pt$ (согласно которой вся работа есть произведение производительности (сколько выполняется работы в час), на время, затрачиваемое для выполнения всей работы). Запишем данные в задаче.

«Саша и Костя вместе работают над проектом 35 часов» означает, что $(x_1 + x_2) \cdot 35 = 1$.

«Костя и Наталья вместе могут выполнить этот же проект за 63 рабочих часа» записывается как $(x_2 + x_3) \cdot 63 = 1$.

«Саша и Наталья выполнят этот проект за 45 рабочих часов»: $(x_1 + x_3) \cdot 45 = 1$.

3. Таким образом, получаем систему уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} (x_1 + x_2) \cdot 35 = 1 \\ (x_2 + x_3) \cdot 63 = 1. \\ (x_1 + x_3) \cdot 45 = 1 \end{cases}$

III. Осуществление решения. Выполним ряд преобразований, чтобы получить сумму $x_1 + x_2 + x_3$.

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) \cdot 35 = 1 \\ (x_2 + x_3) \cdot 63 = 1 \\ (x_1 + x_3) \cdot 45 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} (x_1 + x_2) = \dfrac{1}{35} \\ (x_2 + x_3) = \dfrac{1}{63} \\ (x_1 + x_3) = \dfrac{1}{45} \end{cases} \Bigg| + \to$$

$$\to x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_1 + x_3 = \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{45}.$$

$$2(x_1+x_2+x_3)=\frac{1}{15}\to(x_1+x_2+x_3)=\frac{1}{30}\to(x_1+x_2+x_3)\cdot 30=1.$$

IV. Ответ. Таким образом втроем за 30 рабочих часов они вместе выполнят проект. Но вопрос задачи стоит несколько иначе. Сколько дней сотрудникам понадобится на выполнение проекта? Естественно у Вас возникает сомнение, что понимать под «днем»? В этом случае Вы можете дать свой ответ. Например, при восьмичасовом рабочем дне, сотрудникам понадобится 4 рабочих дня для выполнения проекта.

Пример № 2.3.11: введение двух переменных и получение одного уравнения. Решить неравенство

$$\log_7\frac{3}{x}+\log_7\left(x^2-7x+11\right)\le\log_7\left(x^2-7x+\frac{3}{x}+10\right)$$

Решение.

1. Найдем область определения неравенства:

$$\begin{cases}x^2-7x+11>0,\\ \dfrac{3}{x}>0.\end{cases}\to\begin{cases}x<\dfrac{7-\sqrt{5}}{2},\ x>\dfrac{7+\sqrt{5}}{2},\\ x>0.\end{cases}$$

$$x\in\left(0,\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2},+\infty\right).$$

2. Заметим, что, если воспользоваться свойствами логарифма, приходим к необходимости решения уравнения третьей степени, имеющего действительные корни.

$$\frac{3}{x}\left(x^2-7x+11\right)\le x^2-7x+\frac{3}{x}+10,$$

3. Введем два вспомогательных параметра:

$$y=\frac{3}{x},\ z=x^2-7x+10.$$

4. Запишем неравенство в новых параметрах и воспользуемся свойствами логарифмов:

$$\log_7 y+\log_7\left(z+1\right)\le\log_7\left(y+z\right),$$

$$y\left(z+1\right)\le y+z,$$

$$yz + y \le y + z,$$
$$yz - z \le 0,$$
$$z(y-1) \le 0.$$

5. Решим две системы

$$\text{а) } \begin{cases} z \le 0, \\ y - 1 \ge 0; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} z \ge 0, \\ y - 1 \le 0. \end{cases}$$

Случай а: $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \le 0, \\ \dfrac{3}{x} - 1 \ge 0. \end{cases} \to \begin{cases} 2 \le x \le 5, \\ 0 < x \le 3. \end{cases} \to x \in [2,3].$

Случай б: $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \ge 0, \\ \dfrac{3}{x} - 1 \le 0. \end{cases} \to \begin{cases} x \le 2,\ x \ge 5, \\ x < 0,\ x \ge 3. \end{cases} \to x \in [5,+\infty).$

6. С учетом области определения: $x \in \left[2, \dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\right) \cup [5,+\infty)$.

Ответ: $x \in \left[2, \dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\right) \cup [5,+\infty)$.

Функциональный метод. Суть функционального метода в том, чтобы определить величины, участвующие в задаче и описать функциональную зависимость между ними, используя для обозначения величин общепринятые в науке буквы. Знание свойств линейной, квадратичной, дробно-рациональной или других функций позволит ответить на вопрос о наименьшем или наибольшем значении искомых величин. Применение производной к решению задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения значительно упрощает процесс поиска ответа на вопрос задачи.

Пример № 2.3.12. В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом – 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение.

I. Анализ условия. По условию задачи, задано два множества – множество девочек в первом классе и во втором классе. Введем переменную x – столько девочек попало в меньший класс, тогда *(25 – x)* девочек попало в больший класс. Речь идет о проценте девочек, т.е. об отношении количества девочек в каждом классе к общему количеству человек. Необходимо описать сумму этих процентов.

2. Суммарная доля девочек в двух классах равна

$$f(x) = \frac{x}{22} + \frac{25 - x}{23} \to f(x) = \frac{x}{506} + \frac{25}{23}, \quad 2 \le x \le 22.$$

Составленная функция $f(x)$ есть линейная возрастающая функция.

Своего наибольшего значения она достигает на правом конце промежутка, т.е. при $x = 22$.

Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из девочек, а в большем классе должно быть 3 девочки и 20 мальчиков.

Пример № 2.3.15. Вы являетесь владельцем двух фирм в разных городах (например, Вы владеете рекламными агентствами). Фирмы выполняют одинаковый набор услуг, однако в фирме, расположенной во втором городе, используются более совершенное оборудование для печати.

В результате, если сотрудники первой фирмы трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они выполняют t заказов, если сотрудники второй фирмы трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они так же выполняют t заказов.

За каждый час работы Вы платите сотруднику 1000 руб. Необходимо, чтобы за неделю суммарно выполнялось 20 заказов. Какую наименьшую сумму в неделю придется Вам тратить на оплату труда сотрудников?

Решение.

I. Анализ условия. Речь идет о двух переменных: количество заказов в одной фирме и количество заказов в другой фирме. Оплата зависит от количества выполненных заказов. Очевидно, надо составить функцию, по которой можно вычислить оплату труда сотрудников в зависимости от количества выполненных заказов.

II. Поиск решения.

1. Введем переменные и математически опишем связывающие их условия. Пусть $x \in N$ заказов выполняет первая фирма; $y \in N$ – вторая фирма.

Всего должно выполняться 20 заказов: $x + y = 20$.

2. Доля человеко-часов в первой фирме $4x^3$, во второй – y^3.

3. В неделю Вы будете тратить $S = 1 \cdot (4x^3 + y^3)$ тыс. руб.

Необходимо путем подстановки получить функцию одной переменной и исследовать ее на наименьшее значение.

III. Осуществление решения.

1. Выразим y через x и подставим в выражение для S следующим образом:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ S = 1 \cdot (4x^3 + y^3). \end{cases} \to \begin{cases} y = 20 - x, \quad 0 \le x \le 22, \\ S = 4x^3 + (20 - x)^3. \end{cases}.$$

2. Найдем наименьшее значение функции $S = 4x^3 + (20 - x)^3$ на отрезке $[0,\ 20]$ с использованием производной функции $S(x)$.

$$S'(x) = 12x^2 - 3(20 - x)^2 = 9x^2 + 120x - 1200 \to S'(x) = 0.$$

$$9x^2 + 120x - 1200 = 0 \leftrightarrow 3x^2 + 40x - 400 = 0 \leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{3} = \frac{-20 \pm 40}{3}.$$

Определим, принимает ли функция наименьшее значение при $x = \dfrac{20}{3}$. Подставим точки $x = 6$ и $x = 7$ в производную, получим

$$S'(x) = 9 \cdot 36 + 120 \cdot 6 - 1200 = -156 < 0;$$

$$S'(x) = 9 \cdot 49 + 120 \cdot 7 - 1200 = 81 > 0.$$

3. Точка $x = \dfrac{20}{3}$ является точкой минимума функции. Однако, x – это натуральное число, поэтому подставим в $S(x) = 1 \cdot (4x^3 + y^3)$ два значения $x = 6$ и $x = 7$.

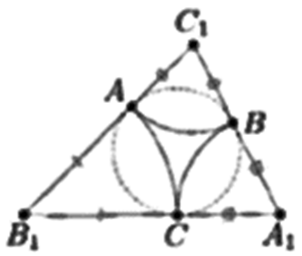
$S(6) = (4 \cdot 6^3 + (20-6)^3) = 864 + 2744 = 3608$ (тысяч рублей);

$S(7) = (4 \cdot 7^3 + (20-7)^3) = 1372 + 2197 = 3569$ (тысяч рублей).

IV. Ответ. Искомая сумма 3 569 000 рублей.

Геометрический метод решения математических задач заключается в том, что в условие задачи вводится геометрический объект, например, геометрическая фигура (треугольник, четырехугольник, окружность, вектор, многогранник и т.д.). К геометрическим методам относятся методы построения с помощью циркуля и линейки, метод геометрических преобразований плоскости.

Пример № 2.3.16: решение задачи геометрическим методом. Даны три точки *A*, *B* и *C*. Объясните, как построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках [5].



Идея решения: пусть A_1, B_1, C_1 – центры искомых окружностей. Тогда в треугольнике $\triangle A_1B_1C_1$:

$B_1A = B_1C,\ C_1A = C_1B,$

$A_1B = A_1C$.

Рис. 2.3.5

Значит, данные точки *A*, *B* и *C* являются точками касания окружности, вписанной в треугольник $\triangle A_1B_1C_1$.

Таким образом, решение сводится к построению окружности, проходящей через точки *A*, *B* и *C* и касательных к ней в этих точках. Центры искомых окружностей – точки попарного пересечения этих касательных.

Пример № 2.3.17: решение задачи геометрическим методом. Прямолинейный участок дороги шириной 10 м и длиной 100 м требуется покрыть асфальтом толщиной 5 см. Сколько потребуется пятитонных машин асфальта, если известно, что объемный вес асфальта равен 2,4 т/м^3)?

Решение. 1. Задача свелась к нахождению объема прямоугольного параллелепипеда по формуле $V = abc$, где a – ширина дороги, b – длина дороги, c – толщина асфальта.

$$V = 10 \cdot 100 \cdot 0,05 = 50\ м^3.$$

2. Вес всего асфальта равен $2,4 \cdot 50 = 120$ т.

3. Ответ: количество машин равно $120 : 5 = 24$.

Векторно-координатный метод решения математических задач состоит в применении элементов векторной алгебры. Он эффективен в задачах на вычисление расстояний, углов, выяснения взаимного расположения прямых и кривых на плоскости, выяснения взаимного расположения точек, прямых, плоскостей и поверхностей и в пространстве, доказательства геометрических тождеств и решения неравенств.

Пример решения алгебраической задачи координатным методом. Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \geq 2\sqrt{5}, \\ \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} \leq 2\sqrt{13}. \end{cases}$$

Решение. I. Анализ условия. Задана система неравенств с двумя неизвестными, содержащая корни.

II. Поиск решения. Прежде чем приступать к решению, вспомним кое-что из теории. Вспомним, чему равно расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Применим эту формулу к заданным неравенстам.

III. Осуществление решения.

1. Рассмотрим первое уравнение. Возьмем точки $O(0;0)$ и $A(2;4)$. Тогда $M(x, y)$ – искомая. Найдем расстояния между этими точками:

$$MO = \sqrt{x^2 + y^2},\ MA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2},$$

$$AO = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

По первому уравнению мы видим, что $MO - MA \geq OA \to MO \geq OA + MA.$ Пусть эти точки не лежат на одной прямой, тогда они образуют треугольник. А это значит, что мы можем использовать неравенство треугольника, т.е. $MO < OA + MA.$ Получается, что единственный возможный вариант: $MO = OA + MA$, а это значит, что точки лежат на одной прямой $(O - A - M)$. Используем уравнение прямой $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, подставив численные значения, получим следующее: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} \to 2x = y.$

2. Рассмотрим второе уравнение. Возьмем точки $C\left(0, 8\right)$ и $D\left(6, 4\right)$, точка $M\left(x, y\right)$ – по-прежнему искомая. Найдем расстояния между точками:

$$MC = \sqrt{x^2 + \left(y - 8\right)^2},\ MD = \sqrt{\left(x - 6\right)^2 + \left(y - 4\right)^2},$$

$$CD = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Аналогично $CD = MC + MD\left(C - M - D\right)$. Используем уравнение прямой и получим

$$\frac{x - 0}{6} = \frac{y - 8}{4 - 8} \to \frac{x}{6} = \frac{y - 8}{-4} \to$$

$$-4x = 6\left(y - 8\right) \to 3y + 2x - 24 = 0.$$

Используем то, что мы получили из первого уравнения:

$$3y + y - 24 = 0 \to 4y - 24 = 0 \to y = 6 \to x = 3.$$

Ответ: решением неравенства является точка $M\ (3,\ 6)$.

Пример № 2.3.18: решение алгебраической задачи векторно-координатным методом. Доказать, что если

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ то } \sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} + \sqrt{z^4 + 1} \geq \sqrt{10}.$$

1. Рассмотрим на плоскости векторы:

$$\vec{a}\left\{x^2; 1\right\}, \vec{b}\left\{y^2; 1\right\}, \vec{c}\left\{z^2; 1\right\}.$$

2. Тогда $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^4 + 1}, \left|\vec{b}\right| = \sqrt{y^4 + 1}, \left|\vec{c}\right| = \sqrt{z^4 + 1}.$

3. Пусть $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, тогда

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 + \left(1 + 1 + 1\right)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\text{и } \left|\vec{d}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| + \left|\vec{c}\right|.$$

Если в последнее неравенство подставить выражения для длин векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, то получим неравенство, которое требуется доказать.

Пример № 2.3.19: решение стереометрической задачи векторно-координатным методом. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с основанием $ABCD$ высота и сторона основания равны 4, точки E и F – середины ребер AM и DC соответственно. Найти расстояние между прямыми BE и FM.

Решение.

I. Анализ условия. Задана правильная четырехугольная пирамида. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

II. Поиск решения. Расстояние между прямыми есть их общий перпендикуляр. Попробуем найти его, используя векторно-координатный метод.

Введем декартову систему координат следующим образом.

Пусть начало координат O находится в центре основания, ось Ox проходит через точку O параллельно ребру AD, ось Oy проходит через точку O параллельно ребру AB, ось Oz проходит через точку O перпендикулярно плоскости основания.

Тогда вершины пирамиды и точки на ребрах имеют координаты $A(-2;-2;0)$, $B(-2;2;0)$, $C(2;2;0)$, $D(2;-2;0)$, $M(0;0;4)$, $E(-1;-1;2)$, $F(2;0;0)$.

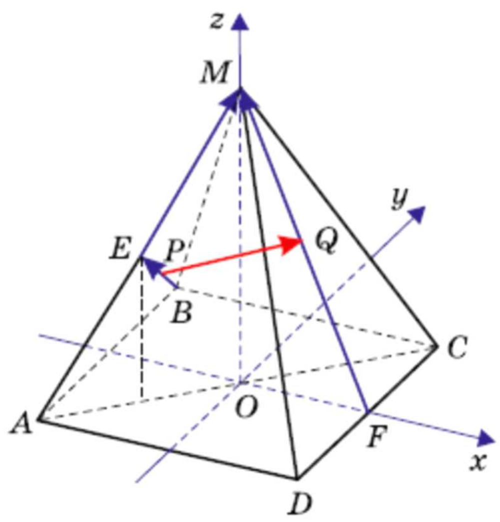


Рис. 2.3.6

Расстояние между скрещивающимися прямыми найдем как длину вектора через его координаты. Координаты искомого вектора найдем из условия перпендикулярности.

III. Осуществление решения.

1. Введем векторы и найдем их координаты:

$\overrightarrow{BE} = \vec{q}_1 = \{1;-3;2\}$, $\overrightarrow{FM} = \vec{q}_2 = \{-2;0;4\}$, $\overrightarrow{EM} = \vec{m} = \{1;1;2\}$.

2. Тогда

$$\vec{q}_1^{\,2} = 1\cdot 1 + (-3)\cdot(-3) + 2\cdot 2 = 14,$$

$$\vec{q}_2^{\,2} = (-2)\cdot(-2) + 0\cdot 0 + 4\cdot 4 = 20,$$

$$\vec{m}^{\,2} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 6,$$

$$\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2 = 1\cdot(-2) + (-3)\cdot 0 + 2\cdot 4 = 6,$$

$$\vec{q}_1\cdot\vec{m} = 1\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 2\cdot 2 = 2,$$

$$\vec{q}_2\cdot\vec{m} = (-2)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 4\cdot 2 = 6.$$

3. Пусть PQ есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BE и FM. Представим вектор $\overrightarrow{PQ}$ в виде разложения: $\overrightarrow{PQ} = x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2$.

Из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{PQ}$ векторам $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ получаем:

$$\begin{cases}\left(x\cdot\overrightarrow{q_1}+\overrightarrow{m}+y\cdot\overrightarrow{q_2}\right)\cdot\overrightarrow{q_1}=0,\\ \left(x\cdot\overrightarrow{q_1}+\overrightarrow{m}+y\cdot\overrightarrow{q_2}\right)\cdot\overrightarrow{q_2}=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\cdot\overrightarrow{q_1}^2+\overrightarrow{m}\overrightarrow{q_1}+y\cdot\overrightarrow{q_1}\overrightarrow{q_2}=0,\\ x\cdot\overrightarrow{q_1}\overrightarrow{q_2}+\overrightarrow{m}\overrightarrow{q_2}+y\cdot\overrightarrow{q_2}^2=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}14x+2+6y=0,\\ 6x+6+20y=0.\end{cases}$$

Отсюда $x=-\dfrac{1}{61}$, $y=-\dfrac{18}{61}$.

4. Тогда $\overrightarrow{PQ}=x\cdot\overrightarrow{q_1}+\overrightarrow{m}+y\cdot\overrightarrow{q_2}$, $\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{1}{61}\cdot\overrightarrow{q_1}+\overrightarrow{m}-\dfrac{18}{61}\cdot\overrightarrow{q_2}$.

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{61}\{96;\,64;\,48\}.$$

5. Длина $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\dfrac{1}{61}\sqrt{96^2+64^2+48^2}=\dfrac{16\sqrt{61}}{61}$.

IV. Ответ: расстояние между прямыми BE и FM равно $\dfrac{16\sqrt{61}}{61}$.

Метод математического моделирования.

Математическое моделирование – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.

Метод математического моделирования чаще всего применяется при решении текстовых задач, при этом можно выделить такие этапы математического моделирования.

Этап 1. Составление высказывательной модели задачи на основе словесной модели (восприятие и анализ задачи).

Этап 2. Составление вспомогательной модели задачи (поиск плана решения задачи).

Этап 3. Составление математической модели (составление плана решения задачи).

Этап 4. Выбор метода решения (алгебраический или арифметический способ решения задачи).

Этап 5. Реализация математической модели (выполнение плана задачи).

Этап 6. Анализ полученного и предполагаемого ответа задачи.

Этап 7. Проверка решения и устранение ошибок, если они есть. Формулировка окончательного ответа

Несмотря на то, что указанные выше методы являются методами математического моделирования для построения математической модели, выделим его отдельно для определенных ситуаций. Речь идет о тех задачах, в которых полученные уравнения, неравенства, системы уравнений или неравенств являются нестандартными для большинства учащихся. Как правило, в таких задачах на переменные накладываются дополнительные условия. В задачах, решение которых рекомендуется проводить методом моделирования, в отличие от методов, рассмотренных выше, имеется несколько ответов.

Пример № 2.3.20. Мебельная фабрика выпускает три вида мягкой мебели – диваны, кресла и пуфики. Производственные мощности фабрики позволяют выпускать в день 60 диванов или 150 кресел, или 350 пуфиков. По требованиям к ассортименту, которые предъявляют торговые сети, диванов должно выпускаться не менее 25 шт., пуфиков не менее 40 шт., а кресел ровно в 2 два раза больше, чем диванов. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена фабрики за единицу изделия каждого вида [42]. При каком объеме производства прибыль будет максимальная?

Вид изделия	Себестоимость, за 1 шт.	Отпускная цена, за 1 шт.
Диван	9 000	12 600
Кресло	4 000	5 950
Пуфик	1 250	2 000

Решение. I. Анализ условия и поиск решения.

1. По условию задачи речь идет о трех взаимосвязанных объектах: количестве каждого вида мягкой мебели, производственные мощности фабрики на выпуск одной продукции, прибыль от реализации каждого вида продукции.

2. Введем обозначения:

x – число выпускаемых фабрикой диванов ($x \geq 25$);

y – число выпускаемых фабрикой пуфиков ($y \geq 40$).

$2x$ – число выпускаемых фабрикой кресел.

3. Опишем математически производственные мощности фабрики:

На выпуск одного дивана затрачивается $\frac{1}{60}$ производственной мощности; на выпуск одного пуфика – $\frac{1}{150}$; на выпуск одного кресла – $\frac{1}{350}$.

Сумма производственных мощностей, затрачиваемых на выпуск x диванов, $2x$ кресел и y пуфиков не может превосходить полной мощности фабрики, т.е.

$$\frac{x}{60} + \frac{2x}{150} + \frac{y}{350} \leq 1.$$

4. Прибыль всей фабрики будет вычисляться как сумма прибыли от каждой единицы товара. Опишем математически прибыль фирмы от реализации каждого вида товаров.

$(12600 - 9000) \cdot x = 3600x$ – прибыль от реализации диванов,

$(5950 - 4000) \cdot 2x = 3900x$ – прибыль от реализации кресел,

$(2000 - 1250) \cdot y = 750y$ – прибыль от реализации пуфиков.

Прибыль от всей продукции будет вычисляться по формуле:

$S = 3600x + 3900x + 750y \;\; \rightarrow \;\; S = 750 \cdot (10x + y)$.

Задача свелась к нахождению натуральных x и y, удовлетворяющие системе условий:

$$\begin{cases} S = 750\cdot(10x+y) \to \max \\ \dfrac{x}{60}+\dfrac{2x}{150}+\dfrac{y}{350} \le 1, \\ x \ge 25,\ y \ge 40. \end{cases}$$

II. Осуществление решения.

1. Преобразуем правую часть второго неравенства:

$$\frac{x}{60}+\frac{2x}{150}+\frac{y}{350}=\frac{3x}{100}+\frac{y}{350}=\frac{105x+10y}{3500}.$$

2. Упростим второе неравенство и выразим y через x:

$$\frac{x}{60}+\frac{2x}{150}+\frac{y}{350}\le 1 \to 105x+10y \le 3500 \to y \le \frac{3500-105x}{10}.$$

3. Из условия $y \ge 40$ найдем область допустимых значений переменной x:

$$\frac{3500-105x}{10} \ge 40 \to 3500-105x \ge 400 \to$$

$$-105x \ge -3100 \to x \le 29{,}52.$$

4. Переменная x принимает только целые положительные значения, т.е. $25 \le x \le 29$.

5. По формуле $y \le \dfrac{3500-105x}{10}$ можем найти соответствующие значения y.

6. По формуле $S = 750\cdot(10x+y)$ можем найти прибыль. Без потери смысла можем находить прибыль по более упрощенной формуле $\tilde{S} = 10x+y$.

7. Представим в таблице расчеты:

x	$y=\left[\dfrac{3500-105x}{10}\right]$ целая часть числа	$\tilde{S}=10x+y$ ожидаемая прибыль
$x_1 = 25$	$y=\left[\dfrac{3500-105x}{10}\right]=\left[\dfrac{3500-105\cdot 25}{10}\right]=[87{,}5]=87$	$\tilde{S}_1 = 10\cdot 25+87=337$
$x_2 = 26$	$y=\left[\dfrac{3500-105x}{10}\right]=\left[\dfrac{3500-105\cdot 26}{10}\right]=[77]=77$	$\tilde{S}_1 = 10\cdot 26+77=337$
$x_3 = 27$	$y=\left[\dfrac{3500-105x}{10}\right]=\left[\dfrac{3500-105\cdot 27}{10}\right]=[66{,}5]=66$	$\tilde{S}_3 = 10\cdot 27+66=336$

$x_4 = 28$	$y = \left[\dfrac{3500 - 105x}{10}\right] = \left[\dfrac{3500 - 105 \cdot 28}{10}\right] = [56] = 56$	$\tilde{S}_4 = 10 \cdot 28 + 56 = 336$
$x_5 = 29$	$y = \left[\dfrac{3500 - 105x}{10}\right] = \left[\dfrac{3500 - 105 \cdot 29}{10}\right] = [45{,}5] = 45$	$\tilde{S}_5 = 10 \cdot 29 + 45 = 335$

5. Сравнивая между собой значения $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{S}_4, \tilde{S}_5$, видим, что наибольшее возможное значение равно 337 и достигается при $x = 25, y = 87$ и $x = 26, y = 77$.

III. Ответ. Оптимальных производственных планов два:

– диванов 25 штук, пуфиков 87 штук, кресел 50 штук;

– диванов 26 штук, пуфиков 77 штук, кресел 52 штуки.

Замечание. *Если задача – плохо определенная, в ней имеются неопределенные неизвестные или неясная связь между данными и искомыми, то надо ввести столько вспомогательных элементов, чтобы задача стала строго определенной, и тогда применить один из указанных выше методов.*

Математические методы усваиваются лучше всего не повторением однообразных примеров, а рассмотрением одного метода в разных ситуациях. Общая идея решения математических задач: чтобы решить какую-либо новую задачу, надо свести ее с помощью одного из перечисленных методов к одной или нескольким ранее решенным задачам.

При ознакомлении учащихся с методами решения задач на современном этапе развития образования следует опираться на соответствие этапов моделирования при решении текстовых задач и этапов моделирования в широком смысле. Это позволит не только выполнять требования нормативных документов в части решения задач и моделирования, но и формировать и развивать метапредметные умения обучающихся.

2.4. Особенности решения задач по алгебре и геометрии

«Геометрия полна приключений,
потому что за каждой задачей скрывается
приключение мысли.
Решить задачу – это значит
пережить приключение.»
В. Произволов

Задачи по каждому разделу математики имеют свои особенности в решениях. В задачах курса алгебры это наличие алгоритмов и специальных приемов в решении тематических задач. В задачах по геометрии особое место занимают задачи на доказательство и специальные приемы решения геометрических задач.

Особенность алгебры такова, что она перенасыщена формальными компонентами деятельности. Это создает определенные сложности в усвоении ее содержания. Как показал анализ, большинство алгебраических задач ориентировано на использование стандартных методов решения, представляющих собой алгоритмы. Алгоритм – это совокупность четко определённых правил для решения задачи за конечное число шагов или последовательность выполнения действий при решении задачи для получения ответа [46].

Алгоритм приучает к четкому выполнению последовательности операций, такие навыки пригодятся и в смежных дисциплинах информатики, физики, химии, а также для предотвращения различного рода ошибок. Однако, применение только алгоритмических методов снижает уровень самостоятельности учащихся в процессе поиска путей решения алгебраической задачи.

Алгебра – наиболее алгоритмизированный раздел математики, поэтому имеется проблема совместимости алгоритмизации математического материала с необходимостью мыслить нестандартно.

Алгоритмичность алгебры является ее спецификой, исключить которую невозможно, но можно нейтрализовать отрицательные стороны этого явления путем обучения «эвристическим приемам» решения алгебраических задач.

Эвристика связана с «думыванием около», с пробами, когда строгое течение мысли на отдельных микроэтапах перемежается с интуитивными находками, обоснование которых мысленно откладывается «на потом».

Специальные методы решения задач по алгебре условно разделим на четыре группы:

– методы решения задач из теории чисел;

– методы разложения многочленов на множители;

– методы решения уравнений и неравенств;

– методы исследования функций и построения графиков.

Специальный метод № 1. К первой группе методов отнесем такие методы как метод математической индукции, принцип Дирихле, основную теорему арифметики, комбинаторные соединения, методы решения уравнений в целых числах, методы решения задач на перебор и свойства делимости, применение сравнений в решении задач на целые числа, методы решения задач на «целую часть числа».

Метод математической индукции основан на аксиоме индукции. Если известно, что некоторое утверждение верно для 1, и из предположения, что утверждение верно для некоторого n, вытекает его справедливость для $n+1$, то это утверждение верно для всех натуральных чисел.

Пример № 2.4.1. Докажите, что $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех $n \in N_0$.

Решение.

1. Проверим для $n = 0$: $5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 16$ делится на 16.
2. Проверим для $n = 1 : 5^1 - 4 \cdot 1 + 15 = 32$ делится на 16.
3. Предположим, что для $n = k : 5^k - 4k + 15$ делится на 16.
4. Докажем, что это верно для $n = k + 1 : 5^{k+1} - 4(k+1) + 15$.
5. Выполним ряд преобразований:

$$5^{k+1} - 4(k+1) + 15 = 5 \cdot 5^k - 4k + 11 = 5 \cdot 5^k - 4k \cdot 5 + 15 \cdot 5 + 4k \cdot 5 -$$

$$-15\cdot 5+11=5\left(5^k-4k+15\right)+20k-75-4k+11=$$
$$=5\left(5^k-4k+15\right)+16\left(k-4\right).$$

Так как слагаемые получившейся суммы делятся на 16, то и вся сумма будет делиться на 16.

Вывод. Утверждение верно для $n=0,1,2$. Если утверждение верно для $n=k$, то она верно и для $n=k+1$. Тогда утверждение верно для любого целого неотрицательного n, что и требовалось доказать.

Принцип Дирихле – это логический метод рассуждения, одна из форм метода от противного: в каждой совокупности из n множеств, в которой общее число элементов больше n существует по крайней мере одно множество, содержащее не меньше двух элементов. Традиционная формулировка обобщенного принципа Дирихле: если в k клетках сидят больше nk кроликов, то хотя бы в одной клетке больше n кроликов.

Пример № 2.4.2. Докажите, что среди москвичей, количеством более 5 миллионов человек, есть минимум два человека с равным числом волос, если известно, что у любого человека на голове менее одного миллиона волос.

Решение. Перед нами 5 000 000 «кроликов»-человек и, увы, всего лишь 1 000 000 клеток с номерами от 0 до 999 999. Каждый «кролик»-человек “сажается нами в клетку с номером”, равным количеству волос на голове. Так как «кроликов» гораздо больше, чем клеток, то в какой-то клетке сидит по крайней мере два «кролика» – если бы в каждой сидело не более одного, то всего «кроликов»-человек было бы не более 1000000 штук. Но ведь, если два «кролика»-человека “сидят в одной клетке”, то количество волос у них одинаково.

Основная теорема арифметики, которая формулируется следующим образом: «Всякое натуральное число, большее 1, раскладывается и только одним способом (с точностью до порядка сомножителей) в произведение простых чисел».

Пример № 2.4.3. Найдите все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

Решение. Математически запишем условие задачи: $(10x+y)^2=(x+y)^3$.

Значит, данное число должно быть кубом натурального числа, а сумма его цифр – квадратом натурального числа.

Двузначные кубы: 27, 64, 81. Проверяем: подходит 27.

Специальный метод № 2. Разложение на множители многочленов с использованием теоремы Виета, теорему Безу, метода неопределенных коэффициентов.

В алгебраических задачах, в которых требуется разложить многочлен на множители часто оказывается полезным подход, который называется методом неопределенных коэффициентов. Сначала записывается предполагаемое разложение с неизвестными (неопределенными) коэффициентами. После раскрытия скобок получается выражение, которое должно совпадать с исходным. Равенство коэффициентов при соответствующих одночленах дает систему уравнений, из которой находятся неопределенные коэффициенты, а, тем самым, и разложение на множители.

Пример № 2.4.4. Решить уравнение $2x^4-x^3-9x^2-x+1=0$.

Решение.

1. Разложим левую часть уравнения на множители методом неопределенных коэффициентов. Пусть выполняется равенство:

$$2x^4-x^3-9x^2-x+1=\left(ax^2+bx+c\right)\cdot\left(kx^2+lx+n\right),$$

где a, b, c, k, l, n – целые числа.

3. Перемножим справа скобки и приведем подобные, получим:

$$2x^4-x^3-9x^2-x+1=akx^4+(al+bk)x^3+$$
$$+(an+ck+bl)x^2+(bn+cl)x+cn.$$

4. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие коэффициенты. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} ak = 2, \\ al + bk = -1, \\ an + ck + bl = -9, \\ bn + cl = -1, \\ cn = 1. \end{cases}$$

5. Решим полученную систему нелинейных уравнений. Заметим, что $ak = 2$ и $cn = 1$, т.к. $a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}, c \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$, то возможен один из следующих случаев:

$$a = 1,\ k = 2;\ a = 2,\ k = 1;\ a = -2,\ k = -1; a = -1,\ k = -2;$$
$$c = 1,\ n = 1;\ c = -1,\ n = -1.$$

Составим таблицу и воспользуемся методом перебора.

a	*b*	*c*	*k*	*l*	*n*	*Удовлетворяют ли значения системе*
1	0	1	2	-1	1	–
1	-2	-1	2	3	-1	+

6. Таким образом нашли значения коэффициентов, получим:

$$2x^4 - x^3 - 9x^2 - x + 1 = \left(x^2 - 2x - 1\right) \cdot \left(2x^2 + 3x - 1\right).$$

7. Приравняв правую часть к нулю, найдем корни уравнения.

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \to x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2};$$
$$2x^2 + 3x - 1 = 0 \to x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

8. Ответ: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Специальный метод № 3. Методы решения уравнений и неравенств основаны на приемах разложения на множители, введении новой переменной, методе минимакса, дискриминатном методе, графическом решении и обобщенном методе интервалов, методе геометрической подстановки, приеме «добавить и отнять» и т.д.

Метод минимаксов применим к большому классу нестандартных задач. Если требуется решить уравнение $f(x)=h(x)$ и на общей области определения E функции $f(x)$ и $h(x)$ выполняются неравенства: $f(x)\le A$ $\left(f(x)\ge A\right)$ и $h(x)\ge A$ $\left(h(x)\le A\right)$, то уравнение $f(x)=h(x)$ равносильно системе: $\begin{cases} f(x)=A, \\ h(x)=A. \end{cases}$

Обобщенный метод интервалов – универсальный метод решения неравенств.

Пример № 2.4.5: эффективного применения обобщенного метода интервалов для решения логарифмического неравенства.

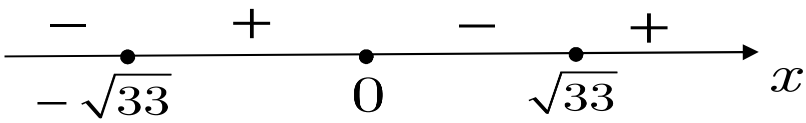
Решить неравенство

$$\left(x^3-33x\right)\cdot\log_{4x+5}\left(x^2-11x+31\right)\le 0.$$

Решение. Приравняем каждый множитель к нулю и найдем точки, в которых множитель меняет свой знак.

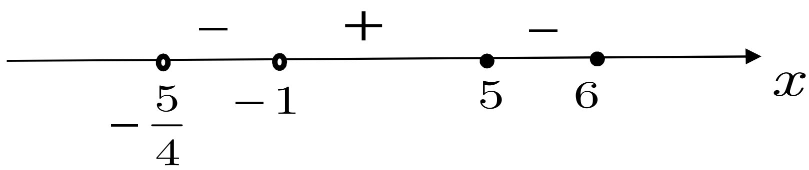
1. Приравняем первый множитель к нулю:

$$x^3-33x=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{33}.$$

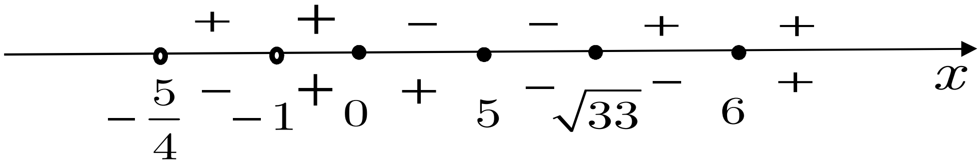


2. Приравняем второй множитель к нулю:

$$\log_{4x+5}\left(x^2-11x+31\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-11x+31=1, \\ x\ne -1, \\ x>-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$



3. Объединим найденные интервалы:



4. Как видно исходное неравенство будет меньше нуля только в тех интервалах, в которых множители принимают разные знаки.

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{5}{4};-1\right) \cup [0,5] \cup \left[\sqrt{33};6\right]$.

Метод геометрической подстановки. Решение некоторых алгебраических уравнений, неравенств, систем упрощается, если придать входящим в них выражениям геометрический смысл. Например, изобразить соответствующие уравнениям или неизвестным кривые или области в декартовой системе координат и рассмотреть их взаимное расположение. Истолковать уравнение или неравенство как алгебраическое соотношение между длинами сторон и углами каких-либо геометрических фигурах, пользуясь теоремами геометрии. Интерпретировать уравнение или неравенство в виде соотношения между векторами.

Пример № 2.4.6: применения геометрической подстановки при решении текстовой задачи. Поезд должен был пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан у семафора на 8 мин. Увеличив скорость после этого на 10 км/ч, он прибыл на место назначения по расписанию. Определить первоначальную скорость поезда.

Решение. Так как в задаче рассматривается равномерное движение, то пройденный путь можно представить в виде произведения скорости и времени движения. Пусть сторона AB прямоугольника $ABCD$ изображает первоначальную скорость поезда (км/ч), а сторона AD – время его движения (ч).

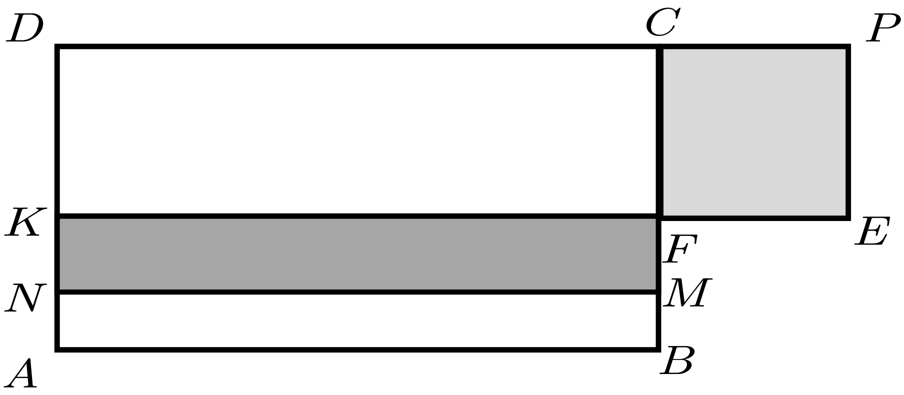


Рис. 2.4.1

1. Площадь прямоугольника $ABCD$ определяет весь путь, который должен пройти поезд (км): $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 54$.

2. Введем переменные: $AB = x$, $S_{ABMN} = 14$.

3. Площадь прямоугольника $NKFM$ равна площади прямоугольника $FCPE$, т.е. $\frac{2}{15}x = 10 \cdot \frac{40}{x+10}$. После преобразований имеем: $x^2 + 10x - 3000 = 0$, откуда $x_1 = 50$, $x_2 = -60$.

4. Формулируем ответ: первоначальная скорость поезда была 50 км/ч.

Пример № 2.4.7: решения уравнения с помощью приема «добавить и отнять». Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Решение. Добавим и вычтем в левой части удвоенное произведение квадратов синуса и косинуса, получим:

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}\sin^2 2x \Leftrightarrow 1 = \sin^2 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Специальный метод № 4. Исследование функций можно проводить элементарными методами и с помощью производной функции.

Пример № 2.4.8: построения графика функции с помощью элементарных методов. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 1}{|x-1|} + 3$.

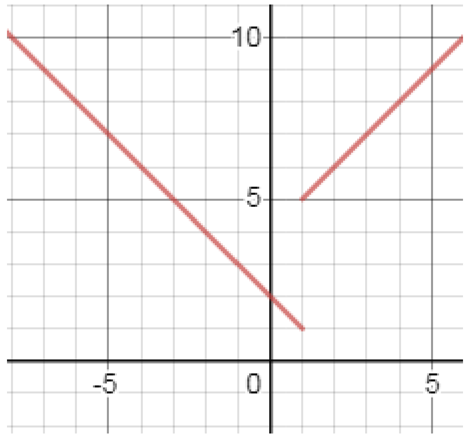


Рис. 2.4.2

Решение. Раскроем модуль по определению и построим график кусочно-заданной функции

$$y = \begin{cases} x + 4,\ x > 1, \\ 2 - x,\ x < 1, \\ \textit{не существ.},\ x = 1. \end{cases}$$

Пример № 2.4.9: решения текстовой задачи с применением производной функции. Найти наименьшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$[2].

Решение.

1. Составим функцию расстояния между параболой и прямой, принимая за аргумент абсциссу точки $M\left(x, x^2\right)$, которая принадлежит параболе и «свободно перемещается по ней».

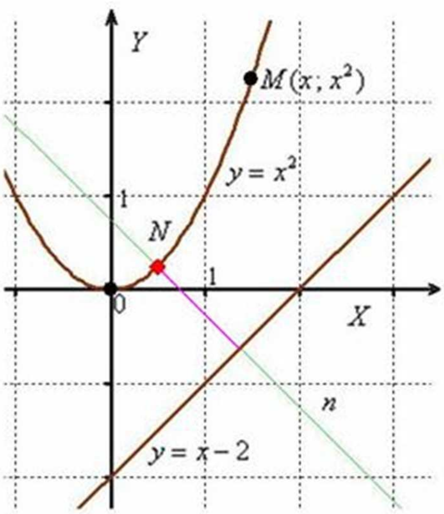


Рис. 2.4.3

Для этого воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой: $\rho(M, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

2. Подставим данные из условия задачи, получим функцию расстояния между параболы до прямой:

[2] mathprofi.ru

$$f(x)=\frac{\left|1\cdot x-1\cdot x^2-2\right|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|x-x^2-2\right|.$$

3. Найдем производную составленной функции и критическую точку: $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left|x-x^2-2\right|\right)'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|1-2x\right|=0$.

Критическая точка $x=\frac{1}{2}$.

4. Проверим выполнение достаточного условия экстремума: $f''(x)=\frac{2}{\sqrt{2}}=const>0\ \forall\ x\in R$.

5. Найдем значение функции в точке $x=\frac{1}{2}$:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{2}}\approx 1,24.$$

Ответ. Кратчайшее расстояние между параболой и прямой равно 1,24 ед.

При решении математических задач наряду с вышеуказанными методами используются так же следующие методы:

– методы решения логических задач на основе алгебры Буля;

– методы решения комбинаторных задач;

– методы решения задач на оптимизацию;

– методы решения задач «на графах»;

– методы решения задач, в которых используется аппарат теории множеств;

– методы доказательства неравенств.

О специальных методах решения геометрических задач. Как показывают результаты экзаменов, тестирование студентов-первокурсников и опросы учителей, учебный предмет «Геометрия» является одним из самых сложных учебных предметов в школе. Преградой на пути к реализации педагогического потенциала геометрии в развитии интеллектуального потенциала учащихся, служат такие причины, как: недостаточное количество времени на формирование геометрических понятий и умений, низкая мотивация учащихся к изучению геометрии, познавательные барьеры в усвоении геометрических понятий и умений.

Геометрия обладает большими возможностями в развитии интеллектуального потенциала учащихся. Изучая пространственные формы окружающего мира, выявляя наиболее общие закономерности, происходит одновременное развитие пространственных представлений и логического мышления. Только в геометрии можно проследить всю логическую стройность математики, взаимосвязь аксиоматического метода и практических задач. Геометрия – уникальный раздел математики, потому как в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением, как следствие, у учащихся развивается логическое мышление, пространственное воображение и практическое понимание математики.

Результаты экзаменов наглядно демонстрируют трудности в решении геометрических задач, выраженные в типичных ошибках, таких как:

– невнимательное чтение условия задачи (например, угол ABC читают как ACB);

– ошибки в применение формул, а именно в незнании соотношений между величинами геометрических фигур;

– неумение доказывать, непонимание взаимосвязи элементов геометрических конструкций, очень часто встречались ошибки в теоретических фактах;

– незнание специальных методов и приемов, на основе которых построена задача.

Много встречается разного рода логических ошибок, примером которых является следующее рассуждение «предположим, что точки лежат в одной плоскости», «пусть треугольник ABC будет прямоугольным».

Наиболее сложной задачей в профильном уровне ЕГЭ является планиметрическая задача, поскольку каждый год она выполняется значительно хуже заданий высокого уровня, что также свидетельствует о недостаточной подготовленности учащихся. Типичные ошибки связаны в первую очередь с неверным понимание логики построения доказательств. Многие учащиеся в выводах не считали нужным доказывать геометрические факты конструкции, используемые в решении.

Специальные методы решения геометрических задач.

При решении геометрических задач весьма условно выделим четыре группы методов.

К первой группе будем относить методы решения геометрических задач, основанные на понятиях основных геометрических фигур и их свойствах.

Ко второй группе методов будем относить векторно-координатный метод решения геометрических задач.

К третьей группе отнесем геометрические преобразования и их применение при решении геометрических задач.

К четвертой группе будем относить методы построения с помощью циркуля и линейки.

В настоящей работе дадим краткий обзор только методов первой группы.

К специальным методам решения геометрических задач, основанных на понятиях, их определениях, свойствах и признаках, отнесем следующие методы.

Метод № 1. Расчет треугольников, зная определенные элементы в треугольнике, найти все остальные элементы с использованием основных формул.

Как правило, решение любой геометрической задачи сводится к нахождению величины угла или величины отрезка.

Поэтому учащемуся нужно знать, какие теоретические основания помогут это определить.

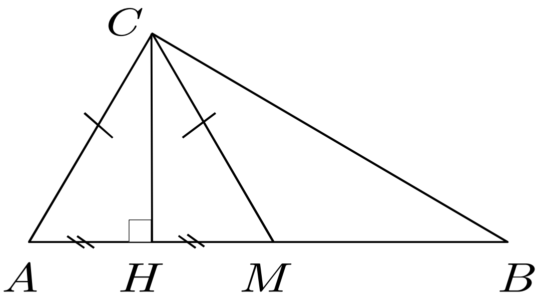
Равенство треугольников позволит установить равные элементы.

Подобие, теорема синусов, косинусов, теоремы о биссектрисах, медианах, формулы для нахождения площадей позволяют составлять равенства, связывающее и углы, и стороны в треугольнике.

Наличие прямого угла в треугольнике приводит к значительным упрощениям многих формул, позволяя значительно сократить процесс решения задачи и связать многие элементы в треугольнике известными теоремами (Теорема Пифагора, определения тригонометрических соотношений в треугольнике, особенности вписанной и описанной окружности и т.д.).

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника обладают рядом замечательных свойств, позволяющим устанавливать дополнительные взаимосвязи элементов между собой.

Пример № 2.4.10. В произвольном треугольнике из одного угла проведены высота и медиана так, что они делят угол на три равные части. Найти величину этого угла.



Дано: $\triangle ABC$, $AH \perp AB$, $AM = MB$. $\angle ACH = \angle HCM = \angle MCB$

Найти: $\angle C$ – ?

Решение.

Рис. 2.4.4

I. Анализ условия. Задан треугольник, в котором высота и медиана разбивают его на три треугольника с одинаковыми углами. Числовых данных не задано, следовательно, необходимо обратить внимания на определения и свойства понятий «высота» и «медиана».

II. Поиск решения. Заметим, что $\triangle CAM$ – равнобедренный, а в $\triangle HCB$ отрезок CM является биссектрисой. По теореме о свойстве биссектрисы составим отношение отрезков.

III. Осуществление решения.

1. Рассмотрим $\triangle CAM$: CH – биссектриса и высота, следовательно $\triangle CAM$ – равнобедренный:

$$\angle CAM = \angle CMA,\ AH = HM.$$

2. Рассмотрим $\triangle HCB$. По теореме о биссектрисе:

$$\frac{CH}{CB} = \frac{HM}{MB} = \frac{1}{2} \to CH = \frac{1}{2}CB.$$

3. В $\triangle HCB$ катет равен половине гипотенузы, следовательно, $\angle B = 30^0$.

4. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle ACH = \angle HCM = \angle MCB = x$, тогда $\angle A = 90^0 - x$. По теореме о сумме углов в треугольнике, имеем $90^0 - x + 3x + 30^0 = 180^0$.

Решая уравнение, получим: $x = 30^0 \to \angle C = 3x = 90^0$.

IV. Ответ: $\angle C = 90^0$.

Понятие площади – одно из ключевых в геометрии. И не только потому, что вычисление площади часто является целью решения задачи, ее итогом. Площадь треугольника может выполнять «посреднические функции», выразив с помощью формул для площадей площадь треугольника разными способами, мы получаем недостающее замыкающее соотношение. Такой метод носит название «Метод площадей».

Образование подобных фигур – явление частое, возникающее в наличии дополнительных построений, наличия перпендикулярных прямых. «С помощью подобия иногда удается «связать» совершенно разрозненные отрезки геометрической конструкции, а из равенства соответствующих углов можно «увидеть» параллельность заданных в условии прямых» [19, с. 56].

Пример № 2.4.11. В треугольнике ABC с площадью, равной 1, медианой AE и биссектрисой CD, $BC{:}AC=2{:}3$. Найти площадь четырехугольника $BEOD$, где O – точка пересечения AE и CD [19, с. 49].

Решение.

I. Анализ и поиск решения.

Искомая площадь является частью площади треугольника ABE.

Введем вспомогательную переменную x, обозначив $BE = EC = x$, тогда $AC = 3x$.

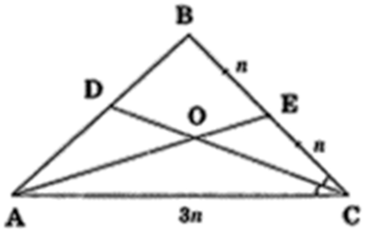


Рис. 2.4.5

Площадь четырехугольника $BEOD$ найдем как разность треугольников ABE и AOD.

II. Осуществление решения.

1. Площадь $S_{\vartriangle ABE} = \dfrac{1}{2} S_{\vartriangle ABC} = \dfrac{1}{2}$ (т.к. AE – медиана).

2. В треугольниках ABC и AEC, CD является биссектриссой, следовательно, по свойству биссектриссы

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}; \frac{AO}{OE} = \frac{3}{1}.$$

3. Отношение площадей $\dfrac{S_{\vartriangle ADO}}{S_{\vartriangle ABE}} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{4}$, $S_{\vartriangle ADO} = \dfrac{9}{40}$.

4. Таким образом, $S_{BEOD} = S_{\vartriangle ABE} - S_{\vartriangle ADO} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{40} = \dfrac{11}{40}$.

III. Ответ: площадь четырехугольника $BEOD$ равна $\dfrac{11}{40}$.

Важно обратить внимание на применение тригонометрии при решении геометрических задач, поскольку тригонометрические функции выражают соотношения между элементами прямоугольного треугольника [19, с. 68].

Метод № 2. Расчет четырехугольников заключается в выявлении независимых элементов для определения всех остальных элементов четырехугольника. Как правило, расчет произвольных четырехугольников – это «движение по треугольникам», на которые этот четырехугольник разбивается в процессе решения. В планиметрии существует две категории четырехугольников, главное отличительное свойство которых – наличие параллельных сторон. Это трапеции и параллелограммы. Естественно, такая особенность отражается на многих свойствах этих геометрических объектов, и, в первую очередь на количестве независимых элементов [19, с. 75].

Параллельность сторон в четырёхугольнике влечет за собой массу замечательных свойств, таких как равенство углов и отношение подобия сторон.

Пример № 2.4.12. Доказать, что середины сторон ромба служат вершинами прямоугольника, а середины сторон прямоугольника вершинами ромба.

Дано: $ABCD$ – ромб, E, F, K, L – середины соответствующих сторон AB, BC, CD, AD.

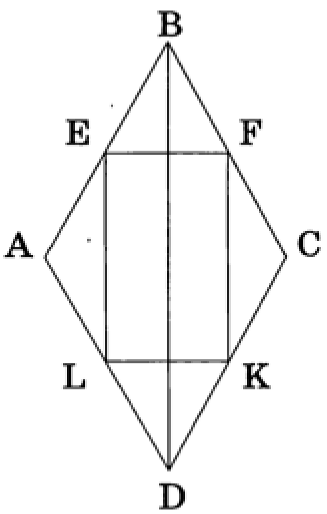


Рис. 2.4.6

Решение.

I. Анализ условия и поиск решения.

Докажем, что стороны четырехугольника $EFKL$ попарно параллельны. Для этого будем рассматривать средние линии треугольников ABD, BCD, ABC, ACD.

II. Осуществление решения.

1. Рассмотрим $\vartriangle ABD$:

EL – средняя линии, значит,

$$EL \,||\, BD,\ EL = \frac{BD}{2}.$$

2. Рассмотрим $\vartriangle BDC$: FK – средняя линии, значит,

$$FK \,||\, BD,\ FK = \frac{BD}{2}.$$

3. Получили $EL \,||\, FK$, $EL = FK$, следовательно,

$EFKL$ – параллелограмм.

4. Т.к. $AC \perp BD \to EF \perp EL \Rightarrow EFKL$ – прямоугольник.

Что и требовалось доказать.

Особую роль играет перенос пропорций в четырехугольнике с параллельными сторонами. Дело в том, что наличие параллельных прямых, заданных в условии задачи, часто позволяет при ее решении обойтись меньшим количеством дополнительных построений [19, с. 91].

Пример № 2.4.13. В прямоугольнике $ABCD$, площадь которого равна 30, на сторонах AB и AD выбраны соответственно точки E и F так, что $AE : EB = 5 : 1$, $AF : FD = 2 : 3$. Найти площадь треугольника FOD, где O – точка пересечения отрезков DE и CF.

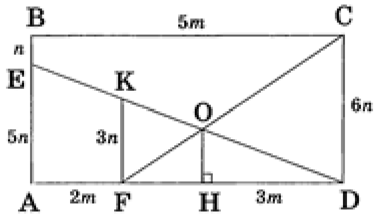


Рис. 2.4.7

Решение.

I. Анализ условия и поиск решения.

Задан прямоугольник, площадь которого известна.

Обозначим для удобства $BE = n$, $AF = 2m$. Тогда по условию и свойствам прямоугольника

$$AE = 5n,\ FD = 3m,\ CD = 6n,\ BC = 5m.$$

$$S_{ABCD} = 30mn = 30 \to mn = 1.$$

Задача свелась к выражению OH через n.

II. Осуществление решения.

1. Из точки F проведем прямую $FK \parallel CD$ до пересечения с ED в точке K. Тогда из подобия треугольников $\triangle FKD \sim \triangle AED$ получаем $FK = 3n$.

2. Из подобия треугольников $\triangle FKO \sim \triangle DCO$ находим:

$$\frac{FO}{OC} = \frac{1}{2} \to \frac{FO}{FC} = \frac{1}{3}.$$

3. Из подобия $\triangle FCD \sim \triangle FOH$ следует

$$\frac{OH}{CD} = \frac{FO}{FC} = \frac{1}{3} \Rightarrow OH = 2n.$$

4. Находим площадь треугольника

$$S_{FOD} = \frac{1}{2} FD \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot 2n = 3mn = 3.$$

III.Ответ: площадь искомого треугольника равна 3.

В процессе решения задач, содержащих четырехугольник, как правило, необходимо выполнить дополнительное построение.

Так, например, в задачах, в которых присутствует трапеция, следует уделить внимание таким построениям, как проведение прямой, параллельной одной из боковых сторон, проведение прямой, параллельной одной из диагоналей, проведение двух высот трапеции, достраивание трапеции до треугольника, вершина которого образуется при пересечении продолжений боковых сторон.

Пример № 2.4.14. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

Решение.

Через вершину меньшего основания BC проведем прямую параллельную диагонали BD, до пересечения с продолжением основания AD в точке K. Тогда:

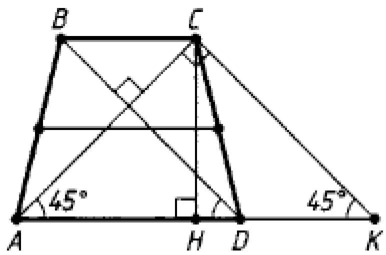


Рис. 2.4.8.

$$DK = BC, \angle ACK = 90^0, CK = BD = AC,$$

$$\angle CKA = \angle CAK = 45^0,$$

$$AK = AD + DK = AD + BC = 10,$$

$$CH \perp AD, CH = AH = \frac{1}{2}AK,$$

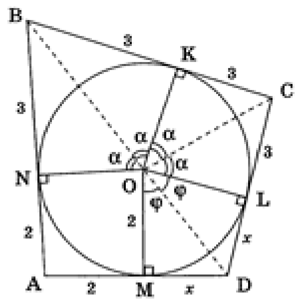
$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot AK = \frac{1}{4}AK^2 = 25.$$

Ответ: площадь трапеции равна 25.

Одним из методов нахождения площади произвольного четырехугольника является «метод площадей», подразумевающий нахождение площади четырехугольника как суммы площадей, составляющих его фигур, чаще всего треугольников. Весьма показательна следующая задача.

Пример № 2.4.15. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса 2. Угол DAB прямой. Сторона AB равна

5, сторона BC равна 6. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.



Дано: $ABCD$ – описанный четырехугольник,
$\gamma(O, r = 2)$ – вписанная окружность,
$\angle DAB = 90^0$, $AB = 5$, $BC = 6$,
Найти: S_{ABCD} – ?

Рис. 2.4.9

Решение.

I. Анализ решения. По условию задачи задан выпуклый четырехугольник, площадь которого надо найти. Известен радиус вписанной окружности и длины двух сторон четырехугольника. Задача относится к теме «вписанные и описанные четырехугольники».

II. Поиск решения. Т.к. представленный четырехугольник не является ни параллелограммом, ни трапецией, то найти его площадь можно как сумму площадей входящих в него фигур. Соединим центр с точками касания окружности сторон четырехугольника и вершинами четырехугольника. Получим, квадрат и шесть прямоугольных треугольников. Заметив, что отрезки касательных, проведенных их одной точки равны, мы сразу можем найти площадь квадрата и четырех треугольников. Задача свелась к нахождению площадей двух равных прямоугольных треугольников, в которых известен только один катет. Второй катет или гипотенузу найти сложно, найдем острый угол, используя другие фигуры.

III. Осуществление решения.

1. Опустим из центра O вписанной в четырехугольник окружности перпендикуляры в его сторонам AB, BC, CD и DA. Полученные точки касания окружности и четырехугольника обозначим соответственно – N, K, L и M. Заметим, что четырехугольник $ANMO$ – квадрат со стороной 2. Тогда

BN=5-2=3 и отрезок *BK* другой касательной к этой окружности, проведенный их точки *B*, также равен 3. Аналогично: *CK=CL=6-3=3*.

2. Треугольники $\triangle NOB = \triangle BOK = \triangle KOC = COL$ равны между собой по двум катетам. Обозначим угол при общей вершине О у этих треугольников через α. Тогда $tg\alpha = \frac{3}{2}$.

3. Обозначим угол при вершине *O* треугольника $\triangle MOD$ через φ (заметим, что $\triangle MOD = \triangle ODL$).

4. Углы α и φ связаны между собой следующим соотношением: $90^0 + 4\alpha + 2\varphi = 360^0 \to \varphi = 135^0 - 2\alpha$.

5. Проведем ряд тригонометрических выкладок для нахождения $tg\varphi$.

$$tg\varphi = tg\left(135^0 - 2\alpha\right) = \frac{tg135^0 - tg2\alpha}{1 + tg135^0 tg2\alpha},\ tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = -\frac{12}{5}$$

$$tg\varphi = \frac{tg135^0 - tg2\alpha}{1 + tg135^0 tg2\alpha} = \frac{-1 + \frac{12}{5}}{1 + \frac{12}{5}} = \frac{7}{17}.$$

6. В треугольнике $\triangle MOD$: $tg\varphi = \frac{MD}{2} \to MD = 2tg\varphi = \frac{14}{17}$.

7. Площадь четырехугольника запишем в виде суммы площадей входящих в него треугольников и квадрата:

$$S_{ABCD} = S_{ANOM} + 4S_{NBO} + 2S_{MOD} =$$
$$2^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{14}{17} = \frac{300}{17}.$$

IV. Ответ: площадь четырехугольника равна $\frac{300}{17}$.

Метод № 3. Использование свойств окружностей позволяет выявить некоторые закономерности при решении задач.

Во-первых, задачи с окружностями, это всегда задачи на «перебрасывание» углов и отрезков, нередко с «выходом» на подобные треугольники, особенно это хорошо «работает», когда в условии задачи явно присутствуют хорды, стягивающие одинаковые дуги.

Во-вторых, задачи с окружностями – это задачи, в которых радиус окружности играет роль общего элемента во всех треугольниках, вписанных в эту окружность.

В-третьих, в задачах с окружностями простейшие алгебраические действия можно совершать не только с величинами углов и длинами отрезков, но также и с длинами дуг окружностей [19, с. 139].

В-четвертых, весьма эффективен прием «визуализации окружности», который заключается в том, чтобы «увидеть» окружность даже тогда, когда она в задаче явно не задана, а затем, сделав дополнительное построение и обоснование, воспользоваться всеми свойствами окружности [19, с. 151].

В-пятых, в задачах, в которых присутствует несколько окружностей есть специфика в описании способа взаимного расположения окружностей (внутреннее и внешнее касание двух окружностей, пересечение двух окружностей, непересекающиеся окружности, концентрические окружности).

Приведем несколько примеров.

Пример № 2.4.16. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 50^0$ и стороной $BC=3$ на высоте BH взята такая точка D, что $\angle ADC = 130^0$ и $AD = \sqrt{3}$. Найти угол между AD и BC, а также $\angle CBH$.

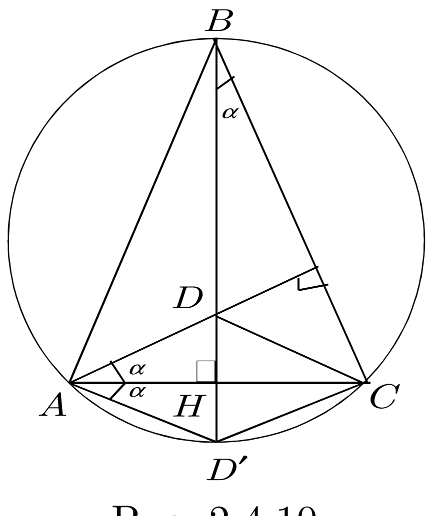


Рис. 2.4.10

Решение.

1. Пусть точка D' симметрична точке D относительно прямой AC. Тогда

$\angle B + \angle AD'C =$

$= \angle B + \angle ADC = 180^0$

Значит, четырехугольник $ABCD'$ – вписанный.

Точка D – ортоцентр треугольника ABC, следовательно, $AD \perp BC$.

2. Из подобия прямоугольных треугольников AHD и BHC следует, что $AH : BH = AD : BC = \sqrt{3} : 3$.

Значит, $\angle ABH = 30^0$.

3. Следовательно,

$$\angle CBH = \angle B - \angle ABH = 50^0 - 30^0 = 20^0.$$

Ответ: 90^0, 20^0.

Пример № 2.4.17. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров. Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей. Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

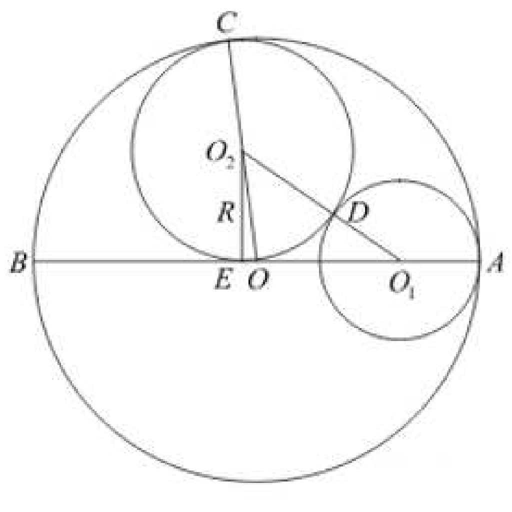


Рис. 2.4.11

Решение.

а) Пусть AB – диаметр большей из трех окружностей,

O – ее центр,

O_1 – центр окружности радиуса r у касающейся окружности с диаметром AB в точке A,

O_2 – центр окружности радиуса R, касающейся окружности с диаметром AB в точке C, окружности с центром O_1 – в точке D, отрезка AB – в точке E.

Точки O, O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$.

Аналогично $OO_1 = OA - O_1A = OA - r$ и $O_1O_2 = O_1D + O_2D = r + R$. Следовательно, периметр $\triangle OO_1O_2$ равен:

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r + OC - R + r + R =$$
$$= OA + OC = 2OA = AB$$

б) Пусть $OA=4$, $r=1$. Тогда получаем:

$$O_2E = R,\ O_1O_2 = 1 + R,\ OO_1 = OA - O_1A = 4 - 1 = 3,$$
$$OO_2 = OC - O_2C = 4 - R.$$

Из прямоугольных треугольников $\triangle O_1O_2E$ *и* $\triangle OO_2E$ находим, что:

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(1+R)^2 - R^2} = \sqrt{1+2R},$$
$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(4-R)^2 - R^2} = \sqrt{16-8R},$$

а так же $O_1E = OO_1 + OE$, то $\sqrt{1+2R} = 3 + \sqrt{16-8R}$.

Полученное уравнение не имеет корней, что означает что данная конфигурация невозможна.

Рассмотрим случай, когда точка E лежит между точками O и A. В этом случае $O_1E = OO_1 - OE$, то есть $\sqrt{1+2R} = 3 - \sqrt{16-8R}$. Из этого уравнения находим, что $R = \dfrac{48}{25}$.

Ответ: Радиус третьей окружности равен $\dfrac{48}{25}$.

И.С. Якиманская и И.Я. Каплунович установили, что понимание учащимися процесса решения геометрических задач предполагает наличие умений создавать образы, оперировать ими, ориентироваться в пространстве [70]. Анализируя понимание в процессе решения геометрических задач, они обнаружили, что для понимания чертежа и условий задачи ученики должны узнать «взаимопроникающие» геометрические фигуры, т.е. такие, которые имеют общую часть.

Рассматривая особенности восприятия и усвоения геометрического материала, выделяют три аспекта, с которыми они связаны. Во-первых, мир школьной геометрии требует постоянно обращения к образам. Образная деятельность является достаточно сложной, трудно поддается традиционному обучению в силу таких качеств образов, как субъективность, многозначность, целостность восприятия, ее труднее формализовать, чем аналитическую деятельность [45, с. 174].

Во-вторых, существующее противоречие между сложившимся опытом учащегося и приобретаемым общественно-историческим в области геометрии является движущей силой развития учащегося.

В-третьих, особенности восприятия геометрического пространства заключается во всестороннем рассмотрении геометрического объекта. Зрительное восприятие формы вторично по отношению к осязательному, поэтому для создания адекватного представления следует включать кинестетические ощущения [45, с. 180].

Таким образом, успешность в решении геометрических задач зависит и от особенностей психического восприятия геометрических объектов, так и от выбора метода решения задач.

Выбор рационального решения геометрической задачи определяется не только сложностью ее содержания, но и тем, каким образом это содержание выражено (конкретными числами, буквами, в общем виде, проекционным чертежом или векторными величинами). Кроме того, выбор рационального решения задачи зависит от точности исходных данных и конечного результата, методической цели решения задачи, объема теоретической подготовки учащихся и уровня их развития.

В заключении этой главы отметим, что при обучении решению математических задач, необходимо обратить внимание на следующие методические особенности рефлексивного обучения решению алгебраических и геометрических задач.

Методика обучения решению алгебраических задач включает:

– формирование вычислительных умений учащихся;

– формирование умений преобразовывать тожественные преобразования;

– формирование умений видеть закономерности;

– формирование умений вводить новые переменные для описания различных процессов и математических объектов;

– формирование умений решать уравнения основными методами – замены переменных и разложения на множители;

– формирование умений решать исследовать функции элементарными методами;

– формирование умений решать неравенства обобщенным методом интервалов;

– формирование умения решать текстовые задачи с применением разных методов алгебры.

Методика обучения решению геометрических задач включает:

– формирование умений учащихся работать с условием задачи, выделять геометрическую фигуру, ее свойства, отношения ее элементов, фиксировать условие на математическом языке;

– формирование умений учащихся строить динамичный чертеж (включая выносные чертежи), сопровождающий весь процесс решения задачи и видоизменяющийся под влиянием решения.;

– формирование умений учащихся перебирать теоретические положения, которые связывают известные и неизвестные элементы в задаче;

– формирование умений учащихся видеть закономерности путем использования мыслительных приемов (анализа, синтеза, сравнения, обобщения, индукции, дедукции, классификации);

– формирование умений учащихся «гулять по треугольникам», т.е. применять метод «расчета треугольника»;

– формирование умений учащихся составлять вопросно-ответные процедуры самому себе с целью активизации внутренних рефлексивных механизмов, позволяющих выбрать оптимальный путь решения задачи;

– формирование умений учащихся полноценной обоснованной аргументации каждого высказанного предложения.

2.5. Обобщенный алгоритм решения математических задач

В теории решения задач существует две точки зрения на понимание процесса решения задач. Согласно первому подходу существует некий универсальный «решатель задач» и ему и надо обучать. В втором подходе предпочтение отдается разработке методов и способов решения отдельных видов и типов задач [9].

Решение задачи – это деятельность, состоящая из определённой совокупности действий и операций. В структуре процесса решения задач можно выделить следующие действия: ознакомление с задачей, составление плана ее решения, осуществление решения, анализ полученного результата. В каждом действии, в свою очередь можно выделить операции ориентирования, планирования, осуществления и контроля. Понятие решение задачи объединяет в себе и психологию мышления, и психологию обучения [9].

Процесс решения математических задач представляется сложной интеллектуальной деятельностью учащегося, направленной на преобразование математическое объекта, на разрешение противоречия между условием и требованием задачи.

Л.М. Фридман предложил следующее понимание процесса решения математической задачи.

Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получает то, что требуется в задаче, – ее ответ [58]. Л.М. Фридман и Е.Н. Турецкий выделяют восемь этапов в процессе решения задачи:

- **анализ задачи;**
- **построение модели задачи;**
- **поиск способа решения задачи;**
- **осуществление решения задачи;**
- **проверка решения задачи;**

- **исследование задачи;**
- **формулирование ответа задачи;**
- **познавательный анализ задачи и ее решения.**

Другими словами, непосредственное решение задачи состоит из последовательности шагов (действий), каждый из которых есть применение некоторого общего положения математики к условиям или к их следствиям. Поэтому отыскание этой последовательности шагов есть самое главное, что нужно сделать для того, чтобы решить задачу. Математика и занимается тем, что она устанавливает для многих видов задач правила, пользуясь которыми можно найти указанную последовательность шагов для решения любой задачи данного вида.

Приступая к решению какой-либо задачи, надо ее внимательно изучить, установить, в чем состоят ее требования. Для того чтобы приступить к анализу задачи, необходимо расчленить формулировку задачи на условия и требования. Производя анализ задачи, вычленяя из формулировки задачи ее условия, мы все время должны соотносить этот анализ с требованием задачи, как бы постоянно оглядываться на требование. Иными словами, анализ задачи всегда направлен на требования задачи.

Результаты предварительного анализа задач надо как-то зафиксировать, записать. Такой формой является схематическая запись задачи. Первой отличительной особенностью схематической записи задач является широкое использование в ней различного рода обозначений, символов, букв, рисунков, чертежей. Второй особенностью является то, что в ней четко выделены все условия и требования задачи, а в записи каждого условия указаны объекты и их характеристики. В схематической записи фиксируется лишь то, что необходимо для решения задачи; все другие подробности, имеющиеся в задаче, при схематической записи отбрасываются.

Весь процесс решения любой математической задачи можно разделить на четыре основных этапа.

I. Анализ задачи. Необходимо выяснить, к какому виду относится задача. Если это возможно, определить какие элементы задачи известны, как математически они описываются. Определить, что надо найти и конкретизировать вопрос. Записать задачу формально: с использованием математического языка, нарисовать схему, чертеж, составить таблицу.

II. Поиск способа решения задачи. Задать себе ряд наводящих вопросов по данным условия: Решали ли Вы задачу ранее? Какую теорию необходимо знать, чтобы решить задачу? Составить как минимум один план решения задачи.

Поиск решения задачи во многом зависит от опыта учащегося.

III. Осуществление плана решения. Когда у учащегося появляется идея, необходимо составить некоторый план – алгоритм своих действий. На этом этапе необходимо грамотно выполнить все математические преобразования и избежать ошибок.

IV. Проверка решения и ее анализ. Очень важный этап в решении задачи, который заключается в обосновании правильности полученного ответа, анализе выбранного методов решения и главное – запоминании идеи решения такого типа задач.

Пример № 2.5.1: применения «обобщенного алгоритма» решения алгебраической задачи. Найти все значения a, при которых уравнение имеет ровно один корень $\left(2x^2 - 2x + 3a^2 + 2\right)^2 = 24a^2\left(x^2 - x + 1\right)$.

Решение.

I. Анализ. По условию задачи задано уравнение четвертого порядка, содержащее параметр. Требуется установить при каких значениях параметра, уравнение имеет один корень.

II. Поиск решения. Так как дано уравнение четвертой степени то следует эту степень понизить либо разложением на множители, либо заменой переменных. Заметим, что в левой и правой частях стоит общий член $x^2 - x + 1$. Заменив его на вспомогательную переменную, мы понизим степень уравнения до второй. Уравнение второй степени имеет единственный корень тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения равен нулю.

III. Осуществление решения:

Пусть $t = x^2 - x + 1$, тогда уравнение примет вид $\left(2t + 3a^2\right)^2 = 24a^2t$.

Приведем его к каноническому виду $4t^2 - 12a^2t + 9a^4 = 0$.

Заметим, что $4t^2 - 12a^2t + 9a^4 = \left(2t - 3a^2\right)^2 = 0$.

Следовательно, уравнение имеет единственный корень $t = \frac{3}{2}a^2$. Вернемся к замене переменных $x^2 - x + 1 = \frac{3}{2}a^2$.

Уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда дискриминант равен нулю:

$$D = 1 - 4 \cdot \left(1 - \frac{3}{2}a^2\right) = 0 \Leftrightarrow -3 + 6a^2 = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

IV. Проверка решения. Подставим $a^2 = \frac{1}{2}$ и, введя новую переменную $t = x^2 - x + 1$ в исходное уравнение, получим:

$$\left(2x^2 - 2x + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2\right)^2 = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - x + 1\right)$$

$$\left(2t + \frac{3}{2}\right)^2 = 12t \rightarrow 4t^2 + 6t + \frac{9}{4} - 12t = 0,$$

$$4t^2 - 6t + \frac{9}{4} = 0 \rightarrow \left(2t - \frac{3}{2}\right)^2 = 0,$$

$$t = \frac{3}{4} \rightarrow x^2 - x + 1 = \frac{3}{4} \rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: при $a_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{1}{2}$.

Пример № 2.5.2: применения «обобщенного алгоритма» решения геометрической задачи. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB, BC, CD и DA соответственно равны 1, 8, 14 и 7. Биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке O. Найти расстояние от этой точки до стороны AD, если площадь треугольника BOC равна 20.

Решение.

I. Анализ условия. Задан выпуклый четырехугольник, про который известно лишь то, что стороны его не равны.

II. Поиск решения. Заметим, что *1+14=7+8*, а это значит, что в четырехугольник можно вписать окружность.

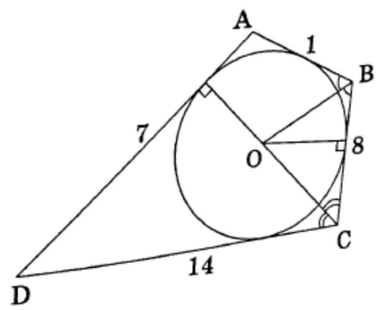


Рис. 2.5.1

Центр этой окружности лежит на пересечении биссектрис всех его внутренних углов, т.е. точка O, заданная в условии, лежит на пересечении двух из них.

Т.е. решение задачи сводится к поиску радиуса вписанной в четырехугольник окружности.

III. Осуществление решения.

Рассмотрим $\triangle BOC:\ S = 20,\ BC = 8 : h = \dfrac{2\cdot 20}{8} = 5.$

IV. Ответ: расстояние от точки O до стороны AD равно 5.

Уровни владения обобщенным алгоритмом решения математических задач

Одной из трудностей, испытываемых учащимися при решении математических задач является несформированное умение применять обобщенный алгоритм при решении математических задач. Учащихся нужно научить работать с условием, осуществлять поиск решения задачи, правильно оформлять идеи решения на строгом математическом языке и обязательно осуществлять проверку правильности проведенного решения. При формировании умения выделяются три уровня. Рассмотрим их подробнее.

Критический уровень характеризуется тем, что учащийся не знает общего подхода к решению задач, что затрудняет использование им мыслительных операций анализа, синтеза, сравнения, обобщения и т.д. Учащийся не учитывает рациональную структуру действия при решении задач, что влечет за собой невозможность осуществления анализа условия, выделения главного, существенного. Учащийся опирается на чувственный опыт, что приводит к множественным ошибкам. Учащийся не может оценить собственное знание (незнание) и качество своих отдельных действий. Учащийся часто допускает ошибки и не может их найти и исправить. Учащийся не умеет планировать свою интеллектуальную деятельность по преодолению незнания или неумения. Учащийся не может преодолевать познавательные затруднения при помощи преподавателя, ограничиваясь установкой «я не могу», «у меня никогда не получится», «мне это не нужно», «я ничего не понимаю».

Допустимый уровень характеризуется тем, что для решения одних задач учащийся учитывает рациональную структуру действий при их решении, для других нет. При встрече с новой задачей не пользуется обобщенным алгоритмом решения задач, используя метод проб и ошибок.

Учащийся может оценить качество собственных отдельных действий. Учащийся может находить ошибки при помощи преподавателя. Учащийся может планировать процесс преодоления собственного знания-незнания с помощью или консультацией педагога. Учащийся четко может реализовать план преодоления познавательного затруднения при постоянном контроле педагога. Учащийся готов к пересмотру своей познавательной позиции на основании доводов и аргументов педагога. Учащийся может настроить себя на работу, если будет знать, что конкретно ему нужно сделать. Учащийся может точно определить, в какой мере ему требуется помощь педагога.

Учащийся усваивает новый материал после определенного объема тренировочной работы, выделяет основное и существенное не сразу, а после необходимых упражнений.

Оптимальный уровень характеризуется тем, что учащийся учитывает рациональную структуру действий при решении всех задач, может выполнить поэлементно ряд действий и получить верный результат. При встрече с незнакомой задачей, учащийся применяет обобщенный алгоритм решения задачи и способы поиска решения.

Учащийся знает свой интеллектуальный потенциал, особенности функционирования собственного интеллекта. Учащийся умеет настраивать себя на работу неинтересной, сложной деятельностью. Учащийся умеет доверять собственному мышлению в условиях неопределенности (учащийся больше доверяет своему мышлению, чем мышлению товарищей и различным аргументам). Учащийся знает, как эффективно принимать решения, приводить весомые аргументы в защиту своего мнения, опираясь на собственный интеллект, знания, умения. Учащийся умеет преодолевать познавательные затруднения самостоятельно, с использованием литературы и дополнительных источников.

Учащийся свободно усваивает материал, владеет умственными операциями, умеет выделить главное, способен самостоятельно развить раскрываемые на занятии положения, за короткое время достигает высокого уровня знаний.

РАЗДЕЛ 3. РЕФЛЕКСИВНЫЕ СТРАТЕГИИ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

– Как научиться решать задачи?
– Чтобы научиться решать задачи, их нужно решать.

Процесс рефлексивного обучения решению математических задач должен включать пять основных этапов.

I. Проведение логико-математического анализа задачи. Прежде всего учитель находит все возможные способы решения задачи, определяет ее тип, дидактическое назначение.

II. Подбор системы задач на актуализацию. Основное правило методики обучения математике: не повторив старое – не начинай нового! Учитель подбирает систему заданий, способствующих повторению математических понятий, их свойств и признаков.

III. Составление системы вопросно-ответных процедур. Учитель составляет систему вопросов, ответы на которые помогут учащимся правильно проанализировать условие задачи, найти идею решения и составить план реализации этой идеи.

IV. Правильное оформление решения задачи. Учитель обращает внимание на правильное оформление решения задач разных типов, на необходимость обоснования каждого этапа в решении задачи.

V. Проверка решения и ее анализ. Очень важный этап в решении задачи, который заключается в обосновании правильности полученного ответа, анализе выбранного метода решения и главное – запоминании идеи решения предложенного типа задач.

В настоящей главе рассмотрим методику рефлексивного обучения каждому этапу в решении математических задач.

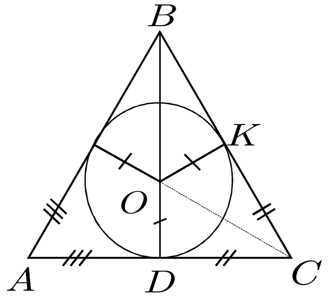
3.1. Обучение анализу условия задачи

Самым первым этапом в решении любой задачи является проведение тщательного анализа условия задачи, т.е. выяснения того, какие математические объекты заданы и как они связаны между собой. Приведем некоторые рекомендации из книги [57], позволяющие учащемуся осуществить полный анализ условия задачи.

> *Во-первых, разделите все, что дано в условии задачи на отдельные части – то, что известно (назвать все математические объекты, которые известны), и то, что неизвестно, но требуется найти (указать какие математические объекты требуется найти, или какие их свойства требуется установить).*
>
> *Во-вторых, вспомните все, что известно об этих объектах (определение, признаки, свойства), уясните для себя, к какому разделу или теме задача может относиться.*
>
> *В-третьих, поймите, как выглядит конечный результат, что он собой представляет, от чего зависит. Определите, что КОНКРЕТНО надо найти и сделайте вывод.*
>
> *В-четвертых, запишите условие и требование задачи в математической символике (если данные или искомые элементы не обозначены, обязательно ввести подходящие обозначения для символической записи всех условий и требований). Постройте некоторую ясную для Вас модель задачи (нарисуйте схему, чертеж, составьте уравнение).*

Пример № 3.1.1. Окружность с центром в точке O, вписанная в треугольник ABC с основанием AC, касается стороны BC в точке K, причем $CK{:}BK{=}5{:}8$. Найдите площадь треугольника, если его периметр 72 [46, с. 229].

Анализ условия задачи проведем, отвечая на наводящие вопросы.

Вопрос	Анализ условия	Краткая запись
Какие геометрические фигуры заданы в условии задачи?	Равнобедренный треугольник Вписанная в треугольник окружность	$\triangle ABC$, $BA = BC$ $\gamma(O, r)$-вписанная $K \in BC$, $P_{\triangle ABC} = 72$ $CK : BK = 5 : 8$.
Что известно про точки касания окружности и сторон треугольника?	Окружность касается стороны BC в точке K	
Какие величины треугольника известны?	Известен его периметр	
Что требуется найти по условию?	Площадь треугольника	$S_{\triangle ABC} = ?$
На что нужно обратить внимание при построении чертежа?	Центр окружности будет лежать в точке пересечения биссектрис треугольника и отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, будут равны.	

Пример № 3.1.2. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на это же число. В результате они стали стоить на девять процентов дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции?

Анализ условия задачи сводится к выяснению значения двух фраз «подорожали на некоторое число процентов, а потом подешевели на это же число» и «стали стоить на девять процентов дешевле, чем при открытии торгов в четверг».

Для этого вспомним формы записи процента от числа.

Пусть x – изначальная стоимость акций, а % – искомое число процентов.

Математически выражение «акции, стоимостью x подорожали на а %» будет записана следующим образом $x\left(\dfrac{100+a}{100}\right)$, а выражение «акции, стоимостью $x\left(\dfrac{100+a}{100}\right)$ подешевели на a %» будет записана следующим образом $x\left(\dfrac{100+a}{100}\right)\left(\dfrac{100-a}{100}\right)$.

Математически фраза «стали стоить на девять процентов дешевле, чем при открытии торгов в четверг» означает, что получившаяся цена равна $0{,}91x$.

Таким образом, правильный анализ условия задачи привел нас к уравнению с двумя переменными:

$$x\left(\frac{100+a}{100}\right)\left(\frac{100-a}{100}\right)=0{,}91x.$$

Пример № 3.1.3. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб. Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.

Анализ условия задачи проведем с помощью логического рассуждения.

Задан прямоугольный параллелепипед, в основании которого прямоугольник.

Построим плоскость сечения параллелепипеда, для этого через точку B, которая принадлежит сечению α, проведем прямую, параллельную AC (в плоскости $ABCD$). Эта прямая пересекает продолжения ребер AD и DC в точках P и K.

Соединим точку P с точкой D_1, получим точку $M = AA_1 \cap PD_1$.

Соединим точку K с точкой D_1, получим точку $N = CC_1 \cap KD_1$.

D_1MBN – сечение параллелепипеда, которое является ромбом. Это значит, что $D_1M = MB = BN = ND_1$, $MN \perp BD_1$ и $MN \parallel AC$.

Пример № 3.1.4. Найдите все значение параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|x^2-8x+a+7\right|<6$ не имеет решение на отрезке $[a-5,\, a]$.

Анализ условия задачи показывает, что задачу нужно переформулировать, т.к. удобнее искать решение на отрезке. Переформулировка задачи может быть такой.

Найдите все значение параметра а, при каждом из которых неравенство $\left|x^2 - 8x + a + 7\right| \geq 6$ ***имеет решение на отрезке*** $[a-5, a]$.

В левой части неравенства задана квадратичная функция под знаком модуля $f(x) = x^2 - 8x + a + 7$. Требуется найти такие значения параметра а, при которых либо функция $f(x) \geq 6$, либо функция $f(x) \leq -6$ на отрезке $[a-5, a]$.

Пример № 3.1.5. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг вырастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 933 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования?

Анализ условия задачи показывает, что речь идет о трех величинах: сумме кредита, выплатах без процентов, выплаты по процентам.

Введем переменные. Пусть:

– x – выплаты за один месяц без процентов;

– $12x$ – выплаты за первый год без процентов;

– $24x$ – сумма кредита;

– Р – проценты за первый год.

Опишем условия задачи с учетом введенных переменных.

Фраза «в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 933 тыс. рублей» математически запишется так: $12x + P = 933000$.

Условие «1-го числа каждого месяца долг вырастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца и 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца» будет означать, что проценты начисляются следующим образом. $P = 24x \cdot 0{,}03 + 23x \cdot 0{,}03 + ... + x \cdot 0{,}03$.

Таким образом, задача свелась к решению уравнения и нахождению значения x.

Пример № 3.1.6. Фермер разделил имеющуюся у него землю в 320 га на три неравные части, каждая из которых содержит целое число гектаров. Первую часть он отвел под картофель. Вторую под свеклу, а третью сдал в аренду. прибыль от продажи картофеля составила 24 тыс. руб. с каждого гектара, а прибыль от продажи свеклы –11,3 тыс. руб. с каждого гектара. Суммарная прибыль от продажи овощей составила 3616 тыс. руб. Сколько гектаров земли фермер сдал в аренду?

Анализ условия задачи показывает, что речь идет о двух величинах: о величине каждой части участка, о прибыли фермера с каждой части участка.

Неизвестными величинами являются: размер каждого участка и прибыль от аренды третьего участка.

Введя три переменные:

– x (га) – размер первого участка, отданного под картофель, $x \in \mathbf{N}$;

– y (га) – размер второго участка, который засажен свеклой, $y \in \mathbf{N}$;

– z (га) – размер первого участка, сданного в аренду, $z \in \mathbf{N}$.

Известно, что неизвестные величины связаны с известными следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x + y + z = 320, \\ 24000x + 11300y = 3616000. \end{cases}$$

Задача свелась к исследованию системы, содержащей два уравнения с тремя неизвестными.

3.2. Обучение поиску решения задачи

«При решении задачи плохой план часто оказывается полезным: он может вести к лучшему плану»
Д. Пойа

Как же искать план решения задачи? Односложного и определённого ответа на этот вопрос нет. Более того, этому нельзя научить, этому можно только НАУЧИТЬСЯ самостоятельно!!!! Потому как любая идея решения математической задачи возникает в сознании учащегося «по-своему». Каждый учащийся обладает своим уникальным складом ума, состав и строение которого зависит от множества факторов. Приведем некоторые рекомендации, которые помогут учащимся искать идеи решения задачи [57].

Во-первых, распознайте вид задачи [см. 2.2]. *Вспомните встречалась ли ВАМ похожая задача.*

Во-вторых, установите все формулы, теоремы, определения, правила, которые связывают математические объекты в условии задачи. Создайте себе теоретическую базу решения задачи. Выявите всю объективную учебную информацию, которая необходима ВАМ для решения задачи.

В-третьих, найдите ***«хвостик задачи».*** *У каждой задачи есть зацепка в условии, которая наталкивает на идею решения. Попытайтесь преобразовать исходные данные, найти следствия из условия задачи. Попытаться решить задачу от начала к концу, т.е. получив следствия из условия задачи, выбрать из них то, которое быстрее даст результат. Попробуйте решить задачу разными методами* [см. 2.4.].

В-четвертых, сведите задачу к нескольким более простым, известным, уже решенным ВАМИ задачам путем введения новых переменных, дополнительного построения, рассмотрения частного случая, использования метода от противного. Попробуйте переформулировать задачу, так чтобы формулировка была более привычной для ВАС.

Пример № 3.2.1. Решить уравнение

$$\cos x+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\sin x+1\right)}=0.$$

I. Анализ условия показывает, что задано тригонометрическое уравнение, содержащее знак корня.

II. Поиск решения. На этапе поиска решения сразу возникает идея перенести косинус в правую часть и возвести в квадрат, потому как это основной метод решения уравнений, содержащих знак корня. Однако, возникает вопрос возможности такого действия, учитывая, что перед косинусом стоит знак минус. Чтобы выполнить возведение в степень, необходимо наложить условие $\cos x\le 0$.

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\sin x+1\right)}=-\cos x,$$

$$\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\sin x+1\right)}\right)^2=\left(-\cos x\right)^2,$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\sin x+1\right)=\cos^2 x.$$

Поиск дальнейшего решения приводит к замечанию того, что раскрытие скобок приведет к квадратному уравнению с иррациональными коэффициентами, что осложнит поиск корней квадратного уравнения, поэтому необходимо воспользоваться другим методом решения тригонометрических уравнений. Как известно, одним из основных методов решения уравнений является метод разложения на множители.

III. Осуществление решения.

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\sin x+1\right)=\left(1-\sin^2 x\right),$$

Заметим, что $\left(1-\sin^2 x\right)=\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)$, Перенесем в левую часть:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}(\sin x+1)-(1-\sin x)(1+\sin x)=0$$

и вынесем общий множитель за скобку.

Получим два множителя, произведение которых равно нулю:

$$(1+\sin x)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-(1-\sin x)\right)=0.$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению двух уравнений. Представим дальнейшее решение без подробных пояснений.

$$1)\ 1+\sin x=0,\ \sin x=-1,\ x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$2)\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}-(1-\sin x)=0,\ \frac{-\sqrt{2}}{2}+\sin x=0,\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$x_2=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ x_3=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

IV. Ответ. С учетом области определения, получаем ответ:

$$x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ x_3=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Пример № 3.2.2. Решить уравнение

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}.$$

Решение.

I. Анализ условия показывает, что задано уравнение, содержащее две переменные под знаком арифметического квадратного корня.

II. Поиск решения. Возведение обеих частей в квадрат не приведет к желаемому результату и избавлению от корней. Попробуем ввести новые параметры, чтобы избавиться от корней в уравнении.

$$x>2,\ t=\sqrt{x-2},\ t>0,$$

$$y>1,\ z=\sqrt{y-1},\ z>0.$$

III. Осуществление решения. Сделаем замену и преобразуем получившееся выражение:

$$\frac{36}{t}+\frac{4}{z}=28-4t-z,\ \left(\frac{36}{t}+4t\right)+\left(\frac{4}{z}+z\right)=28,$$

$$4\left(\frac{9+t^2}{t}\right)+\left(\frac{4+z^2}{z}\right)=28.$$

Преобразуем уравнение так, чтобы справа стоял ноль:

$$4\left(\frac{(3-t)^2+6t}{t}\right)+\left(\frac{(2-z)^2+4z}{z}\right)-28=0,$$

$$4\frac{(3-t)^2}{t}+24+\frac{(2-z)^2}{z}+4-28=0, 4\frac{(3-t)^2}{t}+\frac{(2-z)^2}{z}=0.$$

При $t>0$, $z>0$ равенство возможно, только в тех случаях, когда $3-t=0$ и $2-z=0$. Вернемся к исходным параметрам, получим:

$$3-\sqrt{x-2}=0\to x=11,\ 2-\sqrt{y-1}=0\to y=5.$$

IV. Ответ. Получили единственное решение: $x=11$, $y=5$.

Пример № 3.2.3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что DE перпендикулярно DC. Отрезок $CE=2$. Найти AD.

Решение.

I. Анализ.

Дано:

$\triangle ABC$, $AB=BC$, $CD-$ *биссектриса*,

$E\in AC$, $DC\perp DE$, $EC=2$.

Найти: $AD-?$

II. Поиск решения

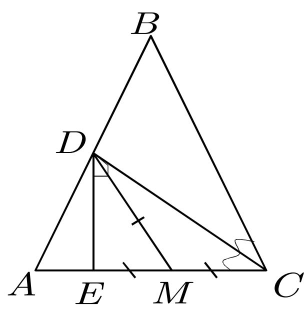


Рис. 3.2.1

По условию задачи задан равнобедренный треугольник и образовался прямоугольный треугольник. В связи с тем, что известен только один элемент прямоугольного треугольника необходимо сделать дополнительное построение и связать элементы треугольника либо с помощью Теоремы Пифагора, либо с помощью подобных треугольников.

Если проведем медиану в прямоугольном треугольнике, то увидим, что она будет параллельна стороне BC, таким образом получим два подобных треугольника. Составив отношение сторон подобных треугольников, выразим сторону AD.

III. Осуществление решения.

1. Рассмотрим $\triangle CDE$, $\angle D = 90^{\circ}$. Сделаем дополнительное построение: проведём из точки D к гипотенузе медиану DM, $DM = \dfrac{1}{2}EC = 1$ {*медиана из вершины прямого угла равна половине гипотенузы*}.

2. Рассмотрим $\triangle DMC$: $DM = MC = 1$, $\angle MDC = \angle MCD$.

Заметим, что $\angle BCD = \angle MCD = \angle MDC$.

Следовательно, $DM \,||\, BC$, тогда углы $\angle ADM = \angle ABC$ как соответственные углы при параллельных прямых.

Следовательно, $\triangle ADM \sim \triangle ABC$, составим отношение подобия $\dfrac{AD}{DM} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB}{AB} = 1$. Значит $AD=DM=1$.

IV. Ответ: $AD=1$.

Пример № 3.2.4. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у.е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у.е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у.е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение.

I. Анализ и поиск решения. Задача является текстовой на нахождение наибольшего и наименьшего значения. В задаче речь идет о двух взаимосвязанных величинах – количестве человек и заработной плате. Так как требуется найти наименьшее значение, то попробуем составить функцию зависимости зарплаты от количества человек на каждом объекте. В качестве независимой переменной выберем количество рабочих на первом объекте и внесем данные в таблицу.

Объект	Кол-во рабочих	Зарплата	Траты начальника
I	x	$4x^2$	$f(x) = 4x^2 + (24-x)^2$
II	$24-x$	$(24-x)^2$	

Таким образом, задача сведется к исследованию функции на наименьшее значение.

III. Осуществление решения.

Исследуем функцию $f(x) = 4x^2 + (24-x)^2$ на наименьшее значение. Преобразуем функцию

$f(x) = 4x^2 + (24-x)^2 = 5x^2 - 48x + 576$ (у.е.)

Получили квадратичную функцию $f(x)$ при $0 < x < 24, x \in N$, графиком которой является парабола. Старший коэффициент положителен, следовательно, она имеет наименьшее значение при $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = 4,8$.

Точка минимума не является натуральным числом, поэтому исследуемая функция достигает наибольшего и наименьшего значения в точке $x = 4$ или $x = 5$. Найдем и сравним эти значения.

$f(4) = 5 \cdot 16 - 48 \cdot 4 + 576 = 464$, $f(5) = 125 - 240 + 576 = 461$.

Таким образом на множестве натуральных значений аргумента наименьшее значение функции достигается в точке 5.

IV. Ответ. необходимо направить 5 рабочих на первый объект, 19 рабочих – на второй объект, при этом зарплата рабочих составит 461 у.е.

3.3. Обучение способам саморегуляции при решении математических задач

При решении математических задач многие учащиеся опускают последний, очень важный этап в решении математических задач – этап оценки проведенного решения. На экзаменах, учащиеся зачастую показывают более худшие результаты своей деятельности, чем есть на самом деле. Во многом причина кроется в несформированных умениях контролировать и оценивать свою деятельность, а также регулировать ее в случае обнаружения ошибок.

Самоконтроль учащихся состоит в анализе решения математических задач и приведении аргументов, подтверждающих верность или неверность той или иной части решения.

Самоконтроль ученика предполагает:

- ✓ умение оценивать свою работу адекватно (зависит от самооценки);
- ✓ умение видеть свои ошибки и находить рациональные способы решения проблемы;
- ✓ умение изменять алгоритм свих действий, согласно изменившимся условиям;
- ✓ умение самостоятельно составлять проверочные задания и разрабатывать алгоритм проверочного действия.

Задание должно провоцировать учащихся «вернуться назад» в своем решении, принудить их сделать проверку. У учащихся должно возникнуть желание сделать проверку, проявить рефлексивные умения.

Приведем рекомендации, которые помогут учащимся осуществлять осознанную саморегуляцию при решении математических задач.

Во-первых, зафиксируйте свое внимание на математической задаче, четко осознайте, что Вы сейчас делаете.

Во-вторых, составьте план действий, необходимый для решения задачи, представьте возможные трудности. Ответьте себе на вопрос: Ты точно знаешь, что тебе нужно делать?

В-третьих, соотнесите выявленную учебную информацию с собственными знаниями и умениями, примите решение об использовании помощи.

В-четвертых, осуществляйте операционный самоконтроль по ходу каждого действия, т.е. осуществляйте постоянную сверку выполняемых действий с принятым планом. Попутно с осуществлением плана проводите обоснование каждого шага и проверяйте все вычисления и преобразования. Будьте уверены в том, что промежуточные результаты верны.

В-пятых, осуществите итоговый самоконтроль решения задачи, одним из следующих способов:

– проверьте, не противоречит ли результат здравому смыслу;

– проверьте, все ли условия использованы, все ли требования выполнены;

– сверьтесь с готовым ответом;

– подставьте полученные данные в исходное условие задачи;

– решите задачу другим способом;

– проверьте задачу на частном случае;

– используйте информационные технологии для проверки своего решения.

В-шестых, оцените ценность задачи для себя, т.е. определите возможные применения полученного результата и найденного способа решения при решении других задач.

Приведем пример осознанной саморегуляции и самоконтроля при решении следующих задач.

Пример № 3.3.1. Упростить

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}\,(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}.$$

Решение. ОДЗ: $x \geq 0, x \neq 9$.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}\,(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}=$$

{Заметим, что под корнем четвертой степени стоит квадрат разности, под корнем третьей степени стоит куб разности, в знаменателе под корнем четвертой степени стоит квадрат суммы. Покажем это.}

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{4-4\sqrt{3}+3}+\sqrt[3]{x\sqrt{x}-9x-27\sqrt{x}-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{4+4\sqrt{3}+3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-3\right)^3}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}=$$

{Корень четвертой степени из квадрата будет корень второй степени, можем внести подкоренные выражения под один корень, корень третьей степени «уйдет».}

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2-\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}=$$

{Под знаком корня как в числителе, так и в знаменателе стоит разность квадратов, которая после "сворачивания" превратится в единицу}.

$$= \frac{\sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2 - \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{4-3} + \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2 - \sqrt{4-3}} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3}.$$

{Задание выполнено!}

Пример № 3.3.2. Решить уравнение

$$\sin 2x + \sin 5x + \sin 8x + \sin 11x = 0.$$

Решение.

{Заметим, что перед нами тригонометрическое уравнение, содержащее синусы разных аргументов. Вспоминаем правило «видишь сумму – преобразуй в произведение». Нам необходимо сгруппировать синусы и применить формулу суммы синусов $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, *так чтобы в произведениях получился одинаковый множитель. Перебирая различные варианты полусумм и полуразностей аргументов синусов, заметим:* $\frac{2x+8x}{2} = 2x$, $\frac{2x-8x}{2} = -3x$, $\frac{5x+11x}{2} = 8x$, $\frac{5x-11x}{2} = -3x$. *Значит группировать надо следующим образом}.*

$$(\sin 2x + \sin 8x) + (\sin 5x + \sin 11x) = 0.$$

{Для каждой группы применим формулу суммы синусов}

$$2\sin 5x \cos 3x + 2\sin 8x \cos 3x = 0.$$

{Вынесем общий множитель и применим формулу суммы синусов. Получившееся простейшее тригонометрическое уравнение решим}.

$$2\cos 3x(\sin 5x + \sin 8x) = 0.$$

{Произведение равно нулю, тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Приравняем получившиеся множители к нулю и решим простейшие тригонометрические уравнения, аккуратно выражая аргумент x}

$$.\left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0;\\ \sin 5x + \sin 8x = 0.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k;\\ 2\sin\dfrac{13x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} = 0.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3};\\ \dfrac{13x}{2} = \pi n;\\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi m.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3};\\ x = \dfrac{2\pi n}{13};\\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi m}{3}.\end{array}\right.$$

{Сделаем проверку, подставив $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \dfrac{\pi}{3}$ в *исходное уравнение}.*

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \;\to\; \sin 2\cdot\frac{\pi}{6} + \sin 5\cdot\frac{\pi}{6} + \sin 8\cdot\frac{\pi}{6} + \sin 11\cdot\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0.$$

$$x_2 = 0 \;\to\; \sin 2\cdot 0 + \sin 5\cdot 0 + \sin 8\cdot 0 + \sin 11\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3} \to \sin 2\cdot\frac{\pi}{3} + \sin 5\cdot\frac{\pi}{3} + \sin 8\cdot\frac{\pi}{3} + \sin 11\cdot\frac{\pi}{3} = 0.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0.$$

{Проверка показала, что найденные корни верные, можно записать ответ.}

$$\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}; k\in Z\right\}\cup\left\{x=\frac{2\pi n}{13}; n\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi m}{3}; m\in Z\right\}.$$

{Задание выполнено!!!}

Пример № 3.3.3. Периметр равнобедренной трапеции с основаниями BC и AD равен 52. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении 4:9. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Решение.

I. Анализ условия задачи. Задана равнобедренная трапеция, в которую можно вписать окружность. Известно, что $P_{ABCD}=AB+BC+CD+AD=52$.

Пусть M – точка касания окружности и стороны AB, тогда $MB:MA=4:9$.

Возможно два случая проведения прямой. Их нужно рассмотреть отдельно.

Случай первый: прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции C, отсекает от трапеции треугольник CKD.

Случай второй: прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции D, отсекает от трапеции треугольник AFD.

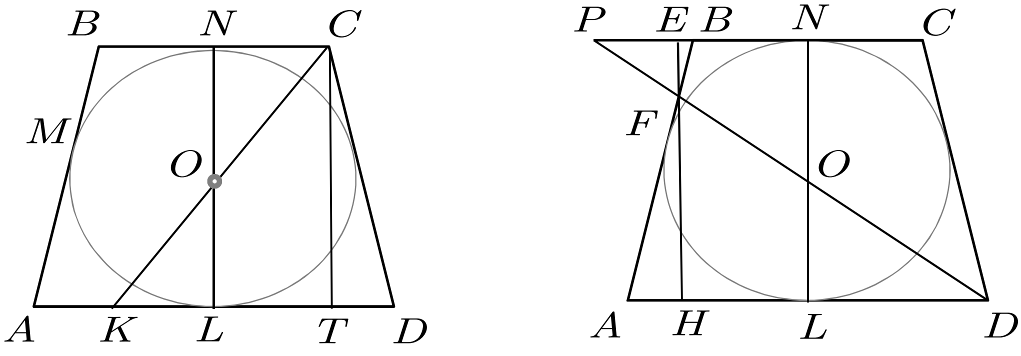


Рис. 3.3.1

Найти отношения $\frac{S_{CKD}}{S_{ABCD}}-?\ \frac{S_{AFD}}{S_{ABCD}}-?$

II. Поиск решения.

Так как трапеция равнобедренная и в нее вписана окружность, то зная периметр, можно найти боковую сторону и сумму оснований. Зная боковую сторону и отношение, на которое она делится точкой касания, можно найти отрезки касания.

Сделав дополнительное построение (провести высоты из вершины C), можно найти длину высоты.

Зная сумму оснований и высоту, можно найти площадь трапеции.

Площадь треугольника CKD равна полупроизведению высоты CT на основание KD, которое можно найти как сумму двух отрезков.

Площадь треугольника AFD равна полупроизведению основания AD на высоту FK, которую можно найти из подобных треугольников.

III. Осуществление решения.

1. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Выпишем все, что про нее знаем: $AB=CD$, $P=AB+BC+CD+AD=52$. Заметим, что $AB+CD=BC+AD$ (по Т о вписанной в четырехугольник окружности).

Преобразуя $AB+BC+CD+AD=AB+AB+AB+AB=4AB=52$, найдем сторону AB и отрезки, на которые боковая сторона делится точкой касания.

$$AB=13,\ BM=\frac{4}{13}AB=4,\ AM=\frac{9}{13}AB=9.$$

Отрезки касательных, проведенные из одной точки к окружности равны, следовательно, $BN=NC=BM=4$ и $AL=LD=AM=9$.

Заметим, что если опустить высоту CT из вершины C на основание AD, то $TD=LD-LT=LD-NC=9-4=5$.

2. Рассмотрим прямоугольный треугольник CTD. Для нахождения высоты по теореме Пифагора воспользуемся найденными величинами. Находим:

$$CT = \sqrt{CD^2 - TD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

3. Теперь можно найти площадь трапеции

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CT = \frac{26}{2} \cdot 12 = 156.$$

4. *{Необходимо найти длину отрезка KL, смотрим в какой треугольник входит этот отрезок}* Рассмотрим $\triangle NOC = \triangle LOK$ (по углу и катету). Следовательно, $KL + NC = 4$.

5. В $\triangle CKD : CT = 12,\ KD = KL + LD = 4 + 9 = 13$.

$$S_{\triangle CKD} = \frac{1}{2} \cdot CT \cdot KD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 = 78.$$

6. Итак, найдем отношение:

$$\frac{S_{CKD}}{S_{ABCD}} = \frac{78}{156} = \frac{1}{2}.$$

7. *{Для того, чтобы найти площадь $\triangle AFD$, необходимо знать длину высоты. Продлим OD до пересечения с BC, получим точку P. Заметим, что высоту FH, где F – точка пересечения DO и AB, можно найти из подобия треугольников $\triangle PBF \sim \triangle AFD$}*.

Рассмотрим $\triangle OLD = \triangle ONP$.

Известно: $ON = OL,\ \angle LOD = \angle NOP,\ \angle LOD = \angle NOP$.

Следовательно, $NP = LD = 9,\ PB = 9 - 4 = 5$.

8. Рассмотрим $\triangle PBF \sim \triangle AFD$ (очевидно $\angle AFD = \angle BFP$, $\angle ADF = \angle BPF$). Подобие позволяет найти коэффициент пропорциональности $\dfrac{PB}{AD} = \dfrac{FE}{FH} = \dfrac{5}{18}$. С учетом того, что $FE = TC - FH = 12 - FH$, получим уравнение $\dfrac{12 - FH}{FH} = \dfrac{5}{18}$.

$$\frac{12 - FH}{FH} = \frac{5}{18} \Leftrightarrow 18(12 - FH) = 5FH \Leftrightarrow 23FH = 216 \Leftrightarrow FH = \frac{216}{23}.$$

9. Найдем площадь треугольника $\triangle AFD$:

$$S_{\triangle AFD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FH = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \frac{216}{23} = \frac{1944}{23}.$$

10. Теперь можно найти отношение:

$$\frac{S_{\triangle AFD}}{S_{ABCD}} = \frac{1944}{23 \cdot 156} = \frac{162}{299}.$$

IV. Ответ: отношение площади треугольника к площади четырехугольника равно $\frac{162}{299}$.

Пример № 3.3.4. В решениях следующих задач допущены ошибки, найдите и исправьте их.

Задание: Решить уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$.

Вариант решения № 1: $\cos^2 x + \sin 2x = 0,75$.

Пусть $\cos x = t$, тогда $t^2 - 2t + 0,75 = 0$.

$t_1 = 0,5 \to \cos x = 0,5 \to x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Вариант решения № 2: $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0,75$.

$\cos^2 x = 0,75 \to x = \pm\arccos(\pm 0,75) + 2\pi k,\ k \in Z \to x \approx 75^0.$

Вариант решения № 3. $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0,75$.

$\cos^2 x = 0,75 \to \cos^2 x = \frac{3}{4} \to \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Предупреждение ошибок учащихся– это одно из тех умений, без которых вся работа учителя математики может быть сведена на нет. Очень важно учить учащихся осознанно контролировать свою математическую деятельность. Для этого учитель при решении всевозможных задач обращает внимание учащихся на возможные типовые ошибки: вычислительные ошибки, логические ошибки, ошибки в неправильном употреблении формул, ошибки в неправильных обоснованиях и рассуждениях, подмена математических понятий и т.д.

3.4. Некоторые примеры рефлексивного исследования математических задач

*«Учащийся должен знать,
что происходит у него в сознании,
когда он думает над своим познанием
и его особенностями»*
А.В. Карпов

Попытки вспомнить материал, который изучается, гораздо эффективнее простого перечитывания. Когда учащийся открывает учебник, он испытывает иллюзию, будто материал присутствует и в его сознании тоже. Однако это не так. Учащегося надо приучать извлекать из памяти все известные математические понятия, их определения, их свойства, признаки, теоремы и ключевые задачи.

Пример № 3.4.1. Решить неравенство

$$\log_3\left(x^2-x-3\right)+\log_3\left(2x^2+x-3\right)\geq\log_3\left(x^2-2\right)^2+2+\log_{\frac{1}{3}}4.$$

Решение.

I. Анализ условия. По условию задано логарифмическое неравенство. В неравенство входят логарифмы с одинаковым постоянным основанием. Под знаком логарифма стоят квадратные трехчлены и многочлен степени четыре.

II. Поиск решения. Если воспользоваться свойствами логарифмов и снять логарифмы, то получим неравенство четвертой степени: $4\left(x^2-x-3\right)\left(2x^2+x-3\right)\geq 9\left(x^2-2\right)^2$.

Для того чтобы избежать этой ситуации, попробуем найти какую-нибудь закономерность в подлогарифменных выражениях. Обратим внимание, что $3x^2-6=\left(x^2-x-3\right)+\left(2x^2+x-3\right)$. В свою очередь, $9\left(x^2-2\right)^2=\left(3x^2-6\right)^2$. Это наводит на мысль, что можно ввести две переменных и свести неравенство к системе неравенств.

Введем два вспомогательных параметра:

$$a = x^2 - x - 3,\ b = 2x^2 + x - 3.$$

III. Осуществление решения. Тогда неравенство перепишется в виде:

$$\log_3 4ab \geq \log_3 (a+b)^2.$$

Используя свойства логарифмов, имеем: $4ab \geq (a+b)^2$.

Преобразуем получившееся неравенство:

$$a^2 - 2ab + b^2 \leq 0 \rightarrow (a-b)^2 \leq 0 \rightarrow a = b.$$

Вернемся к исходным переменным:

$$x^2 - x - 3 = 2x^2 + x - 3,$$

$$x^2 + 2x = 0,$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 0.$$

Так при решении неравенства получили два значения, имеет смысл сделать проверку путем подставки получившихся значений в исходное неравенство.

$$x_1 = -2:\ \log_3\left((-2)^2 - (-2) - 3\right) + \log_3\left(2(-2)^2 + (-2) - 3\right) \geq$$

$$\log_3\left((-2)^2 - 2\right)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}} 4.$$

$$\log_3(3) + \log_3(3) \geq \log_3(2)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}}(4).$$

$$2 \geq 2.$$

$$x_2 = 0:\ \log_3\left(0^2 - 0 - 3\right) + \log_3\left(2 \cdot 0^2 + 0 - 3\right) \geq$$

$$\log_3\left(0^2 - 2\right)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}} 4.$$

$$\log_3(-3) + \log_3(-3) \geq \log_3(-2)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}}(4).$$

IV. Ответ: решением неравенства является $x_1 = -2$.

Пример № 3.4.2. В магазине продавались пирожки за 5 руб., бублики за 6 руб., булки за 7 руб., слойки за 8 руб., коржики 10 руб. Группа ребят купила на 100 руб. 14 изделий разных сортов. Сумма цен изделий равна 21 рубль. Сколько каких изделий куплено, если известно, что никаких изделий не было куплено больше 7 и никаких не было куплено поровну?

Решение.

1. Анализ условия задачи и поиск решения. Введем переменные, обозначающие количество каждого изделия, для того, чтобы математически записать условие задачи.

2. Условие «Сумма цен изделий равна 21 рубль» обозначает, что всего возможно два случая:

а) были куплены только пирожки, бублики и коржики;

б) были куплены только бублики, булки и слойки.

3. Обозначим:

x – количество пирожков,

y – количество бубликов,

z – количество булок,

u – количество слоек,

v – количество коржиков.

4. Из условий «группа ребят купила 14 изделий по 100 рублей» при условиях, что никакого изделия не было куплено поровну и каждого куплено не больше семи, составим уравнения и неравенства для случаев а) и б).

$$(a)\begin{cases} x+y+v=14, \\ 5x+6y+10v=100, \\ x\le 7, y\le 7, v\le 7, \\ x\ne y\ne v. \end{cases} \qquad (б)\begin{cases} y+z+u=14, \\ 6y+7z+8u=100, \\ z\le 7, y\le 7, u\le 7, \\ z\ne y\ne u. \end{cases}.$$

Таким образом, задача свелась к исследованию двух математических моделей.

II. Осуществление решения. Рассмотрим первую систему. Методом исключения неизвестной получим:

$$\begin{cases} x+y+v=14, \\ 5x+6y+10v=100. \end{cases} \to y+5v=30 \to y=30-5v..$$

Методом подбора найдем возможные наборы x, y, v:

v	y	
1	25	не удовлетворяют условиям
2	20	
3	15	

4	10
5	5

Таким образом, первая система не имеет решения.

6. Рассмотрим вторую систему.

$$\begin{cases} y+z+u=14, \\ 6y+7z+8u=100. \end{cases} \to \ z+2u=16 \ \to \begin{cases} z=16-2u, \\ y=14-z-u. \end{cases}.$$

Методом подбора найдем возможные наборы y, z, u:

u	z	y	
1	14	1	не удовлетворяет условиям
2	12	0	
3	10	1	
4	8	2	
5	6	3	+
6	4	4	–
7	2	5	+

Ответ. Таким образом задача имеет два решения: было куплено либо 3 бублика, 6 булок, 5 слоек, либо 5 бубликов, 2 булки и 7 слоек.

Пример № 3.4.3. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найти отношение S_{ABC} и S_{ACD}, если известно, что диагональ делит BD делит AC в отношении *2:1* считая от точки A, а $\angle BAC = 30^{\circ}$.

Решение.

I. Анализ условия задачи.

Задача планиметрическая на свойства вписанного четырехугольника.

Запишем Дано:

$ABCD$ – выпуклый чет-к,

AC – диаметр, хорды

$AC \cap BD = O$

$AO : OC = 2 : 1$

$\angle BAC = 30^{\circ}$.

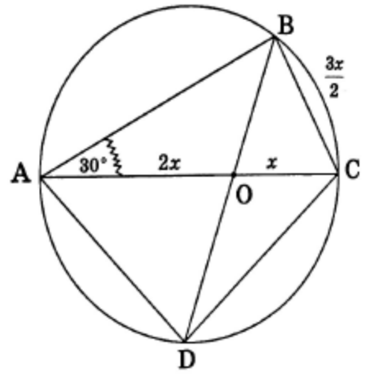


Рис. 3.4.1

Найти $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ACD}}-?$

II. Поиск решения.

По условию задан произвольный четырехугольник, вписанный в окружность. Это значит, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны.

AC – диаметр, следовательно, $\angle B=\angle D=90^0$.

$$\angle ACB=\angle ABC-\angle BAC=90^0-30^0=60^0.$$

Так как не известно значение ни одного отрезка, то введем одну вспомогательную переменную. Пусть $OC=x$, $AO=2x$, $AC=3x$.

Очевидно, для того чтобы найти площадь треугольников в задаче недостаточно данных. Поэтому, отношение площадей представим, как отношение элементов треугольников.

Для этого, заметим, что $\triangle BOC$ и $\triangle ABC$ имеют одинаковую высоту, следовательно, их отношение будет равно:

$$\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot h_1\cdot OC}{\frac{1}{2}\cdot h_1\cdot AC}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{h_1}\cdot\cancel{x}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{h_1}\cdot 3\cancel{x}}=\frac{1}{3}.$$

Аналогично для $\triangle DOC$ и $\triangle ADC$, будем иметь:

$$\frac{S_{DOC}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot h_2\cdot OC}{\frac{1}{2}\cdot h_2\cdot AC}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{h_2}\cdot\cancel{x}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{h_2}\cdot 3\cancel{x}}=\frac{1}{3}$$

Таким образом, искомое отношение площадей $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ACD}}$ свелось к отношению площадей $\dfrac{S_{BOC}}{S_{DOC}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot h_3\cdot BO}{\frac{1}{2}\cdot h_3\cdot OD}=\dfrac{BO}{OD}$.

Выразим стороны BO и OD через x.

III. Осуществление решения задачи.

1. Рассмотрим $\triangle ABC : \angle B = 90^0, \angle A = 30^0, AC = 3x$.

Выразим BC: $\sin 30^0 = \dfrac{BC}{AC} \to BC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{3x}{2}$.

2. Рассмотрим $\triangle BOC$. Из этого треугольника нам необходимо выразить BO, зная две стороны и угол между ними. Воспользуемся теоремой косинусов:

$\triangle BOC : BO^2 = OC^2 + BC^2 - 2 \cdot OC \cdot BC \cdot \cos 60^0$.

$$BO^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \left(\frac{3x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7x^2}{4} \to BO = \frac{\sqrt{7}x}{2}.$$

3. Для нахождения OD заметим, что три из четырех отрезков хорд выражены через x. Следовательно, по теореме о хордах, можем составить равенство: $BO \cdot OD = AO \cdot OC$.

Подставим в это равенство: $\dfrac{\sqrt{7}x}{2} \cdot OD = 2x \cdot x \leftrightarrow OD = \dfrac{4x}{\sqrt{7}}$

.

4. Итак, через x выражены длины обоих отрезков BO и OD, найдем их отношение: $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{\sqrt{7}x}{2} : \dfrac{4x}{\sqrt{7}} = \dfrac{7}{8}$.

IV. Ответ: нахождение отношения площадей треугольников в задаче свелось к нахождению отношения длин отрезков, что заметно упростило решение задачи.

Пример № 3.4.4. Агата добиралась от дома до института на своем автомобиле с постоянной скоростью 100 км/ч. Обратно она ехала с постоянной скоростью, которая измерялась целым числом километров в час, причем путь до дома занял у нее больше времени, чем путь до института.

а) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки составить 90 км/ч?

б) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки оказаться равной целому числу километров в час?

Решение.

1. Анализ условия и поиск решения задачи, показывает, что предложенная задача является «задачей на движение». Определим основные величины по условию задачи.

	Время	Скорость	Расстояние
Дом-Институт	$\frac{S}{100}$	100 км/ч	S
Институт-Дом	$\frac{S}{x}$	x км/ч	S

Средняя скорость движения вычисляется по формуле $V_{ср} = \dfrac{2S}{v_1 + v_2}$. По условию задачи $V_{ср} = \dfrac{2S}{\dfrac{S}{100} + \dfrac{S}{x}} = \dfrac{200x}{x+100}$.

2. Дадим ответы на поставленные вопросы.

а) Пусть $V_{ср} = 90$ км/ч, подставим в $V_{ср} = \dfrac{200x}{x+100}$, получим $90 = \dfrac{200x}{x+100} \leftrightarrow 90x + 9000 = 200x \leftrightarrow x = \dfrac{900}{11}$.

Противоречит целочисленности x, следовательно, ответ – **не могла**.

б) Подберем такое значение x, чтобы $V_{ср}$ было целым. Если $x = 60$ *км / ч, то* $V_{ср} = \dfrac{200 \cdot 60}{160} = 75$ *км / ч*.

Таким образом, нашли хотя бы одно значение x, при котором средняя скорость выражалась бы целым числом. Ответ – **да, могла**.

В приведенных выше задачах демонстрируется рефлексивное исследование каждой задачи, которое основано на выделении четырех этапов в решении и поиске эффективного решения задач с опорой на рефлексивный опыт.

Так, например, в первой задаче «столкновение» с неравенством четвертой степени заставило искать другие варианты решения. Рефлексивный опыт подсказывает, что одним из самых эффективных методов решения уравнений и неравенств является замена переменных, что и привело к решению задачи.

3.5. Педагогическая поддержка учащихся, испытывающих трудности при решении математических задач

«Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи»
Д. Пойа

Проблема познавательных затруднений учащихся раскрывается в работах Н.П. Локатовой, Т.Н. Мартыновой, И.А.Славиной, А.С. Смирновой, Е.Ю. Шлюбуль и др. Современные педагогические и психологические исследования позволяют определить познавательные затруднения как – возникающие в процессе учебной деятельности препятствия в понимании материала, осознанном его усвоении, воспроизведении и продуктивном использовании сущностных связей и отношений зависимости между различными изучаемыми объектами, явлениями и фрагментами описывающего их знания. Трудности учащихся при решении математических задач связаны, в первую очередь, с *недостаточным включением рефлексивных стратегий в математическую деятельность.* Причинами этого, на наш взгляд, являются и отсутствие знаний и умений по предмету, и неумение определять собственный наличный уровень знаний и умений, и стремление действовать по шаблону, доверяя «учебнику и товарищу» больше, чем самому себе, а также неумение создать программу выхода из сложившейся ситуации.

В работах В.И. Моросановой, А.В. Карпова, А.К. Осницкого, О.А. Конопкина показано, что психологической основой самостоятельности в практической деятельности составляет сформированная система саморегуляции. Чем выше индивидуальная степень осознанного саморегулирования, тем легче и продуктивнее происходит деятельность. Поэтому преодоление познавательных затруднений должно основываться на решении проблемы развития осознанной саморегуляции деятельности. Задача педагога заключается в учете этой проблемы и организации своевременной педагогической поддержки в процессе математического образования.

О.С. Газман определяет «педагогическую поддержку» как «процесс совместного с ребенком определения его собственных интересов, целей, возможностей и путей преодоления препятствий, мешающих ему сохранить свое человеческое достоинство и без помощи других достигать хотимых результатов в обучении, самовоспитании, общении, творчестве, виде жизни» [11, с. 189].

«Педагогическая поддержка – деятельность педагогов по оказанию превентивной и оперативной помощи детям (подросткам) в решении их индивидуальных проблем, связанных с их физическим и психическим здоровьем, успешным продвижением в учебе...» [40, с. 203]. Необходимость организации такой поддержки заключается в том, что, на наш взгляд, учащиеся не смогут преодолеть возникшие психологические барьеры самостоятельно. Исследования показывают, что у учащихся есть тенденция «отложить» эту проблему как несущественную, «простить себе» невозможность решить эту проблему, «принять» себя таким, какой ты есть.

Е.А. Бондаревская выделяет два вида педагогической поддержки в учебном процессе: общая и индивидуально-личностная поддержка. Общая педагогическая поддержка направлена на поддержку всех учащихся, на создание эмоционального фона доброжелательности, взаимопонимания, сотрудничества. Индивидуально-личностная поддержка направлена на организацию оперативной помощи каждому учащемуся с учетом его личностных особенностей развития.

Для обеспечения рефлексивного обучения математике необходимо запускать процесс педагогической поддержки учащимся в преодолении познавательных затруднений при решении математических задач. Особенностью организации педагогической поддержки в рефлексивном обучении математике будет активизация рефлексивных механизмов личности и научение учащихся использованию рефлексивных стратегий.

Деятельность педагога по организации педагогической поддержки будет заключаться в следующем.

1. Помочь учащемуся сформулировать свои затруднения.

2. Познакомить учащихся с приемами преодоления затруднений на основе использования рефлексивных стратегий.

3. Обеспечить возможность освоить эти приемы. Использовать такие формы, методы и средства обучения математике, при которых предоставляется возможность уделить время каждому учащемуся.

4. При обучении математике использовать технологии полного усвоения математических понятий и формирования математических умений (мотивация – актуализация – введение – усвоение – закрепление – обобщение и систематизация).

5. Применять разнообразные контрольно-обучающие мероприятия, которые направлены на обучение приемам самоконтроля.

Педагогическая поддержка учащихся, испытывающих трудности при решении математических задач направлена на обнаружение учащимися своих проблем и приданием им развивающего характера путем использования рефлексивных стратегий.

Методические рекомендации педагогам к организации педагогической поддержки учащихся, испытывающих трудности при решении математических задач.

Рекомендация № 1. Следует проводить входную диагностическую работу по каждой математической теме.

Диагностическая работа может быть в разных формах: в форме опросника, в форме контрольной работы, в форме анкеты, в форме эссе. Вопросы и задания следует составлять таким образом, чтобы оценить реальные знания по математике, эмоциональное отношение к математике, осознаваемые трудности.

Обсуждение результатов диагностической работы должно прояснить учащимся конкретные причины их «неуспешности» в решении математических задач. Например, среди причин могут быть названы такие: «Я не могу разобраться в условии задачи», «Я не могу подобрать теоретический материал, связывающий условия задачи», «Я не могу найти подходящую формулу», «Я не могу представить, что должно получиться в ответе», «Я потерял логическую связку в своих рассуждениях» и т.д.

Рекомендация № 2. Не начинай нового, не повторив старого, педагог должен актуализировать необходимые знания и умения учащихся, а при наличии – ликвидировать пробелы в знаниях.

Рекомендация № 3. Для обучения процессу поиска преодоления собственных познавательных затруднений, педагог должен познакомить учащегося с некоторыми основными приемами преодоления затруднений.

Прием первый. Любое затруднение преобразуем в задачу, которую необходимо решить, и составляем системы ключевых вопросов. (Что мне нужно сделать? Почему я не могу это сделать? Что мне поможет найти средства для выполнения задания?).

Прием второй. Используем все доступные средства (учебную литературу, Интернет, консультацию педагога) для поиска ответов на ключевые вопросы. Прежде чем преступать к решению любой математической задачи, необходимо вооружиться справочно-теоретическим материалом.

Прием третий. Постоянно отслеживаем свое интеллектуальное состояние. Например, при чтении учебной литературы необходимо контролировать свое познавательное состояние: понятно-непонятно. Стоп! Непонятно. Формулируем фразу: мне непонятно следующее...

Только после этого можно обращаться с вопросами к педагогу: «Почему...», «Откуда....», «Я правильно подозреваю, что здесь....» и т.д.

{Важно на занятиях предусматривать время на самостоятельный поиск и обнаружение проблем, не допуская лености ума и постоянного ожидания действий педагога.}

Прием четвертый. Любая идея должна быть реализована и проверена. Часто учащиеся не уверенны в правильности своих идей и не берутся за решение задачи (*Я не уверен, что это верное решение*), поэтому педагогу следует предусматривать время на осуществление одного или нескольких решений и поиск ошибок.

Прием пятый. Контролируй свою деятельность, не допуская ошибок!

Учащихся необходимо учить осуществлению разного вида контроля (предварительный, текущий и итоговый при решении любой математической задачи).

Прием шестой. Верь в себя и свои возможности! Необходимо использовать эмоциональное стимулирование на каждом этапе преодоления затруднения. Ключевую роль в преодолении затруднений играет интенциональный опыт интеллекта человека, потому как именно в убеждениях, предпочтениях и умонастроении отражается направленность на решение задач [61]. Педагогу стоит рекомендовать учащимся использовать разнообразные позитивные установки (я смогу, у меня получится, я найду решение, я способен), хвалебные слова (я молодец, я справился, я умница, я смог, так держать, все могу).

Рекомендация № 4. Научите учащихся работать с математическим текстом самостоятельно.

Для продуктивной самостоятельности на основании применения рефлексивных стратегий важно научить учащихся практике выбора, использования и корректировке рефлексивных стратегий как процессуальной составляющей рефлексивного обучения.

Для того, чтобы чтение текста не превратилось в пассивное восприятие информации, необходимо учащихся обучать проводить определенную работу с текстом.

При работе с математическим текстом рекомендуется обучать учащихся использованию определенных приемов. Приведем примеры рефлексивных приемов работы с математическим текстом. Итак, обращаясь к внутреннему миру учащегося, к его ментальному опыту, необходимы приемы, обращающие внимание учащегося на собственный мыслительный процесс.

Такие приемы не являются новыми для учащихся, однако при обучении математике их используют недостаточно активно: *«Пометки на полях», «План», «Вопрос-ответ», «Пожалуйста, объясните», «Остановка», «Я знаю, я умею», «Оцени себя».*

Прием «Пометки на полях» заключается в том, что работу с учебным текстом нужно проводить особым образом: введение символики (например, «+» усвоено, «–» неусвоено, «?» непонятно, «!!» обратить внимание); написание комментариев (например, не согласен, подумать, как получилось это равенство? откуда взялась эта формула? куда делась переменная?); написание аннотации, выделение ключевых задач по теме («мне понятно, как решается эта задача на тему, ее необходимо выписать»).

Прием «План» заключается в том, что учащийся перед чтением текста ставит себе задачу, этот текст мне поможет понять..., после того, как я разберусь «я буду знать..., я буду уметь...».

Прием *«Вопрос-ответ»* позволяет учащемуся формулировать конкретные вопросы себе и педагогу, так чтобы ответы на них помогли учащемуся в преодолении познавательного затруднения.

Прием «Я знаю, я умею» заключается в отслеживании учащимся своего состояния «понимания» учебного материала. После6 прочтения каждого логического раздела текста, учащийся осознает, что именно он понял, чему именно он научился.

Прием «Остановка» направлен на обучение учащихся определять, с какого этапа математической деятельности начинается их познавательное затруднение, в какой момент объяснения педагога стало непонятно.

Прием «Оцени себя» позволяет ориентировать учащегося на высказывание субъективной оценки своего научения в соответствии с некоторыми критериями: «я понял», «я ошибся», «мне надо еще раз выполнить задание», «мне надо повторить формулу», «думаю, я разобрался».

Рекомендация № 5. Для решения проблемы познавательных затруднений при руководящей роли педагога, необходимо самому преподавателю быть не только высоко квалифицированным специалистом в области математических дисциплин, но и просто приятным человеком, ведь только в этом случае учащийся впустит педагога в свой внутренний мир и сможет принять его помощь и поддержку. Слова в ряде случаев намного важнее, чем отметка, поэтому педагогу рекомендуется не скупиться на похвалу, и при каждом удобном случае использовать следующие слова: *молодец, великолепно, здорово, чудесно, прекрасно, замечательно, отлично, умница, я знал, что у тебя получится, у тебя с каждым днем получается все лучше и лучше, ты абсолютно прав, прекрасная идея, ты все делаешь правильно, смелей, мне нравится ход твоих мыслей, давай дальше, большое спасибо.*

Приведем пример организации педагогической поддержки учащемуся, испытывающего трудности при решении математической задачи.

Пример. Найти периметр прямоугольного треугольника, катеты которого относятся как 3:4, а длина биссектрисы прямого угла равна $24\sqrt{2}$ [20, с. 170–174].

Шаг 1. Научить работать с математическим текстом. *{Внизу приведен текст решения задачи без пояснений, задача учащегося понять предложенное решение.}*

Пусть задан прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, про который известно: $\angle C = 90^0$, $AL : LB = 4 : 3$. Найти периметр треугольника $\triangle ABC$.

Решение. Пусть

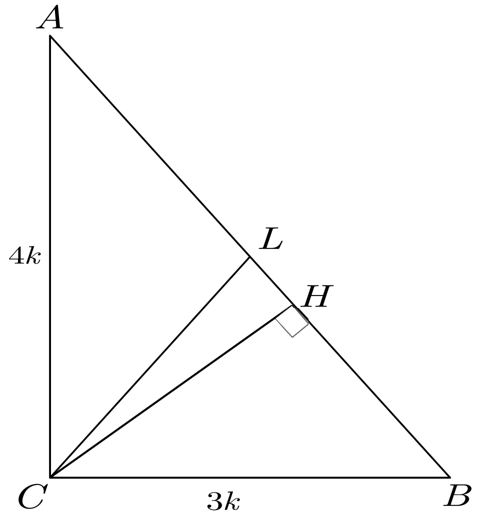


Рис. 3.5.1

$BC = 3k$, $AC = 4k$, $AB = 5k$.

Тогда $AL = \dfrac{20k}{7}$, $LB = \dfrac{15k}{7}$.

$P_{\triangle ABC} = 12k$.

Проведем высоту CH.

$\triangle CBH \sim \triangle ABC$ с коэффициентом $3/5$. Поэтому $BH = \dfrac{9k}{5}$, $CH = \dfrac{12k}{5}$

$\triangle CLH : LH = \dfrac{15k}{7} - \dfrac{9k}{5} = \dfrac{12k}{35}$.

По теореме Пифагора

$$\left(\frac{12k}{35}\right)^2 + \left(\frac{12k \cdot 7}{35 \cdot 7}\right)^2 = \left(24\sqrt{2}\right)^2.$$

$$P_{\triangle ABC} = 12k = 7 \cdot 24 = 168.$$

Работа учащегося с текстом

В тексте решения задачи некоторые этапы пропущены. Попробую восстановить их.

1. Так как по условию стороны пропорциональны, можно ввести коэффициент пропорциональности k: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{4k}{3k}$. Отсюда по теореме Пифагора выразим AB: $(3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2$.

Следовательно, $AB=5k$.

2. По условию задана биссектриса, про нее мы знаем, что она делит угол пополам и делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные боковым сторонам.

Имеем $AL : LB = 4 : 3$.

3. Выразим AL через k: $AL = \dfrac{4}{7}AB = \dfrac{20k}{7}$.

Аналогично, $LB = \frac{3}{7}AB = \frac{15k}{7}$.

4. Выразим периметр через параметр k

$$P_{\vartriangle ABC} = AB + BC + AC = 3k + 4k + 5k = 12k.$$

Задача свелась к нахождению k.

5. Необходимо сделать дополнительное построение, чтобы получить подобные треугольники. Проведем высоту из вершины прямого угла к гипотенузе CH.

6. В $\vartriangle CBH$ *и* $\vartriangle ABC$: $\angle C = \angle H = 90^0$, $\angle B$ – *общий.*

Следовательно, $\vartriangle CBH \sim \vartriangle ABC$ по 1 признаку равенства треугольников.

7. Из подобия треугольников следует отношение сторон:

$$\frac{BH}{BC} = \frac{CB}{AB} \to \frac{BH}{3k} = \frac{3k}{5k},\ BH = \frac{9k}{5},$$

$$\frac{CH}{AC} = \frac{CB}{AB} \to \frac{CH}{4k} = \frac{3k}{5k},\ CH = \frac{12k}{5}.$$

8. Необходимо найти треугольник, в котором не менее трех элементов выражены через k. Таким треугольником является $\vartriangle CLH$: $LH = LB - HB = \frac{15k}{7} - \frac{9k}{5} = \frac{12k}{35}$.

9. По теореме Пифагора $CH^2 + LH^2 = CL^2$, получаем уравнение относительно k:

$$\left(\frac{12k}{35}\right)^2 + \left(\frac{12k \cdot 7}{35}\right)^2 = \left(24\sqrt{2}\right)^2 \to \frac{12^2 \cdot 50 \cdot k^2}{35^2} = 24^2 \cdot 2 \to$$

$$k^2 = 14^2 \to k = 14.$$

10. Зная k, можно найти периметр $P_{\vartriangle ABC} = 12k = 12 \cdot 14 = 168$.

Шаг 2. Поиск собственного решения.

Могу ли я найти k без дополнительного построения. Что связывает элементы в треугольнике, так чтобы получилось уравнение? Теорема косинусов. Для какого треугольника ее применить?

Без дополнительных построений подходит треугольник $\triangle CLB$: $CL = 24\sqrt{2}$, $LB = \dfrac{15k}{7}$, $BC = 3k$, $\angle LCB = 45^0$

У меня есть все, чтобы составить уравнение с помощью теоремы косинусов

$$LB^2 = CL^2 + CB^2 - 2 \cdot CL \cdot CB \cdot \cos\angle LCB.$$

Аккуратно подставим и преобразуем уравнение:

$$\left(\frac{15k}{7}\right)^2 = \left(24\sqrt{2}\right)^2 + (3k)^2 - 2 \cdot 24\sqrt{2} \cdot 3k \cdot \cos 45^0,$$

$$15^2 k^2 = 24^2 \cdot 2 \cdot 7^2 + 9 \cdot 7^2 \cdot k^2 - 2 \cdot 24 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot k,$$

$$216k^2 - 7056k + 56448 = 0,$$

$$3k^2 - 98k + 784 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{98 \pm \sqrt{9604 - 9408}}{6} = \frac{98 \pm 14}{6},$$

$$k_1 = \frac{56}{3}, \;\; k_2 = 14.$$

Таким образом, я получил искомое значение параметра k.

Шаг 3. Поиск и применение готовых формул.

В математических справочниках есть несколько формул, связывающих биссектрису и стороны треугольника.

Формула № 1: $l = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$. Подставим в эту формулу все имеющиеся значения и катеты треугольника, выраженные через k. Получим

$$24\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 3k \cdot 4k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{(3k + 4k)} \leftrightarrow \frac{12\sqrt{2}k^2}{7k} = 24\sqrt{2} \leftrightarrow k = 14.$$

Формула № 2 (Теорема Стюарта). В любом треугольнике справедливо равенство

$$AC^2 \cdot BL + BC^2 \cdot AL - CL \cdot^2 AB = AB \cdot AL \cdot BL.$$

Подставим в эту формулу все имеющиеся значения и элементы треугольника, выраженные через k. Получим,

$$16k^2 \cdot \frac{15k}{7} + 9k^2 \cdot \frac{20k}{7} - 24^2 \cdot 2 \cdot 5k = 5k \cdot \frac{15k}{7} \cdot \frac{20k}{7}.$$

Умножим все равенство на $\frac{7}{5k}$ и выразим k^2:

$$16k^2 \cdot 3 + 9k^2 \cdot 4 - 24^2 \cdot 2 \cdot 7 = \frac{15 \cdot 20}{7} k^2,$$

$$k^2 = \frac{24^2 \cdot 2 \cdot 7^2}{(48+36) \cdot 7 - 300} = \frac{(24 \cdot 7)^2}{144} = \left(\frac{24 \cdot 7}{12}\right)^2 = 14^2,$$

$$k = 14.$$

Шаг 4. Поиск других способов решения с помощью наводящих вопросов педагога.

Способ 1. Воспользуемся методом площадей.

– Вырази площадь треугольника через площади, составляющих его треугольников.

– Площадь треугольника равна сумме площадей треугольников, на которые он делится биссектрисой $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACL} + S_{\triangle BCL}$.

– Какие формулы для нахождения площади треугольника ты выберешь?

– Удобнее всего использовать формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$.

– Все ли значения у тебя известны?

– Да, стороны треугольника известны, угол равен 45^0.

– Что ты ожидаешь получить от метода площадей?

– Уравнение, содержащее k.

– Подставляй.

– Подставляю все имеющиеся значения:

$$\frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 4k = \frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 24\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4k \cdot 24\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

После упрощения, получу:

$$12k = 3 \cdot 24 + 4 \cdot 24 = 7 \cdot 24,$$

$$k = 14.$$

Способ 2. Воспользуемся векторным методом.

– Как можно выразить вектор $\overrightarrow{CL}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ *и* $\overrightarrow{CB}$?

– Попробуем сделать так:

$$\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{CA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{4}{7}\left(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{3}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}$$

– Что мы знаем про вектор $\overrightarrow{CL}$?

– Только его длину $24\sqrt{2}$.

– Как находится длина вектора, выраженного через сумму других векторов?

– Необходимо сумму возвести в квадрат.

– Сможешь это сделать?

– Попробую сделать так: $\overrightarrow{CL}^2 = \left(\frac{3}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}\right)^2$,

$$\overrightarrow{CL}^2 = \frac{9}{49}\overrightarrow{CA}^2 + \frac{16}{49}\overrightarrow{CB}^2 + \frac{12}{49}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}.$$

– Все верно. Что ты ищешь?

– Я ищу k.

– Ты получил равенство, что ты будешь в него подставлять?

– Длины векторов $\overrightarrow{CL}^2 = \left(24\sqrt{2}\right)^2$, $\overrightarrow{CA}^2 = (4k)^2$, $\overrightarrow{CB}^2 = (3k)^2$.

– Что ты можешь сказать про скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$?

– Оно равно нулю, т.к. угол между векторами равен 90^0.

– Теперь у тебя все известно для того, что составить уравнение относительно неизвестной k?

– Да, попробую составить уравнение:

$$24^2 \cdot 2 = \frac{9}{49}\cdot 16k^2 + \frac{16}{49}\cdot 9k^2 + 0,$$

$$24^2 = \frac{144k^2}{49} \leftrightarrow 24 = \frac{12k}{7} \leftrightarrow k = 14.$$

Шаг 5. Осознание результатов решения задачи.

– Какой метод решения задачи тебе больше понравился?

– Что нового ты для себя узнал?

– Какие сложности для себя ты выявил при решении этой задачи?

– Сможешь решить эту задачу самостоятельно?

– Сможешь объяснить решение этой задачи другому ученику?

– Как проверить, что проведенное решение верно?

Знания учащегося становятся прочными, если они приобретены не одной памятью, не заучены механически, а являются продуктом собственных размышлений и закрепились в результате его собственной рефлексивной деятельности над математическим материалом.

Использование рефлексивного обучения при организации самостоятельной работы обеспечивает пространственное и временное взаимодействие учащихся и педагога. Учащиеся получают возможность осуществлять контроль над организацией и протеканием учебной деятельности, что выражается в целеполагании, определении приоритетов и личного графика работы, оценивания результатов своей деятельности. Осознание испытываемых в ходе самостоятельной работы сложностей дает возможность обратиться к педагогу за помощью, четко понимая характер затруднений. Использование учебных пособий и электронных носителей информации побуждает учащегося к самостоятельному поиску и отбору информации, к выбору адекватных рефлексивных стратегий. Сочетание процедур планирования, контроля и самооценки, характерное для рефлексивного обучения, повышает эффективность самостоятельной работы [56, с. 14].

В качестве вывода отметим некоторые особенности проведения педагогической поддержки учащимся, испытывающим трудности при решении математических задач, в концепции рефлексивного обучения математике.

Во-первых, педагогическая поддержка носит индивидуальный характер. При ее организации необходимо учитывать психологические особенности учащихся (возраст, уровень развития когнитивных способностей, уровень мотивации, склонности, настроение, темперамент, отношения в коллективе, отношение к математике и к учителю математики).

Во-вторых, суть педагогической поддержки заключается в сотрудничестве учащихся и педагога. Педагог стимулирует разнообразными педагогическими средствами рефлексивные механизмы личности учащегося. Наиболее действенными становятся вопросно-ответные процедуры, когда педагог выступает в качестве консультанта, позволяя учащемуся двигаться самостоятельно в решении математических задач.

В-третьих, педагог предвосхищает трудности в ходе осуществления самостоятельной работы и понимании учебного материала и знакомит с ними учащихся. Особую роль играет правильная методика работы с математической задачей. Для успешного решения математической задачи, у учащегося должны быть сформированы все необходимые математические понятия и умения. В процессе рефлексивного обучения решению математических задач важно следовать четырем этапам в решении задачи (анализ условия, поиск решения, осуществление решения, контроль правильности выполнения).

Одной из основных характеристик процесса педагогической поддержки в рефлексивном обучении математике является то, что педагог предоставляет учащемуся возможность использовать собственные ресурсы интеллекта и демонстрирует готовность оказать конкретную помощь учащемуся, способствуя тем самым развитию самостоятельности учащегося и обогащению его ментального опыта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Трудности математического образования, с которыми приходится сталкиваться каждому учителю математики, представляются неразрешимыми. Однако рефлексивный подход к обучению математике, направленный на активизацию внутренних ресурсов учащегося, позволит преодолеть как психолого-педагогические, так и методические трудности преподавания математики.

В рефлексивном обучении решению математических задач акцент делается на знаниях и умениях учащегося, обучение учащегося решению задач представляется как самостоятельная деятельность учащегося, в которой учитель выступает помощником, советчиком. Педагог сопровождает учащегося по пути изучения математики, а не тащит его за собой.

Рефлексивное обучение математике показало свою эффективность как при обучении решению стандартных, так и при обучении решению нестандартных математических задач.

В настоящем учебно-методическом пособии описан рефлексивный подход к обучению решения математических задач. Рассмотрены теоретические основы рефлексивного обучения математике, определены рефлексивные стратегии учебной математической деятельности. Описан педагогический потенциал математических дисциплин в развитии личности учащегося на всех этапах его обучения. Представлена модель рефлексивного обучения решению математических задач. рассматривается задачный подход к обучению математике.

Приведена концепция автора осуществления педагогической поддержки учащимся, испытывающим трудности при решении математических задач, на основе рефлексивного обучения решению математических задач.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание. Написать методику рефлексивного обучения следующих задач.

1. Проведите логико-математический анализ задачи:
– выделите четыре этапа в решении задачи;
– аргументируйте выбор метода решения задачи;
– составьте алгоритм решения задачи;
– отметьте особенности в решении задачи.

2. Подберите систему подводящих задач, актуализирующих необходимые знания и умения учащегося, для решения каждой задачи.

3. Составьте систему вопросно-ответных процедур, помогающих учащемуся провести анализ условия задачи и поиск решения задачи.

4. Укажите возможные типичные ошибки учащихся и разработайте рекомендации для их предотвращения и исправления.

Вариант № 1

1. Рабочие Алексей и Володя работали одинаковое число дней. Если бы Алексей работал на один день меньше, а Володя – на 7 дней меньше, то Алексей заработал бы 7200 руб., а 6480 руб. Если бы, наоборот, Алексей работал на 7 дней меньше, а Володя – на один день меньше, то Володя заработал бы на 3240 руб. больше Алексея. Сколько заработал каждый в действительности?

2. Решить уравнение $\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}x$.

3. При каких значениях a, функция $y=a$ пересекает график функции $y=\left|\log_{\frac{1}{3}}|x+2|-3\right|$ в двух точках.

4. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

5. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5 дм, а высота равна 12 дм. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью 24 дм^2 и диагональю, равной 8 дм. Найти боковую поверхность и объем параллелепипеда.

Вариант № 2

1. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна только через один второй кран. Затем, наоборот, второй кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна через один первый кран. После этого оказалось наполненным $\frac{13}{18}$ бассейна. Вычислить, сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности, если оба крана, открытых вместе, наполняют бассейн за 3 часа 36 минут.

2. Решить систему $\begin{cases} |2x-1|-y=2, \\ x-|4-y|=-1. \end{cases}$

3. При каких значениях a, функция $y=a$ не имеет с графиком функции $y=\dfrac{4}{4x^2-x^4}$ ни одной общей точки.

4. В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

5. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром, равным 12, расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Найти объем конуса.

Вариант № 3

1. Поезд вышел со станции A по направлению к B в 13.00. В 19.00 он вынужден был остановиться из-за снежного заноса. Через 2 часа путь удалось расчистить, и, чтобы наверстать потерянное время, машинист повел поезд на остальном пути со скоростью, превышающей скорость поезда до остановки на 20 %. В результате поезд пришел в B с опозданием лишь на час. На следующий день поезд, шедший из A в B по тому же расписанию, попал в занос на 150 км дальше от а, чем первый поезд. простояв два часа, он тоже пошел со скоростью на 20 % выше прежней, но смог наверстать лишь полчаса и опоздал в B на 1 час 30 мину. Найти расстояние между A и B.

2. Решить неравенство $-2(x+1) > (x+2)\left(\sqrt{x+1} - x - 2\right)$.

3. При каких значениях a, функция $y=a$ пересекает график функции в двух точках $y = \left|\dfrac{1}{|x-1|} - 3\right|$.

4. В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислить длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки 4 и 3 см. 5. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K – середина бокового ребра AP. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC.

Вариант № 4

1. Юноша, возвращаясь на велосипеде из отпуска, проехал 246 км и потратил на этот путь на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. Теперь у юноши две возможности проехать остальные 276 км так, чтобы прибыть домой точно к сроку: проезжать ежедневно на h км больше, чем первоначально, или сохранить прежнюю норму ежедневного пути, превысив ее лишь раз – в последний день пути – на $2h$ км. За сколько дней до конца отпуска отправился юноша домой, если известно, что искомое число дней – целое?

2. Решить неравенство $x^2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + x + 2 > 2^{1+\sqrt{x}} + x^2 + x \cdot 2^{\sqrt{x}}$.

3. При каких значениях a, функция $y=a$ пересекает график функции $y = \left|\left|(2-x)^3\right| - 1\right|$ не менее чем в двух точках.

4. В окружность вписан четырехугольник с углами 12^0, 90^0, 60^0 и 90^0. Площадь четырёхугольника равна $9\sqrt{3}$ см^2. Найти радиус окружности, если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABC$ со стороной основания $BC=12$ и боковым ребром $SB=8$ на ребрах SB и SC взяты точки E и F соответственно, являющиеся серединами ребер. плоскость α, содержащая прямую EF, перпендикулярная плоскости основания пирамиды. Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Вариант № 5

1. Имеются два одинаковых куска тканей. Стоимость всего первого куска на 126 руб. больше стоимости второго. Стоимость четырех метров ткани из первого куска на 135 руб.

превышает стоимость трех метров ткани из второго куска. Покупательница приобрела 3 м ткани из первого курса и 4 м ткани из второго куса и заплатила за все 382,5 руб. Сколько метров ткани было в каждом из этих кусков? Какова стоимость одного метра ткани?

2. Решить неравенство $\frac{5}{4}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x>\cos 2x$.

3. При каких значениях a, функция y=a пересекает график функции $y=\left|1-\left(|x|-2\right)^2\right|$ ровно в одной точке.

4. AB – диаметр четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность. Найти отношение $DC:AB$, если угол между прямыми AD и BC равен 60^0.

5. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 6. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45^0. Через меньшую диагональ основания AC проведено сечение, которое пересекает противоположное к ней ребро пирамиды SE на расстоянии $\frac{3}{\sqrt{2}}$ от вершины S. Найдите площадь сечения.

Вариант № 6

1. Из молока, жирность которого составляет 5 %, изготавливают творог жирностью 15,5 %, при этом остается сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получится из 1 т молока?

2. Решить неравенства $0,5^{\sqrt{3}}<0,5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}}<0,5$.

3. При каких значениях a, функция y=a пересекает график функции $y=\left|3^{|x-2|}-3\right|$в трех точках.

4. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 6 и 8. Найти площадь треугольника.

5. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

Вариант № 7

1. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй – 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Сколько олова содержится в полученном новом сплаве?

2. Решить уравнение $\left|4\cos^2 x - 1\right| + \left|4\cos^2 x - 3\right| = 2$.

3. При каких значениях a, функция $y=a$ пересекает график функции $y = 6x^4 - 4x^6$ в четырех точках.

4. Через точку M, взятую на стороне AB в $\triangle ABC$, проведена прямая параллельно стороне AC до пересечения в точке E так, что $BE:EC=1:3$. Найти отношение $S_{\triangle CEM} : S_{\triangle ABC}$.

5. Точки M и N – середины боковых ребер SA и SB правильной треугольной пирамиды $SABC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через прямую MN. Найдите расстояние от вершины C до плоскости сечения, если $AB=30$, $AS=28$.

Вариант № 8

1. На оплату строительных рабочих за 25 дней израсходовано 1672500 руб., причем каждому плотнику платили 900 руб., маляру 1100 руб., столяру 1200 руб. в день. Сколько было рабочих, если на каждых 8 плотников приходилось 3 маляра и на каждых 5 маляров – 4 столяра?

2. Решить неравенство $\log_{\left(x^2-2x-3\right)} \dfrac{|x|-|x-4|}{x+1} > 0$.

3. При каких значениях a, функция $y=a$ пересекает график функции $y = x\sqrt{1-x^2}$ в одной точке.

4. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T. Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.

5. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BB_1, B_1C_1. Найдите угол между данным сечением и плоскостью ABC.

Вариант № 9

1. Сергей и Петр поделили между собой 39 акций компании. Число акций, доставшееся любому из них, меньше удвоенного числа акций, доставшихся другому. Квадрат трети числа акций, доставшихся Петру, меньше числа акций, доставшихся Сергею. Сколько акций досталось каждому?

2. Решить систему $\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$

3. При каких значениях a, функция $y=a$ пересекает график функции $y = 6x^4 - 4x^6$ в четырех точках.

4. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN – касательные к окружности, описанной около треугольника KLN. Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120°$.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S, стороны основания которой равны $6\sqrt{2}$, а боковые ребра равны 21. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A, середину ребра SC, параллельно прямой BD.

Вариант № 10

1. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех разных магазинах, составил 26,8%. через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй – 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30 %, а во втором – 25 %?

2. Решить неравенство $\log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x)\le 0$.

3. При каких значениях a, функция $y=a$ пересекает график функции $y=\left|x^2-2|x|-8\right|$ в четырех точках.

4. Трапеция $KLMN$ ($LM||KN$) вписана в окружность, а другая окружность вписана в эту трапецию, $LM:KN=1:3$, площадь трапеции равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найти высоту трапеции.

5. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро $AA_1=\sqrt{6}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Что делать, если не удается решить математическую задачу?

«Нелегко искать нужную вещь в темноте. Бывает, и не найдешь. А с фонариком – другое дело. Освоив рекомендации, легче вести поиск решения задачи. Проверено на практике».

В.М. Финкельштейн

(По материалам замечательных книг Финкельштейна В.М. Что делать, когда решить задачу не удается. – 4-е изд., перераб. – М.: ИЛЕКСА, 2008. – 74 с., Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.)

– Что делать, когда решить задачу не удается?

– Не отчаиваться, а проявить настойчивость! Основательно изучить условие задачи, ответив на вопросы: «Какое из условий задачи я не использовал? Верно ли я понимаю каждое условие и требование? Как можно найти конечный результат?». Подумать: «Какие формулы, определения, теоремы, аксиомы я не использовал? Возможно, мне неизвестны какие-то свойства, признаки заданных и искомых объектов».

– А если и это не помогает?

– Вновь и вновь возвращаться к решению этой задачи.

Чтобы научиться решать математические задачи, их нужно решать. Опыт решения учащимися математических задач позволил педагогам сформулировать четыре группы рекомендаций в соответствии с основными этапами решения задач.

I. Анализ условия задачи

1) Узнать, что дано: какие заданы математические объекты (элементы), как они связаны между собой. Вспомнить, все что о них известно (их свойства и признаки).

2) Разделить все, что дано на отдельные части – их называют условиями задачи.

3) Понять, что надо найти или доказать: какие объекты требуется определить, как они связаны между собой, как они связано с данными объектами, какое свойство надо установить. Вспомнить все, что о них известно.

4) Разделить все, что надо найти, на отдельные части – их называют требованиями, или вопросами, задачи.

5) Понять, как выглядит конечный результат, что он собой представляет, от чего зависит. Определить, что КОНКРЕТНО надо найти.

6) Записать условие и требование задачи в математической символике и проверить, все ли они записаны.

7) Убедиться, что поняты каждое слово, каждый термин текста задачи.

8) Если данные или искомые элементы не обозначены, обязательно ввести подходящие обозначения для символической записи всех условий и требований.

9) Построить модель задачи: нарисовать схему, чертеж, составить уравнение.

II. Поиск решения

1) Вспомнить, встречалась ли раньше близкая задача. В чем сходство с данной задачей, в чем отличие?

2) Продумать, какие формулы, теоремы, определения могли бы пригодиться.

3) Выдвинуть несколько гипотез о первом шаге, о следующем шаге, о способе решения в целом, а затем оценить, по возможности, перспективность и ценность этих гипотез.

4) Преобразовать исходные данные, найти следствия из условия задачи. Попытаться решить задачу от начала к концу, т.е. получив следствия из условия задачи, выбрать из них то, которое быстрее даст результат.

5) Преобразовать конечный результат, найти вывод, из которого его можно получить.

6) Решать попеременно от конца и от начала, используя полученные результата.

7) Ввести новые переменные.

8) Сделать дополнительное построение.

9) Решить сначала более простую задачу, или более общую, или похожую задачу с другими условиями.

10) Рассмотреть частные или предельные случаи.

11) Перебрать все возможные случаи.

12) Применить векторно-координатный метод.

13) Применить метод от противного.

14) Использовать метод математической индукции.

15) Переформулировать задачу.

III. Осуществление плана решения, обоснование и проверка

1) Проверить, нет ли явных ошибок в плане, нет ли лишних действий.

2) Попутно с осуществлением плана провести обоснование каждого шага и проверить все вычисления и преобразования, промежуточные результаты.

3) Проверить все ли возможные результаты рассмотрены.

4) Проверить все ли условия использованы, все ли требования выполнены.

5) Не противоречит ли результат здравому смыслу.

IV. Анализ решения.

1) Исследовать решение, т.е. выяснить при каких условиях решение существует и при каких нет, сколько возможно различных решений.

2) Составить подобную, обратную, более общую задачу.

3) Попытаться найти другие способы решения, сравнить их и выбрать наилучший.

4) Оценить ценность задачи, т.е. определить возможные применения полученного результата, найденного способа решения.

V. Похвалите себя за успешное решение задачи, насладитесь своим успехом! Запомните эту задачу. Проанализируйте, какие именно Ваши мысли и действия были наиболее удачными? Если были ошибки, то в чем именно они заключались. Дайте себе совет, что делать в будущем, если Вам встретится похожий класс задач. И, еще раз, похвалите себя! **Вы – МОЛОДЕЦ!!!**

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бабанский, Ю.К. Оптимизация процесса обучения (Общедидактический аспект) / Ю.К. Бабанский. – М.: Педагогика, 1977. – 256 с.

2. Балл, Г.А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект / Г.А. Балл. – М.: Педагогика, 1990. – 184 с.

3. Башкатов, И.П. Задачный подход к формированию модели компетентности: построение типологии задач / И.П. Башкатов // Научные труды МИМ ЛИНК. – 2008. – № 20. – С. 52 – 60.

4. Бизяева, А.А. Психология думающего учителя. Педагогическая рефлексия / А.А. Бизяева. – Псков: ПГПИ им. С.М. Кирова, 2004. – 216 с.

5. Блинков, А.Д. Геометрические задачи на построение / А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2012. – 152 с.

6. Боженкова, Л.И. Интеллектуальное воспитание учащихся при обучении геометрии / Л.И. Боженкова. – Калуга: Изд-во КГПУ им. К.Э. Циолковского, 2007. – 281 с.

7. Брадис, В.М. Методика преподавания математики в средней школе / В.М. Брадис. – М.: Учпедгиз, 1954. – 504 с.

8. Буренкова, Н.В. Моделирование как способ формирования обобщенного умения решать задачи: автореф. дис. ... канд. пед. наук (13.00.01) / Н.В. Буренкова. – М., 2009. – 24 с.

9. Бухарова, Г.Д. Основные понятия теории решения задач и теории обучения решению задач / Г.Д. Бухарова // Образование и наука. – 2011. – № 3 (82). – С. 44–58.

10. Вечмотов, Е.М. Метафизика математики / Е.М. Вечмотов. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. – 508с.

11. Газман, О.С. Неклассическое воспитание: от авторитарной педагогики к педагогике свободы / О.С. Газман. – М.: Мирос, 2002. – 294 с.

12. Ганеев, Х.Ж. Теоретические основы развивающего обучения математики / Х.Ж. Ганеев. – Екатеринбург: Изд-во УГПУ, 1997. – 160 с.

13. Гельфман, Э.Г. Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся / Э.Г. Гельфман – СПб.: Питер, 2006. – 384 с.

14. Гнеденко, Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике / Б.В. Гнеденко. – М.: Просвещение, 1982. – 144 с.

15. Егупова, М.В. Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике в школе / М.В. Егупова. – М.: МПГУ, 2014. – 220 с.

16. Жохов, А.Л. Научные основы мировозренчески направленного обучения математике в общеобразовательной и профессиональной школе: дис. ... д-ра пед. наук (13.00.02) / А.Л. Жохов. – М., 1999. – 420 с.

17. Запорожец, А.В. Восприятие и действие / А.В. Запорожец. – М.: Просвещение, 1965. – 240 с.

18. Звенигородская, Г.П. Рефлексивное образование: феноменологический подход / Г.П. Звенигородская. – Хабаровск: ХГПУ, 2001. – 350 с.

19. Зеленский, А.С. Геометрия в задачах / А.С. Зеленский, И.И. Панфилов. – М.: Научно-технический центр «Университетский»: УНИВЕР-ПРЕСС, 2008. – 272 с.

20. Зеленяк, О.П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач теорем. Моделирование в среде TurboPascal / О.П. Зеленяк. – Киев, М.: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. – 336 с.

21. Зимняя, И.А. Учебная деятельность – специфический вид деятельности / И.А. Зимняя // Инновационные проекты и программы в образовании. – 2009. – № 6. – С.3-13.

22. Йосен, Ф. Трудности в обучении математике: Избранные статьи / Ф. Йосен; пер. с норв. Л.В. Левита, отв. ред. М.Н. Панков; Поморский гос. ун-т им М.В. Ломоносова. – Архангельск: Поморский университет, 2006. – 105 с.

23. Калабина, Е.В. Развивающее обучение школьников математике: учеб. пособие для студентов вузов / Е.В. Калабина. – 2-е изд., испр. и доп. – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2015. – 96 с.

24. Карпов, А.В. Психология метакогнитивных процессов личности / А.В. Карпов, И.М. Скитяева. – М.: Изд-во Института психологии РАН, 2005. – 352 с.

25. Карпов, А.В. Психология рефлексивных механизмов деятельности. – М.: Институт психологии РАН, 2004. – 424 с.

26. Кибальченко, И.А. Психологические основы организации учебно-познавательного опыта обучающихся / под ред. А.В. Непомнящего. – М.: Изд-во «Кредо», 2010. – 414 с.

27. Кислякова, М.А. Педагогический потенциал математических дисциплин в подготовке студентов гуманитарных профилей: монография / М.А. Кислякова, А.Е. Поличка. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2019. – 240 с.

28. Кислякова, М.А. Педагогическая поддержка преодоления познавательных затруднений у студентов гуманитарных специальностей при изучении математики: материалы международной заочной научно-практической конференции (23 ноября 2011 г.) / М.А. Кислякова. – Новосибирск: Изд-во «Сибирская ассоциация консультантов», 2011. – 136 с. – С. 28–36.

29. Кислякова, М.А. Развитие метакогнитивных умений студентов гуманитариев на занятиях по математике / М.А. Кислякова // Челябинский педагогический вестник. – 2011. – № 4. – С. 79–90.

30. Кислякова, М.А. Рефлексивное обучение математике: уровень научной проработки, внедрение в практику образования: материалы конференции «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе» (г. Москва, 22-25 апреля 2019) / под ред. Л.Л. Борисовой, Д.И. Павлова. – М.: МПГУ, 2019. – 829 с. – С. 314–322.

31. Коджаспирова, Г.М. Словарь по педагогике / Г.М. Коджаспирова, А.Ю. Коджаспиров. – М.: ИКЦ «МарТ», 2005. – 448 с.

32. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть 1 / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. – 112 с.

33. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математики. Часть 2 / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. – 145 с.

34. Конопкин, О.А. Общая способность к саморегуляции как фактор субъектного развития / О.А. Конопкин // Вопросы психологии. – 2004. – № 2. – С. 128–135.

35. Концепция развития математического образования в Российской федерации от 24.12. 2013 № 2506-р [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/3894.

36. Кострикина, Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов / Н.П. Кострикина. – М.: Просвещение, 1991. – 239 с.

37. Крупич, В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач: дисс. ... д-ра. пед. наук / В.И. Крупич. – Москва, 1992. – 395 с.

38. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей / В.А. Крутецкий. – М. Издательство «Институт практической психологии»; Воронеж: Издательство НПО «МОДЕК», 1998. – 416 с.

39. Липатникова, И.Г. Рефлексивный подход к обучению математике учащихся начальной и основной школы в контексте развивающего обучения: дис. ... д-ра. пед. наук / И.Г. Липатникова. – Екатеринбург, 2005. – 395 с.

40. Локалова, Н.П. Школьная неуспеваемость: причины, психокоррекция, психопрофилактика / Н.П. Локалова. – СПб.: Питер, 2009. – 368 с.

41. Маланов, С.В. Психологические механизмы мышления человека: мышление в науке и учебной деятельности / С.В. Маланов. – М.: Изд-во МПСИ, Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 2004. – 480 с.

42. Математика. ЕГЭ 2017. Книга 2. Профильный уровень / Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцева. Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; Народное образование, 2017. – 224 с.

43. Матюшкин, А.М. Психология мышления. Мышление как разрешение проблемных ситуаций: учебное пособие / А.М. Матюшкин; под ред. А.А. Матюшкиной. – М.: КДУ, 2009. – 190 с.

44. Матюшкин, А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А.М. Матюшкин. – М.: Педагогика, 1972. – 206 с.

45. Методика и технология обучения математике: курс лекций / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

46. Михайлова, Ж.Н. Алгоритмы – ключ к решению задач: Начала математического анализа. Геометрия. Тригонометрия. 10–11 классы / Ж.Н. Михайлова. – СПБ.: Издательский Дом «Литера», 2015. – 320 с.

47. Моросанова, В.И. Самосознание и саморегуляция поведения / В.И. Моросанова, Е.А. Аронова. – М.: Изд-во «ИП РАН», 2007. – 214 с.

48. Плигин, А.А. Индивидуализация развития ученика как субъекта образования на основе формирования познавательных

стратегий школьников / А.А. Плигин // Мир образования – образование в мире, 2009. – № 2. – С. 154–162.

49. Позаментье, А. Стратегии решения математических задач: Различные подходы к типовым задачам / Альфред Позаментье, Стивен Крулик. – М.: Альпина Паблишер, 2018. – 222 с.

50. Пойа, Д. Математическое открытие: Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание; [пер. с англ.] / под ред. и с предисл. И.М. Яглома. – 3-е. изд. – М.: КомКнига, 2010. – 448 с.

51. Попков, В.А. Рефлексивные стратегии познавательной деятельности в высшем профессиональном образовании / В.А. Попков, А.В. Коржуев. – М.: Изд-во ИУО РАО, 2004. – 200 с.

52. Прохоров, А.О. Рефлексивная регуляция психических состояний в учебной деятельности студентов / А.О. Прохоров, А.В. Чернов // Образование и саморазвитие. – 2013. – № 4 (38). – С. 11–16.

53. Розанова, С.А. Математическая культура студентов технических университетов / С.А. Розанова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.

54. Столяр, А.А. Педагогика математики / А.А. Столяр. – Минск: «Вышэйш. школа», 1969. – 368 с.

55. Теребилов, О.Ф. Логика математического мышления / О.Ф. Теребилов. – Ленинград: ЛГУ, 1987. – 192 с.

56. Филимонова, И.Ю. Метакогнитивный подход к организации самостоятельной учебной работы будущего учителя в высшей школе Франции, Швейцарии и Республики Беларусь / И.Ю. Филимонова. – Могилев: УЩ «МГУ им. А.А. Кулешова», 2009. – 180 с.

57. Финкельштейн, В.М. Что делать, когда решить задачу не удается / В.М. Финкельштейн. – 4-е изд., перераб. – М.: ИЛЕКСА, 2008. – 74 с.

58. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.

59. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математики / Л.М. Фридман. – 3-е изд. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 248 с.

60. Хинчин, А.Я. Педагогические статьи: Вопросы преподавания математики. Борьба с методическим штампами / под

ред. и с предисл. Б.В. Гнеденко. – 2-е изд., стереот. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

61. Холодная, М.А. Психология интеллекта: Парадоксы исследования / М.А. Холодная. – СПб.: Питер, 2002. – 272 с.

62. Хуторской, А.В. Методика личностно-ориентированного обучения. Как обучать всех по-разному? / А.В. Хуторской. – М.: Изд-во ВЛАДОС-ПРЕСС, 2005. – 383 с.

63. Шатова, Н.Д. Рефлексивное обучение высшей математике студентов вуза / Н.Д. Шатова, А.М. Романовская // Наука о человеке. Гуманитарные исследования. – № 4 (18). – 2014. – С. 155–162.

64. Шахмейстер, А.Х. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 1. Линейные функции и уравнения / А.Х. Шахмейстер. – М.: Изд-во МЦНМО, СПб.: «Петроглиф», «Виктория плюс», 2014. – 176 с.

65. Шелехова, Л.В. Личностно ориентированное обучение решению сюжетных задач будущего учителя начальных классов в вузе / Л.В. Шелехова. – Майкоп: Изд-во АГУ, 2009. – 232 с.

66. Шелехова, Л.В. Стратегии обучения решению математических задач / Л.В. Шелехова // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 3: Педагогика и психология. – 2011. – С. 171–175.

67. Щедровицкий, Г.П. Избранные труды / Г.П. Щедровицкий. – М.: Шк.Культ.Полит., 1995. – 800 с.

68. Эсаулов, А.Ф. Психология решения задач / А.Ф. Эсаулов. – М: Высшая школа, 1972. – 217 с.

69. Этнометодология: проблемы, подходы, концепции / ред.-сост. А. А. Пископпель и др. – М.: «Гриф и К», 2009. – № 14. – 145 с.

70. Якиманская, И.С. Психологические основы математического образования / И.С. Якиманская. – М.: Академия, 2004. – 320 с.

71. Paris S.G., Winograd P.W. How metacognition can promote academic learning and instruction. // Dimensions of thinking and cognitive instruction / B.J. Jones & L. Idol (Eds.). Hillsdale. – NJ: Lawrence Erlbaum Associates. – 1990. – P. 15–51.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание
Кислякова Мария Андреевна

Методика рефлексивного обучения решению математических задач

Учебно-методическое пособие

Отпечатано с авторского оригинал-макета
Дизайнер обложки *Е. И. Саморядова*

Подписано в печать 15.10.19. Формат 60x84 $_{1/16}$.
Усл. печ. л. 12,2. Тираж 500 экз. Заказ

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.